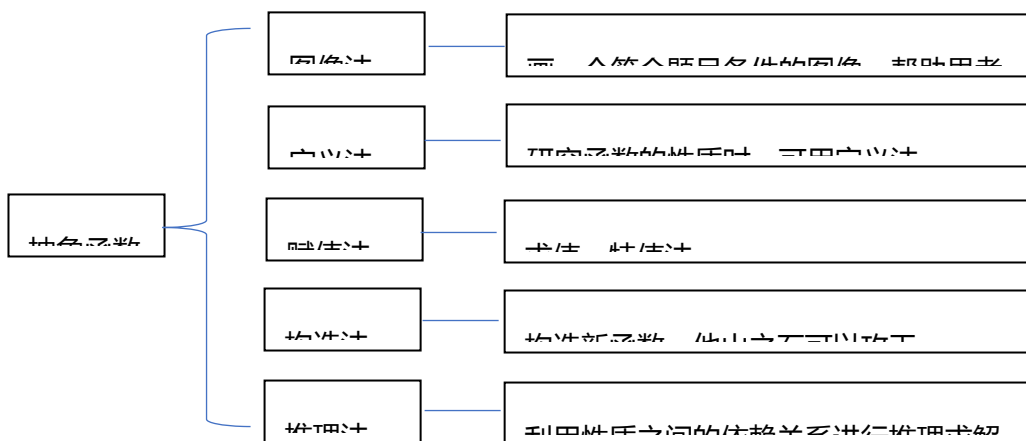


抽象函数专项突破

高考定位

抽象函数型综合问题，一般通过对函数性质的代数表述，综合考查学生对于数学符号语言的理解和接受能力，考查对于函数性质的代数推理和论证能力，考查学生对于一般和特殊关系的认识.函数的周期性、对称性一般与抽象函数结合，综合函数的其它性质一起考查.函数的周期性要紧扣周期函数的定义.要注意，函数的周期性只涉及到一个函数.函数的对称性比较复杂，要分清是一个函数的对称性，还是两个函数的对称性；分清是轴对称还是中心对称.

考点解析



题型解析

目标一、图像法

例 1-1 (2021·江西·高三) 若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增，且

$f(3) = 0$ ，则满足 $xf(x-2) \leq 0$ 的 x 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$ B. $[-3, 0] \cup [5, +\infty]$
C. $[-1, 0] \cup [2, 5]$ D. $(-\infty, -1] \cup [0, 5)$

【答案】C

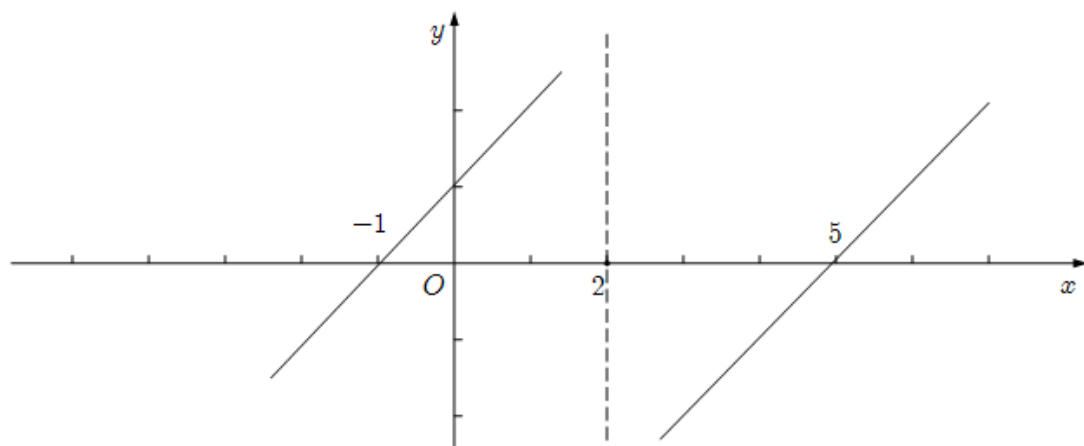
【分析】

根据函数的单调性、奇偶性、函数图象变换，结合图象求得正确答案.

【详解】

依题意 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 递增，且 $f(3) = 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递增，且 $f(-3) = 0$ 。 $f(x-2)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象向右平移 2 个单位得到，画出 $f(x-2)$ 的大致图象如下图所示，由图可知，满足 $xf(x-2) \leq 0$ 的 x 的取值范围为 $[-1, 0] \cup [2, 5]$ 。

故选：C.



例 1-2 (2022·全国·高三专题练习) 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$ ，且在 $[0, 1]$ 上是减函数，则有 ()

- A. $f(\frac{3}{2}) < f(-\frac{1}{4}) < f(\frac{1}{4})$
- B. $f(\frac{1}{4}) < f(-\frac{1}{4}) < f(\frac{3}{2})$
- C. $f(\frac{3}{2}) < f(\frac{1}{4}) < f(-\frac{1}{4})$
- D. $f(-\frac{1}{4}) < f(-\frac{3}{2}) < f(\frac{1}{4})$

【答案】C

【分析】

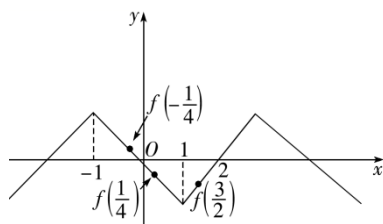
首先判断函数的周期，以及对称性，画出函数的草图，即可判断选项.

【详解】

因为 $f(x+2) = -f(x)$ ，所以 $f(x+2+2) = -f(x+2) = f(x)$ ，所以函数的周期为 4，并且

$f(x+2) = -f(x) = f(-x)$ ，所以函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，作出 $f(x)$

的草图(如图)，由图可知 $f(\frac{3}{2}) < f(\frac{1}{4}) < f(-\frac{1}{4})$ ，



故选：C.

例 1-3 (2021·江西九江市·高三) 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足在 $[0, +\infty)$ 上单调递增， $f(2) = 0$ ，则关于 x 的不等式 $\frac{f(x+1) + f(-x-1)}{x} > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-3, -2) \cup (0, +\infty)$ B. $(-\infty, -3) \cup (0, 1)$
C. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$ D. $(-3, 0) \cup (1, +\infty)$

【答案】D

【分析】

利用函数的奇偶性将不等式化简，利用数形结合进行求解即可.

【详解】

解：Q $f(x)$ 是偶函数， $\therefore$ 不等式 $\frac{f(x+1) + f(-x-1)}{x} > 0$ 等价于

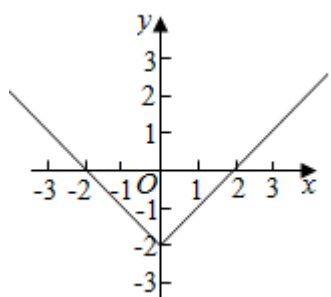
$$\frac{f(x+1) + f(x+1)}{x} = \frac{2f(x+1)}{x} > 0, \text{ 即 } \frac{f(x+1)}{x} > 0,$$

则 $f(x+1) > 0$ ，且 $x > 0$ ，或者 $f(x+1) < 0$ ，且 $x < 0$ ，Q 偶函数 $f(x)$ 满足在 $[0, +\infty)$ 上单调递增， $f(2) = 0$ ， $\therefore f(-2) = 0$ ，则 $f(x)$ 对应的图象如图，则由 $f(x+1) > 0$ ，且 $x > 0$ ，得

$$\begin{cases} x+1 > 2 \text{ 或 } x+1 < -2 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ 得 } x > 1,$$

由 $f(x+1) < 0$ ，且 $x < 0$ ，得 $\begin{cases} -2 < x+1 < 2 \\ x < 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} -3 < x < 1 \\ x < 0 \end{cases}$ ，得 $-3 < x < 0$ ，综上，不等式的解集

为 $(-3, 0) \cup (1, +\infty)$ ，



例 1-4. (2021·江西·九江市柴桑区第一中学高三月考(文)) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-3, a-2]$ 上的奇函数, 且在 $[-3, 0]$ 上单调递增, 则满足 $f(m) + f(m-a) > 0$ 的 m 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{5}{2}, 8\right]$ B. $\left(\frac{5}{2}, 3\right]$ C. $[2, 3]$ D. $[-3, 3]$

【答案】B

【分析】

根据奇函数的定义可知定义域关于原点对称可得 $-3+a-2=0$, 即可解出 a , 由奇函数的性质可得函数 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上递增, 再将 $f(m) + f(m-a) > 0$ 等价变形为

$f(m) > f(a-m)$, 然后根据单调性即可解出.

【详解】

依题意可得 $-3+a-2=0$, 解得 $a=5$, 而函数 $f(x)$ 在 $[-3, 0]$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递增, 又函数 $f(x)$ 连续, 故函数 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上递增,

不等式 $f(m) + f(m-a) > 0$ 即为 $f(m) > f(5-m)$, 所以
$$\begin{cases} -3 \leq m \leq 3 \\ -3 \leq 5-m \leq 3 \\ m > 5-m \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{5}{2} < m \leq 3.$$

故选: B.

目标二、构造法

例 2-1. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \neq 0)$ 的导函数, $f(-1) = -1$. 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 1$, 则使得 $f(x) > x$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

【答案】B

【分析】

令 $g(x) = f(x) - x$, 由已知条件可得 $g'(x) = f'(x) - 1 > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$

上单调递增, 由 $f(-1)=-1$ 和 $f(x)$ 为奇函数, 可得 $g(x)$ 为奇函数, 且 $g(-1)=g(1)=0$, 从而由 $g(x)$ 的单调性可得答案

【详解】

由 $f'(x)>1(a>0)$, 可得 $f'(x)-1>0$, 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g'(x)=f'(x)-1>0$, 故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(-1)=-1$, 所以 $g(-1)=f(-1)+1=0$,

又因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $g(x)=f(x)-x$ 为奇函数, 所以 $g(1)=0$, 且在区间 $(-\infty,0)$ 上, $g(x)$ 单调递增.

所以使得 $f(x)>x$, 即 $g(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

故选: B

练 (2021·江苏·海安高级中学高三月考) 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$, 对任意的实数 x , 都有 $f(x)-f(-x)=4x$, 且当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>2$ 恒成立, 若不等式

$f(a)-f(1-a)\geq 2(2a-1)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ B. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ C. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

【答案】D

【分析】

由题意可得 $f(x)-x=f(-x)-(-x)$, 令 $F(x)=f(x)-2x$, 根据奇偶性的定义, 可得 $F(x)$ 为偶函数, 利用导数可得 $F(x)$ 的单调性, 将题干条件化简可得

$f(a)-2a\geq f(1-a)-2(1-a)$, 即 $F(a)\geq F(1-a)$, 根据 $F(x)$ 的单调性和奇偶性, 计算求解, 即可得答案.

【详解】

由 $f(x)-f(-x)=4x$, 得 $f(x)-2x=f(-x)-2(-x)$,

记 $F(x)=f(x)-2x$, 则有 $F(x)=F(-x)$, 即 $F(x)$ 为偶函数,

又当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F'(x) = f'(x) - 2 > 0$ 恒成立,

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以由 $f(a) - f(1-a) \geq 2(2a-1)$, 得 $f(a) - 2a \geq f(1-a) - 2(1-a)$,

即 $F(a) \geq F(1-a) \Leftrightarrow F(|a|) \geq F(|1-a|)$,

所以 $|a| \geq |1-a|$, 即 $a^2 \geq 1 + a^2 - 2a$, 解得 $a \geq \frac{1}{2}$,

故选: D.

练 (2021·广东南海中学) 设 $f'(x)$ 是偶函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}, x \neq 0$) 的导数, $f(2) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使 $f(x) > 0$ 成立的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ B. $(-2, 0) \cup (0, 2)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

【答案】B

【分析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 利用导数得到, $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数, 再根据 $f(x)$ 为偶函数, 根据 $f(2) = 0$, 解得 $f(x) < 0$ 的解集.

【详解】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $\therefore g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, $\because x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数,

$\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore g(x)$ 为奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $\because f(2) = 0$, 所以 $g(2) = 0$, $\therefore g(2) = -g(-2) = 0$,

因此 $x > 0, f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 = g(2) \Rightarrow 0 < x < 2$,

$x < 0, f(x) > 0 \Rightarrow g(x) < 0 = g(-2) \Rightarrow -2 < x < 0$,

因此使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-2, 0) \cup (0, 2)$,

目标三、赋值法

例 3-1 (2021·湖南省邵东市第一中学高三月考) 已知函数 $f(x)$ 满足

$f(a+b^2) = f(a) + 2f^2(b)$ 对 $a, b \in \mathbb{R}$ 恒成立, 且 $f(1) \neq 0$, 则 $f(2021) =$ ()

A. 1010

B. $\frac{2021}{2}$

C. 1011

D. $\frac{2023}{2}$

【答案】B

【分析】

利用赋值法找出规律，从而得出正确答案.

【详解】

令 $a=b=0$ ，则 $f(0)=f(0)+2f^2(0)$, $f(0)=0$ ，

令 $a=0, b=1$ ，则 $f(1)=f(0)+2f^2(1)$, $f(1)=2f^2(1)$ ，由于 $f(1) \neq 0$ ，所以 $f(1)=\frac{1}{2}$ 。

令 $a=b=1$ ，则 $f(2)=f(1)+2f^2(1)=1$ ，

令 $a=2, b=1$ ，则 $f(3)=f(2)+2f^2(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ，

令 $a=3, b=1$ ，则 $f(4)=f(3)+2f^2(1)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}$ ，

以此类推，可得 $f(2021)=\frac{2021}{2}$ 。

故选：B.

例 3-2 (2021·宁夏·海原县第一中学高三月考(文)) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇

函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$ ，若 $f(1)=3$ ，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2022)=$

()

A. 2022

B. 0

C. 3

D. -2022

【答案】C

【分析】

由条件可得 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，然后利用

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2022)=505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)$ 算出答案

即可.

【详解】

因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$ ， $f(0)=0$

因为 $f(1-x)=f(1+x)$ ，所以 $f(-x)=f(2+x)=-f(x)$

所以 $f(4+x) = -f(2+x) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数

因为 $f(1)=3$ ， $f(2)=f(0)=0$ ， $f(3)=f(-1)=-f(1)=-3$ ， $f(4)=f(0)=0$

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(2022)=505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=3$

故选：C.

例 3-3. (2021·安徽·高三月考(文)) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $f(x-1)$ 关于 $(1,0)$

中心对称， $f(x+1)$ 是偶函数，且 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=1$ ，则 $f\left(\frac{9}{2}\right)$ 的值为 ()

A. 0

B. -1

C. 1

D. 无法确定

【答案】B

【分析】

由于 $f(x-1)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称，又将函数 $f(x-1)$ 向左平移 1 个单位后为 $f(x)$ ，所以

$f(x)$ 关于 $(0,0)$ 中心对称，即 $f(x)$ 是奇函数；又 $f(x+1)$ 是偶函数，又将函数 $f(x+1)$ 向右

平移 1 个单位后为 $f(x)$ ，所以 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，可得函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$ ，由

此即可求出结果.

【详解】

由于 $f(x-1)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称，又将函数 $f(x-1)$ 向左平移 1 个单位后为 $f(x)$ ，所以

$f(x)$ 关于 $(0,0)$ 中心对称，即 $f(x)$ 是奇函数；又 $f(x+1)$ 是偶函数，又将函数 $f(x+1)$ 向右

平移 1 个单位后为 $f(x)$ ，所以 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，即 $f(x)=f(2-x)$ ；

所以 $f(x)=-f(x-2)$ ，所以 $f(x+2)=-f(x)$ ，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$ ，

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(4+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(2-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(-\frac{3}{2}\right)=-1.$$

故选：B.

例 3-4 (2021·江西·赣州市赣县第三中学高三期中(理)) 函数 $y=f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有

$f(x+2)=f(-x)$ 成立，且函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称， $f(1)=4$ ，则

$$f(2020) + f(2021) + f(2022) = (\quad)$$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【分析】

根据函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，得到函数是奇函数，然后结合

$$f(x+2) = f(-x)，得到函数的周期为 $T = 4$ 求解.$$

【详解】

因为函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，

所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，

$$即 f(-x) = -f(x)，$$

$$又因为 f(x+2) = f(-x)，$$

$$所以 f(x+2) = -f(x)，即 f(x+4) = f(x)，$$

$$所以函数的周期为 $T = 4$ ，$$

$$又 f(1) = 4，$$

$$所以 f(2020) + f(2021) + f(2022) = f(0) + f(1) + f(0) = 4.$$

故选：D.

例 3-5 (2021·遵义市第五中学) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，对任意实数 x ，恒有 $f(2-x) = f(x)$ 成立，且 $f(1) = 1$ ，则下列说法正确的是 ()

- ① $(1,0)$ 是函数的一个对称中心；② 函数 $f(x)$ 的一个周期是 4；③ $f(3) = -1$ ；④ $f(2) = 0$

- A. ①②③ B. ②③④ C. ①②④ D. ①③④

【答案】B

【分析】

根据 $f(2-x) = f(x)$ 可判断①；根据 $f(2-x) = f(x)$ 和 $f(x)$ 是奇函数可判断②；根据

$$f(x+2) = -f(x) 可判断③；根据 $f(2-x) = f(x)$ 可判断④.$$

【详解】

由 $f(2-x)=f(x)$ 知 $f(1-x)=f(1+x)$ ，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故①

错误；

由 $f(2-x)=f(x)$ 得 $f(2+x)=f(-x)$ ，由 $f(x)$ 是奇函数得 $-f(x)=f(-x)$ ，则

$f(x+2)=-f(x)$ ，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 的一个周期是 4，故②

正确；由 $f(x+2)=-f(x)$ 得 $f(3)=-f(1)=-1$ ，故③正确；因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(0)=0$ ，由 $f(2-x)=f(x)$ 得 $f(2)=f(0)=0$ ，故④正确. 故选：B.

例 3-6 【2021 年天津市南开中学】设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 5 为周期的奇函数，

若 $f(2) > 1, f(3) = \frac{a^2+a+3}{a-3}$ ，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

【解析】

【分析】

根据函数是以 5 为周期的奇函数，得 $f(2)=f(-3)$ ，结合函数为奇函数，得 $f(-3)=-f(3)$.

由此结合 $f(2) > 1$ 建立关于 a 的不等式，解之可得 a 的取值范围.

【详解】

$\because$ 函数 $f(x)$ 以 5 为周期， $\therefore f(2)=f(-3)$ ，又 $\because f(3) = \frac{a^2+a+3}{a-3}$ ，函数是奇函数， $\therefore f(-3)=-f(3) = -\frac{a^2+a+3}{a-3}$ ，

因此 $f(2) = -\frac{a^2+a+3}{a-3} > 1$ ，解之得 $0 < a < 3$ 或 $a < -2$ ，故答案为 $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

【点睛】本题主要考查了函数的奇偶性和周期性，以及不等式的解法等知识，熟练运用函数的性质是关键，属于基础题.

例 3-7. 已知偶函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(2-x)+f(x)=0$ ，且在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=-1$ ，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(9, f(9))$ 处的切线方程为 ()

A. $x+y-9=0$

B. $x-y-9=0$

C. $x+y-1=0$

D. $x-y-1=0$

【答案】 A

【分析】

根据已知条件可得 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，即可求出 $f(9), f'(9)$ ，得出切线方程.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/058020015021006063>