专题 09 指数与指数函数

【考点预测】

1.指数及指数运算

(1)根式的定义：

一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $(n>1$，$n\in N^*)$，记为 $\sqrt[n]{a}$，n 称为根指数，a 称为根底数.

(2)根式的性质：

当 n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数.

当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数.

(3)指数的概念：指数是幂运算 $a^n(a\neq 0)$ 中的一个参数，a 为底数，n 为指数，指数位于底数的右上角，幂运算表示指数个底数相乘.

(4)有理数指数幂的分类

①正整数指数幂 $a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdot a}^{n\text{个}}\ (n\in N^*)$；②零指数幂 $a^0=1\ (a\neq 0)$；

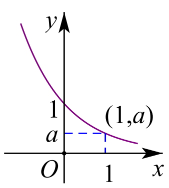
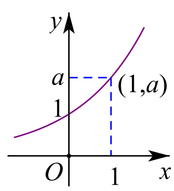
③负整数指数幂 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(a\neq 0$，$n\in N^*)$；④$0$ 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

(5)有理数指数幂的性质

①$a^m a^n=a^{m+n}(a>0$，m，$n\in Q)$；②$(a^m)^n=a^{mn}(a>0$，m，$n\in Q)$；

③$(ab)^m=a^m b^m(a>0$，$b>0$，$m\in Q)$；④$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}(a>0$，$m$，$n\in Q)$.

2.指数函数

<table>
<tr><td colspan="3">$y=a^x$</td></tr>
<tr><td></td><td>$0<a<1$</td><td>$a>1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">①定义域 R，值域 $(0，+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">②$a^0=1$，即时 $x=0$，$y=1$，图象都经过 $(0，1)$ 点</td></tr>
<tr><td colspan="2">③$a^x=a$，即 $x=1$ 时，y 等于底数 a</td></tr>
<tr><td>④在定义域上是单调减函数</td><td>在定义域上是单调增函数</td></tr>
</table>

	⑤ $x<0$ 时，$a^x>1$；$x>0$ 时，$0<a^x<1$	$x<0$ 时，$0<a^x<1$；$x>0$ 时，$a^x>1$
	⑥既不是奇函数，也不是偶函数	

【方法技巧与总结】

1.指数函数常用技巧

(1)当底数大小不定时，必须分“$a>1$”和“$0<a<1$”两种情形讨论．

(2)当$0<a<1$时，$x\to+\infty$，$y\to 0$；a的值越小，图象越靠近y轴，递减的速度越快．

当$a>1$时$x\to+\infty$，$y\to 0$；a的值越大，图象越靠近y轴，递增速度越快．

(3)指数函数$y=a^x$与$y=(\frac{1}{a})^x$的图象关于y轴对称．

【题型归纳目录】

题型一：指数运算及指数方程、指数不等式

题型二：指数函数的图像及性质

题型三：指数函数中的恒成立问题

题型四：指数函数的综合问题

【典例例题】

题型一：指数运算及指数方程、指数不等式

例 1．（2023·四川凉山·三模（文））计算：$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+e^{\ln 3}-\left(\sqrt{3}-1\right)^0+\lg 4+\lg 0.25=$______．

例 2．（2023·河北邯郸·一模）不等式$10^x-6^x-3^x\geq 1$的解集为___________．

例 3．（2023·陕西·榆林市教育科学研究所模拟预测（理））甲、乙两人解关于 x 的方程$2^x+b\cdot 2^{-x}+c=0$，甲写错了常数 b，得到的根为$x=-2$或$x=\log_2\frac{17}{4}$，乙写错了常数 c，得到的根为$x=0$或$x=1$，则原方程的根是（　　）

A．$x=-2$或$x=\log_2 3$　　B．$x=-1$或$x=1$

C．$x=0$或$x=2$　　D．$x=-1$或$x=2$

例 4．（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数$f\left(x\right)$是定义在 R 上的奇函数，当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=4^x-3\times 2^x+2a$．则关于$x$的不等式$f\left(x\right)\leq -6$的解集为（　　）

A．$(-\infty,-2]$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$[-2,0)\cup(0,2)$　　D．$[-2,0)\cup(2,+\infty)$

例 5．（2023·全国·高三专题练习）化简：

（1）$(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^{6}+(-2018)^{0}-4\times\left(\dfrac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{(3-\pi)^{4}}$

（2）$\dfrac{\sqrt{a^{3}b^{2}\sqrt[3]{ab^{2}}}}{\left(\sqrt[4]{a}b^{\frac{1}{2}}\right)^{4}a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$ (a>0，b>0).

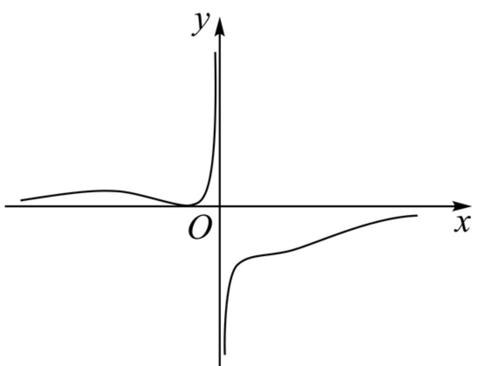
（3）$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a+a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}+\dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}-1}$.

【方法技巧与总结】

利用指数的运算性质解题.对于形如 $a^{f(x)}=b$，$a^{f(x)}>b$，$a^{f(x)}<b$ 的形式常用“化同底”转化，再利用指数函数单调性解决；或用“取对数”的方法求解.形如 $a^{2x}+Ba^{x}+C=0$ 或 $a^{2x}+Ba^{x}+C\geqslant 0(\leqslant 0)$ 的形式，可借助换元法转化二次方程或二次不等式求解.

题型二：指数函数的图像及性质

例 6．（2023·浙江绍兴·模拟预测）函数 $f(x)=\dfrac{(x+m)^{2}}{a^{x}-a^{-x}}$，的图象如图所示，则（　　）



A．$m<0,0<a<1$　　B．$m<0,a>1$　　C．$m>0,0<a<1$　　D．$m>0,a>1$

例 7．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f\left(x\right)=\left|2^{x}-1\right|-m$ 恰有一个零点，则 m 的取值范围是（　　）

A．$\left(1,+\infty\right)$　　B．$\left\{0\right\}\cup\left(1,+\infty\right)$　　C．$\left\{0\right\}\cup\left[1,+\infty\right)$　　D．$\left[1,+\infty\right)$

例 8．（2023·四川省泸县第二中学模拟预测（文））函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$，下列关于函数 $f\left(x\right)$ 的说法错误的是（　　）

A．函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于原点对称

B．函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(0,1\right)$

C．不等式 $f\left(x\right)>\dfrac{1}{2}$ 的解集是 $\left(0,+\infty\right)$

D．$f\left(x\right)$ 是增函数

例 9．（2023·河南·三模（文））已知 $f\left(x-1\right)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f\left(1\right)=0$，且 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-1,0\right)$ 上单调递增，在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递减，则不等式 $f\left(2^{x}-5\right)<0$ 的解集为（　　）

A．$\left(2,\log_{2}6\right)$　　B．$\left(-\infty,1\right)\cup\left(2,\log_{2}6\right)$

C．$\left(\log_{2}6,+\infty\right)$　　D．$\left(1,2\right)\cup\left(\log_{2}6,+\infty\right)$

例 10．（2023·新疆阿勒泰·三模（理））函数 $y=a^{x-1}+1$ 图象过定点 A，点 A 在直线 $mx+ny=3\left(m>1,n>0\right)$ 上，则 $\dfrac{1}{m-1}+\dfrac{2}{n}$ 最小值为___________.

例 11．（2023·北京·高三专题练习）已知 $f\left(x\right)=2^{2x}+2^{x+1}-a2^{x}+1$（其中 $a\in R$ 且 a 为常数）有两个零点，则实数 a 的取值范围是___________.

例 12．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=2^{x}+k\cdot2^{-x}$（$k$ 为常数，$k\in\mathbf{R}$）是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1)求实数 k 的值；

(2)若函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,m\right]$ 上的值域为 $\left[n,\dfrac{15}{4}\right]$，求 $m+n$ 的值.

【方法技巧与总结】

解决指数函数有关问题，思路是从它们的图像与性质考虑，按照数形结合的思路分析，从图像与性质找到解题的突破口，但要注意底数对问题的影响.

题型三：指数函数中的恒成立问题

例 13．（2023·北京·高三专题练习）设 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的偶函数，且当 $x \le 0$ 时，$f\left(x\right)=2^{-x}$，若对任意的 $x \in \left[m,m+1\right]$，不等式 $f\left(x\right) \geqslant f^2\left(x-m\right)$ 恒成立，则正数 m 的取值范围为（　　）

A．$m \ge 1$　　　　B．$m > 1$　　　　C．$0 < m < 1$　　　　D．$0 < m \le 1$

例 14．（2023·北京·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=3^x-3^{-x}$．

(1)利用函数单调性的定义证明 $f\left(x\right)$ 是单调递增函数；

(2)若对任意 $x \in \left[-1,1\right]$，$\left[f\left(x\right)\right]^2+mf\left(x\right) \ge -4$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

例 15．（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数 $f\left(x\right)=a-\dfrac{3}{2^x+1}$（$a$ 为实常数）．

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）当 $f\left(x\right)$ 为奇函数时，对任意 $x \in \left[1,6\right]$，不等式 $f\left(x\right) \ge \dfrac{u}{2^x}$ 恒成立，求实数 u 的最大值．

例 16．（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数 $f(x)=4^x-a\cdot 2^{x+1}+1$．

（1）若函数 $f(x)$ 在 $x \in [0$，$2]$ 上有最大值 -8，求实数 a 的值；

（2）若方程 $f(x)=0$ 在 $x \in [-1$，$2]$ 上有解，求实数 a 的取值范围．

例 17．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=x^{2}$，$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-m$

（1）当 $x\in[-1,3]$时，求 $f(x)$ 的值域；

（2）若对 $\forall x\in[0,2]$，$g(x)\geqslant 1$ 成立，求实数 m 的取值范围；

（3）若对 $\forall x_{1}\in[0,2]$，$\exists x_{2}\in[-1,3]$，使得 $g(x_{1})\leqslant f(x_{2})$ 成立，求实数 m 的取值范围．

【方法技巧与总结】

已知不等式能恒成立求参数值(取值范围)问题常用的方法：

（1）函数法：讨论参数范围，借助函数单调性求解；

（2）分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域或最值问题加以解决；

（3）数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，利用数形结合的方法求解．

题型四：指数函数的综合问题

例 18．（2023·天津河西·二模）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足：① $f(2-x)+f(x)=0$；② $f(x-2)-f(-x)=0$；③在 $[-1,1]$ 上的解析式为 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, x\in[-1,0]\\ 1-x, x\in(0,1]\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的图象在区间 $[-3,3]$ 上的交点个数为(　　)

A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

例 19．（2023·北京·二模）若函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x}+3, x\leq 0\\ (x-2)^{2}, 0<x\leq a\end{cases}$ 的定义域和值域的交集为空集，则正数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,1]$　　　　B．$(0,1)$

C．$(1,4)$　　　　D．$(2,4)$

例 20．（2023·甘肃省武威第一中学模拟预测（文））已知函数 $f(x)=\frac{4}{2^{x}+2}+\sin\pi x$，则

$f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{4043}{2022}\right)=$______.

例 21．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，满足 $f(x+1)=2f(x-1)$，且当 $x\in(-1,1]$ 时，$f(x)=2^{x-1}$，则 $f(2020)=$______.

例 22．（2023·辽宁·建平县实验中学模拟预测）已知函数 $f(x)=\begin{cases}10^{x-2}-10^{2-x},x\le 2\\ |x-3|-1,x>2\end{cases}$，则不等式 $f(x)+f(x-1)<0$ 的解集为__________.

例 23．（2023·江西·二模（文））设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-|x-a|},x\le 1\\ -\frac{1}{2}x+1,x>1\end{cases}$，若 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值，则实数 a 的取值范围为_______.

【过关测试】

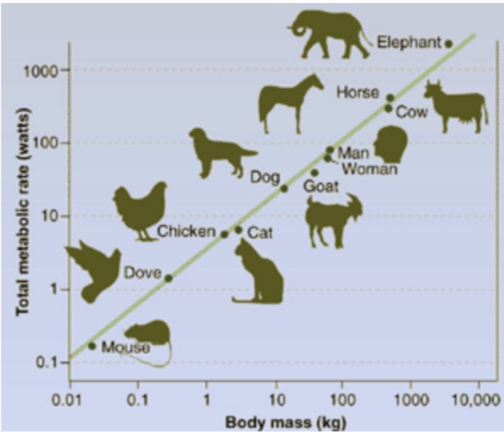
一、单选题

1．（2023·北京通州·模拟预测）已知函数 $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $f(x)$（　　）

A．是偶函数，且在 **R** 是单调递增　　B．是奇函数，且在 **R** 是单调递增

C．是偶函数，且在 **R** 是单调递减　　D．是奇函数，且在 **R** 是单调递减

2．（2023·安徽淮南·二模（理））1947 年，生物学家 Max Kleiber 发表了一篇题为《body size and metabolicrate》的论文，在论文中提出了一个克莱伯定律：对于哺乳动物，其基础代谢率与体重的 $\frac{3}{4}$ 次幂成正比，即 $F=c_0M^{\frac{3}{4}}$，其中 F 为基础代谢率，M 为体重．若某哺乳动物经过一段时间生长，其体重为原来的 10 倍，则基础代谢率为原来的（参考数据：$\sqrt[4]{10}\approx1.7783$）（　　）



A．5.4 倍　　B．5.5 倍　　C．5.6 倍　　D．5.7 倍

3．（2023·陕西·西安中学模拟预测（文））英国著名数学家布鲁克-泰勒以微积分学中将函数展开成无穷级数的定理著称于世.在数学中，泰勒级数用无限连加式来表示一个函数，泰勒提出了适用于所有函数的泰勒级数，并建立了如下指数函数公式：$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\text{L}\ +\frac{x^n}{n!}+\text{L}\ +\text{L}$ ，其中 $x\in\mathrm{R},n\in\mathrm{N}$，则 $\sqrt{\mathrm{e}}$ 的近似值为（精确到 0.01）（　　）

A．1.63　　B．1.64　　C．1.65　　D．1.66

4．（2023·河南洛阳·二模（文））已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}3^{x+1}-1,x\geq1\\-\log_3\left(x+5\right)-2,x<1\end{cases}$，且 $f\left(m\right)=-2$，则 $f\left(6+m\right)=$（　　）

A．26　　B．16　　C．－16　　D．－26

5．（2023·四川成都·三模（理））若函数 $f\left(x\right)=9^x+\frac{\log_3\sqrt{x-1}}{x^2-x}$ 的零点为 x_0，则 $9^{x_0}\left(x_0-1\right)=$（　　）.

A．$\frac{1}{3}$　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

6．（2023·河南·开封高中模拟预测（文））若关于 x 的不等式 $a\cdot2^{|x|}>2^{|x|}+1\left(x\in\mathbf{R}\right)$ 有实数解，则实数 a

的取值范围是（　　）

A．$\left(1,+\infty\right)$　　B．$\left(2,+\infty\right)$　　C．$\left[1,+\infty\right)$　　D．$\left[2,+\infty\right)$

7．（2023·四川·内江市教育科学研究所三模（理））已知函数$f(x)$满足：对任意$x\in\mathbf{R}$，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-f\left(x-\frac{1}{2}\right)$．当$x\in[-1,0)$时，$f(x)=3^x-1$，则$f\left(\log_3 90\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$-\frac{1}{9}$　　C．$\frac{17}{27}$　　D．$-\frac{17}{27}$

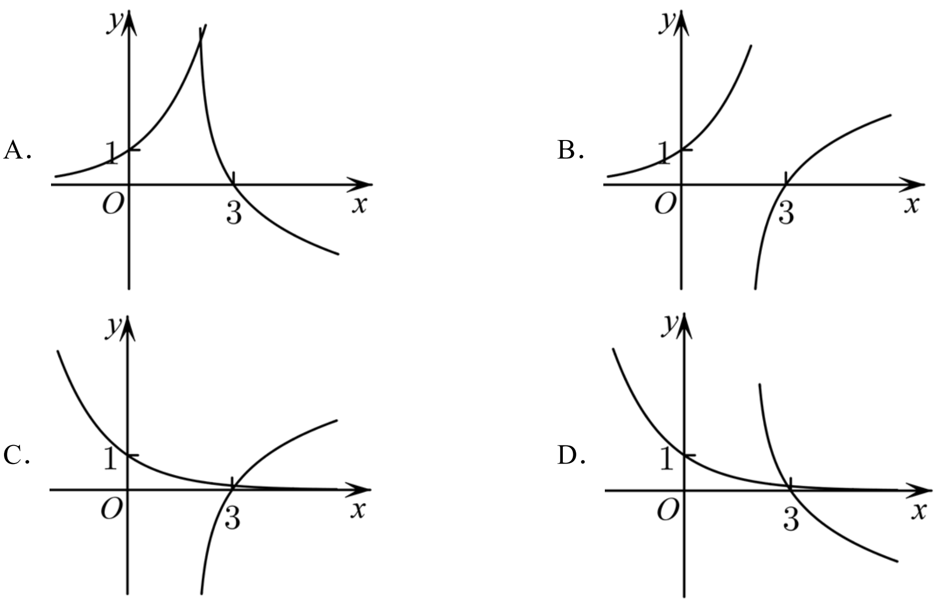
8．（2023·上海宝山·二模）关于函数$f(x)=(2^x-\frac{1}{2^x})\cdot x^{\frac{1}{3}}$和实数$m,n$的下列结论中正确的是（　　）

A．若$-3<m<n$，则$f(m)<f(n)$　　B．若$m<n<0$，则$f(m)<f(n)$

C．若$f(m)<f(n)$，则$m^2<n^2$　　D．若$f(m)<f(n)$，则$m^3<n^3$

二、多选题

9．（2023·湖南·模拟预测）在同一直角坐标系中，函数$y=a^x$与$y=\log_a\left(x-2\right)$的图象可能是（　　）



10．（2023·全国·模拟预测）已知$a>b>0$，下列选项中正确的为（　　）

A．若$\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$，则$a-b<1$　　B．若$a^2-b^2=1$，则$a-b<1$

C．若$2^a-2^b=1$，则$a-b<1$　　D．若$\log_2 a-\log_2 b=1$，则$a-b<1$

11．（2023·广东肇庆·模拟预测）若$a>b$，则下列不等式中正确的有（　　）

A．$a-b>0$　　B．$2^a>2^b$　　C．$ac>bc$　　D．$a^2>b^2$

12．（2023·全国·模拟预测）已知函数$f(x)=\begin{cases}4\sin\pi x,0<x\le 1\\ 2^{x-1}+x,x>1\end{cases}$，若存在三个实数，使得$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right)$，则（　　）

A．$x_1+x_2+x_3$的取值范围为$\left(2,3\right)$　　B．$x_2 f\left(x_3\right)$的取值范围为$\left(\frac{5}{3},2\right)$

C． $x_1x_2x_3$ 的取值范围为 $\left(\frac{5}{36},\frac{1}{2}\right)$　　　　D． $x_1f\left(x_3\right)$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},2\right)$

三、填空题

13．（2023·安徽淮北·一模（理）） $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4^{\log_2\sqrt{2}}+\log_{\sqrt{2}}4=$___________.

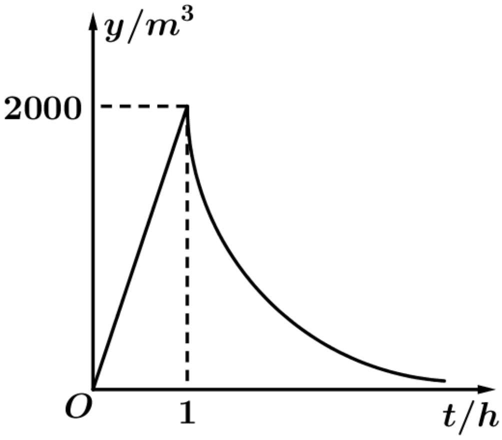
14．（2023·四川·模拟预测（理））已知两个条件：① $a,b\in\mathbf{R},f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$；② $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.请写出一个同时满足以上两个条件的函数___________.

15．（2023·河南·模拟预测（文））函数 $f\left(x\right)=4^x-2^{x+1}+3$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 的值域为______.

16．（2023·山西·二模（理））已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x^3}{2^x-2^{-x}}$ 给出下列结论：① $f\left(x\right)$ 是偶函数；② $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数；③若 $t>0$，则点 $\left(t,f\left(t\right)\right)$ 与原点连线的斜率恒为正．其中正确结论的序号为______.

四、解答题

17．（2023·全国·高三专题练习）由于突发短时强降雨，某小区地下车库流入大量雨水.从雨水开始流入地下车库时进行监测，已知雨水流入过程中，地下车库积水量 y（单位： m^3 ）与时间 t（单位： h ）成正比，雨停后，消防部门立即使用抽水机进行排水，此时 y 与 t 的函数关系式为 $y=k\times\left(\frac{2}{5}\right)^t$（$k$ 为常数)，如图所示.



(1)求 y 关于 t 的函数关系式；

(2)已知该地下车库的面积为 2560 m^2，当积水深度小于等于 0.05 m 时，小区居民方可入内，那么从消防部门开始排水时算起，至少需要经过几个小时以后，小区居民才能进入地下车库？

18．（2023·全国·高三专题练习）（1）计算： $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-$（﹣ 9.6）$^{0}-$ $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$；

（2）已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，求 $\frac{a^2+a^{-2}+1}{a+a^{-1}+2}$ 的值.

19．（2023·全国·高三专题练习）已知 $a>0$，且 $a\neq1$，若函数 $y=|a^x-2|$ 与 $y=3a$ 的图象有两个交点，求实数 a 的取值范围．

20．（2023·全国·高三专题练习）设函数 $f(x)=ka^x-a^{-x}(a>0$ 且 $a\neq1)$ 是定义域为 R 的奇函数；

（1）若 $f(1)>0$，判断 $f(x)$ 的单调性并求不等式 $f(x+2)+f(x-4)>0$ 的解集；

（2）若 $f(1)=\frac{3}{2}$，且 $g(x)=a^{2x}+a^{-2x}-4f(x)$，求 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值．

21．（2023·北京·高三专题练习）定义在 D 上的函数 $f(x)$，如果满足:对任意 $x\in D,$ 存在常数 $M>0,$ 都有 $-M\leq f(x)\leq M$ 成立,则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数,其中 M 称为函数 $f(x)$ 的上界.已知 $f(x)=4^x+a\cdot2^x-2$．

（1）当 $a=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域，并判断函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否为有界函数，请说明理由；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是以 2 为上界的有界函数，求实数 a 的取值范围.

22．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=a^x+b^x(a>0,b>0,a\neq1,b\neq1)$ ．

(1)设 $a=2,b=\frac{1}{2}$，求方程 $f(x)=2$ 的根；

(2)设 $a=2,b=\frac{1}{2}$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(2x)\geq f(x)-6m$ 恒成立，求实数 m 的最大值；

(3)若 $0<a<1,b>1$，函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点，求 ab 的值.

专题 09 指数与指数函数

【考点预测】

1.指数及指数运算

(1)根式的定义：

一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $(n>1$，$n\in N^*)$，记为 $\sqrt[n]{a}$，n 称为根指数，a 称为根底数.

(2)根式的性质：

当 n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数.

当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数.

(3)指数的概念：指数是幂运算 $a^n(a\neq 0)$ 中的一个参数，a 为底数，n 为指数，指数位于底数的右上角，幂运算表示指数个底数相乘.

(4)有理数指数幂的分类

①正整数指数幂 $a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{n个}\ (n\in N^*)$；②零指数幂 $a^0=1\ (a\neq 0)$；

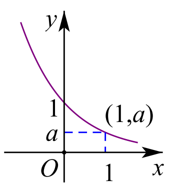
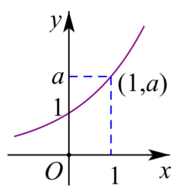
③负整数指数幂 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(a\neq 0$，$n\in N^*)$；④0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

(5)有理数指数幂的性质

① $a^m a^n=a^{m+n}(a>0$，m，$n\in Q)$；② $(a^m)^n=a^{mn}(a>0$，m，$n\in Q)$；

③ $(ab)^m=a^m b^m(a>0$，$b>0$，$m\in Q)$；④ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}(a>0$，$m$，$n\in Q)$.

2.指数函数

	$y=a^x$	
	$0<a<1$	$a>1$
图象		
	①定义域 R，值域 $(0,+\infty)$	

性		
质	② $a^0=1$，即时 $x=0$， $y=1$，图象都经过 $(0，1)$ 点	
	③ $a^x=a$，即 $x=1$ 时， y 等于底数 a	
	④在定义域上是单调减函数	在定义域上是单调增函数
	⑤ $x<0$ 时， $a^x>1$； $x>0$ 时， $0<a^x<1$	$x<0$ 时， $0<a^x<1$； $x>0$ 时， $a^x>1$
	⑥既不是奇函数，也不是偶函数	

【方法技巧与总结】

1.指数函数常用技巧

(1)当底数大小不定时，必须分“$a>1$”和“$0<a<1$”两种情形讨论.

(2)当 $0<a<1$ 时， $x\to+\infty$， $y\to 0$； a 的值越小，图象越靠近 y 轴，递减的速度越快.

当 $a>1$ 时 $x\to+\infty$， $y\to 0$； a 的值越大，图象越靠近 y 轴，递增速度越快.

(3)指数函数 $y=a^x$ 与 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的图象关于 y 轴对称.

【题型归纳目录】

题型一：指数运算及指数方程、指数不等式

题型二：指数函数的图像及性质

题型三：指数函数中的恒成立问题

题型四：指数函数的综合问题

【典例例题】

题型一：指数运算及指数方程、指数不等式

例 1．（2023·四川凉山·三模（文））计算：$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+e^{\ln 3}-\left(\sqrt{3}-1\right)^0+\lg 4+\lg 0.25=$______.

答案：18

【解析】

分析：

根据指对数幂的计算公式求解即可

【详解】

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+e^{\ln 3}-\left(\sqrt{3}-1\right)^0+\lg 4+\lg 0.25=4^2+3-1+\lg\left(4\times 0.25\right)=18$$

故答案为：18

例 2．（2023·河北邯郸·一模）不等式$10^x-6^x-3^x\ge 1$的解集为____________.

答案：$\left[1,+\infty\right)$

【解析】

分析：

将原不等式变为$\left(\frac{1}{10}\right)^{x}+\left(\frac{6}{10}\right)^{x}+\left(\frac{3}{10}\right)^{x}\le 1$，设$f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^{x}+\left(\frac{6}{10}\right)^{x}+\left(\frac{3}{10}\right)^{x}$，然后利用函数的单调性解不等式.

【详解】

由$10^{x}-6^{x}-3^{x}\ge 1$，可得$\left(\frac{1}{10}\right)^{x}+\left(\frac{6}{10}\right)^{x}+\left(\frac{3}{10}\right)^{x}\le 1$.

令$f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^{x}+\left(\frac{6}{10}\right)^{x}+\left(\frac{3}{10}\right)^{x}$，

因为$y=\left(\frac{1}{10}\right)^{x},y=\left(\frac{6}{10}\right)^{x},y=\left(\frac{3}{10}\right)^{x}$均为$\mathbf{R}$上单调递减函数

则$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调逆减，且$f(1)=1$，

$\therefore f(x)\le f(1)$，

$\therefore x\ge 1$

故不等式$10^{x}-6^{x}-3^{x}\ge 1$的解集为$[1,+\infty)$.

故答案为：$[1,+\infty)$.

例 3．（2023·陕西·榆林市教育科学研究所模拟预测（理））甲、乙两人解关于 x 的方程$2^{x}+b\cdot 2^{-x}+c=0$，甲写错了常数 b，得到的根为$x=-2$或$x=\log_{2}\frac{17}{4}$，乙写错了常数 c，得到的根为$x=0$或$x=1$，则原方程的根是（　　）

A．$x=-2$或$x=\log_{2}3$　　　　B．$x=-1$或$x=1$

C．$x=0$或$x=2$　　　　D．$x=-1$或$x=2$

答案：D

【解析】

分析：

令$t=2^{x}$，则方程$2^{x}+b\cdot 2^{-x}+c=0$可化为$t^{2}+ct+b=0$，根据甲计算出常数c，根据乙计算出常数b，再将b,c 代入关于 x 的方程$2^{x}+b\cdot 2^{-x}+c=0$解出x 即可

【详解】

令$t=2^{x}$，则方程$2^{x}+b\cdot 2^{-x}+c=0$可化为$t^{2}+ct+b=0$，甲写错了常数 b，

所以$\frac{1}{4}$和$\frac{17}{4}$是方程$t^{2}+ct+m=0$的两根，所以$c=-\left(\frac{1}{4}+\frac{17}{4}\right)=-\frac{9}{2}$，

乙写错了常数 c，所以 1 和 2 是方程$t^{2}+nt+b=0$的两根，所以$b=1\times 2=2$，

则可得方程$t^2-\frac{9}{2}t+2=0$，解得$t_1=\frac{1}{2},t_2=4$，

所以原方程的根是$x=-1$或$x=2$

故选：D

例4．（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数$f\left(x\right)$是定义在R上的奇函数，当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=4^x-3\times 2^x+2a$．则关于$x$的不等式$f\left(x\right)\leq -6$的解集为（　　）

A．$(-\infty,-2]$　　　B．$(-\infty,-1]$　　　C．$\left[-2,0\right)\cup\left(0,2\right)$　　　D．$\left[-2,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

答案：A

【解析】

分析：

由$f\left(x\right)$是**R**上的奇函数求出a值，并求出$x<0$时，函数$f\left(x\right)$的解析式，再分段讨论解不等式作答.

【详解】

因函数$f\left(x\right)$是定义在R上的奇函数，且当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=4^x-3\times 2^x+2a$，

则$f\left(0\right)=4^0-3\times 2^0+2a=2a-2=0$，解得$a=1$，即当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=4^x-3\times 2^x+2$，

当$x<0$时，$-x>0$，则$f(x)=-f(-x)=-(4^{-x}-3\times 2^{-x}+2)$，

而当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=(2^x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}\geq -\frac{1}{4}$，则当$f\left(x\right)\leq -6$时，$\begin{cases}x<0\\-(4^{-x}-3\times 2^{-x}+2)\leq -6\end{cases}$，即$\begin{cases}x<0\\(2^{-x}-4)(2^{-x}+1)\geq 0\end{cases}$，

变形得$\begin{cases}x<0\\2^{-x}\geq 4\end{cases}$，解得$x\leqslant -2$，

所以不等式$f\left(x\right)\leq -6$的解集为$(-\infty,-2]$.

故选：A

例5．（2023·全国·高三专题练习）化简：

（1）$(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6+(-2018)^0-4\times\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$

（2）$\dfrac{\sqrt{a^3b^2\sqrt[3]{ab^2}}}{\left(\sqrt[4]{ab^{\frac{1}{2}}}\right)^4a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$ (a>0，b>0).

（3）$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a+a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}+\dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}-1}$.

答案：（1）$99+\pi$；（2）$\frac{a}{b}$；（3）$a^{\frac{1}{2}}$.

【解析】

分析：

（1）根据指数幂的化简原则，计算整理，即可得答案.

（2）根据指数幂的化简原则，计算整理，即可得答案.

（3）根据指数幂的化简原则，结合立方差公式，通分计算，即可得答案.

【详解】

（1）原式$=(\sqrt[3]{2})^6\times(\sqrt{3})^6+1-4\times\sqrt{\frac{49}{16}}+|3-\pi|=4\times27+1-7+\pi-3=99+\pi$

（2）原式$=\dfrac{\left(a^3b^2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{ab^2a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{7}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{7}{3}}}=\dfrac{a}{b}$.

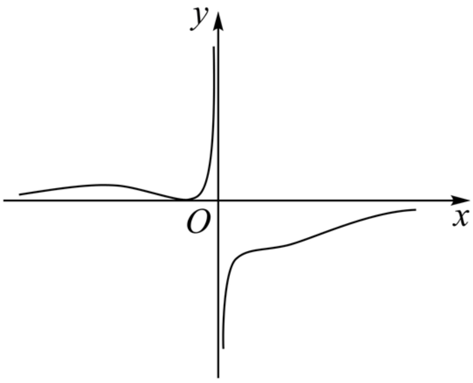
（3）原式$=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a+a-a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}-a+1}{a-1}=a^{\frac{1}{2}}-1-\dfrac{1-a}{a-1}=a^{\frac{1}{2}}$.

【方法技巧与总结】

利用指数的运算性质解题.对于形如$a^{f(x)}=b$，$a^{f(x)}>b$，$a^{f(x)}<b$的形式常用“化同底”转化，再利用指数函数单调性解决；或用“取对数”的方法求解.形如$a^{2x}+Ba^x+C=0$或$a^{2x}+Ba^x+C\geq 0(\leq 0)$的形式，可借助换元法转化二次方程或二次不等式求解.

题型二：指数函数的图像及性质

例6.（2023·浙江绍兴·模拟预测）函数$f(x)=\dfrac{(x+m)^2}{a^x-a^{-x}}$，的图象如图所示，则（　　）



A．$m<0,0<a<1$　　B．$m<0,a>1$　　C．$m>0,0<a<1$　　D．$m>0,a>1$

答案：C

【解析】

分析：

依据图像列不等式求得m、a的取值范围，即可进行选择

【详解】

由图像可知，当$x>0$时，$f(x)<0$，则$x>0$时，$(x+m)^2>0$，则$m\geq 0$，

又由$f(x)$图像不关于原点中心对称可知$m\neq 0$，则$m>0$

则$x>0$时，$a^x-a^{-x}<0$，即$\dfrac{a^{2x}-1}{a^x}<0$，则$0<a<1$

故选：C

例 7．（2023·全国·高三专题练习）函数$f(x)=\left|2^x-1\right|-m$恰有一个零点，则$m$的取值范围是（　　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$\{0\}\cup(1,+\infty)$　　C．$\{0\}\cup[1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

答案：C

【解析】

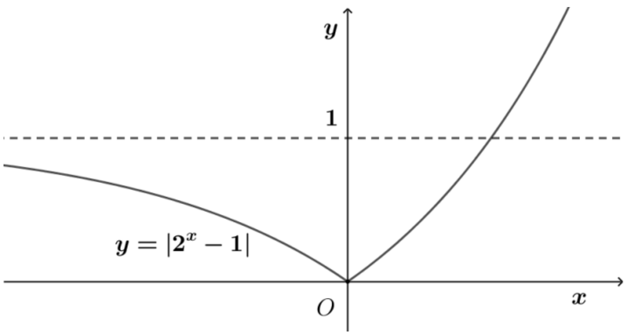
分析：

将问题转化为$y=|2^x-1|$与$y=m$只有一个交点，画出$y=|2^x-1|$的图象，应用数形结合法求m的取值范围.

【详解】

由题设，$y=|2^x-1|$与$y=m$只有一个交点，

又$y=|2^x-1|$的图象如下：



∴$m\in\{0\}\cup[1,+\infty)$.

故选：C.

例 8．（2023·四川省泸县第二中学模拟预测（文））函数$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$，下列关于函数$f(x)$的说法错误的是（　　）

A．函数$f(x)$的图象关于原点对称

B．函数$f(x)$的值域为$(0,1)$

C．不等式 $f(x)>\frac{1}{2}$ 的解集是 $(0,+\infty)$

D． $f(x)$ 是增函数

答案：A

【解析】

分析：

利用特殊值法可判断 A 选项；求出函数 $f(x)$ 的值域，可判断 B 选项；解不等式 $f(x)>\frac{1}{2}$ 可判断 C 选项；利用指数型函数的单调性可判断 D 选项.

【详解】

对于 A 选项，函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，且 $f(0)=\frac{1}{2}\neq 0$ ，

所以，函数 $f(x)$ 的图象不关于原点对称，A 错；

对于 B 选项，因为 $\mathrm{e}^{-x}+1>1$ ，所以， $f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\in(0,1)$ ，B 对；

对于 C 选项，由 $f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}>\frac{1}{2}$ 可得 $e^{-x}<1$ ，则 $-x<0$ ，解得 $x>0$ ，C 对；

对于 D 选项，对任意的 $x\in\mathrm{R}$ ， $y=1+\mathrm{e}^{-x}>1$ ，

且函数 $y=1+\mathrm{e}^{-x}$ 在 R 上单调递减，故函数 $f(x)$ 是增函数，D 对.

故选：A.

例 9．（2023·河南·三模（文））已知 $f(x-1)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数， $f(1)=0$ ，且 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递增，在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，则不等式 $f(2^x-5)<0$ 的解集为（　　）

A． $(2,\log_2 6)$

B． $(-\infty,1)\cup(2,\log_2 6)$

C． $(\log_2 6,+\infty)$

D． $(1,2)\cup(\log_2 6,+\infty)$

答案：D

【解析】

分析：

首先判断出 $f(x)$ 的对称性，求得 $f(x)<0$ 的解集，从而求得 $f(2^x-5)<0$ 的解集.

【详解】

因为 $f(x-1)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，

且 $f(-1)=0$ ，又 $f(1)=0$ ，所以 $f(-3)=0$.

依题意可得，当 $-3<x<-1$ 或 $x>1$ 时， $f(x)<0$.

所以 $f(2^x-5)<0$ 等价于 $-3<2^x-5<-1$ 或 $2^x-5>1$ ，

解得$1<x<2$或$x>\log_2 6$.

故选：D

例 10．（2023·新疆阿勒泰·三模（理））函数$y=a^{x-1}+1$图象过定点A，点A在直线$mx+ny=3\left(m>1,n>0\right)$上，则$\frac{1}{m-1}+\frac{2}{n}$最小值为__________.

答案：$\frac{9}{2}$##4.5

【解析】

分析：

根据指数函数过定点的求法可求得$A\left(1,2\right)$，代入直线方程可得$\left(m-1\right)+2n=2$，根据$\frac{1}{m-1}+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1}+\frac{2}{n}\right)\left(\left(m-1\right)+2n\right)$，利用基本不等式可求得最小值.

【详解】

当$x=1$时，$y=a^0+1=2$，$\therefore y=a^{x-1}+1$过定点$A\left(1,2\right)$，

又点A在直线$mx+ny=3$上，$\therefore m+2n=3$，即$\left(m-1\right)+2n=2$，

$\because m>1$，$n>0$，$\therefore m-1>0$，

$$\therefore \frac{1}{m-1}+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1}+\frac{2}{n}\right)\left(\left(m-1\right)+2n\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{2n}{m-1}+\frac{2\left(m-1\right)}{n}\right)\geq$$

$\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{2n}{m-1}\cdot\frac{2\left(m-1\right)}{n}}\right)=\frac{9}{2}$（当且仅当$\frac{2n}{m-1}=\frac{2\left(m-1\right)}{n}$，即$m=\frac{5}{3}$，$n=\frac{2}{3}$时取等号），

$\therefore \frac{1}{m-1}+\frac{2}{n}$的最小值为$\frac{9}{2}$.

故答案为：$\frac{9}{2}$.

例 11．（2023·北京·高三专题练习）已知$f\left(x\right)=2^{2x}+2^{x+1}-a2^x+1$（其中$a\in R$且$a$为常数）有两个零点，则实数$a$的取值范围是__________.

答案：$\left(4,+\infty\right)$

【解析】

分析：

设$t=2^x\in\left(0,+\infty\right)$，可转化为$t^2+\left(2-a\right)t+1=0$有两个正解，进而可得参数范围.

【详解】

设$t=2^x\in\left(0,+\infty\right)$，

由$f\left(x\right)=2^{2x}+2^{x+1}-a2^x+1$有两个零点，

即方程$t^2+(2-a)t+1=0$有两个正解，

所以$\begin{cases}\Delta=(2-a)^2-4>0\\ t_1+t_2=a-2>0\\ t_1t_2=1>0\end{cases}$，解得$a>4$，

即$a\in(4,+\infty)$，

故答案为：$(4,+\infty)$.

例 12．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=2^x+k\cdot 2^{-x}$（k为常数，$k\in\mathbf{R}$）是$\mathbf{R}$上的奇函数．

(1)求实数k的值；

(2)若函数$y=f(x)$在区间$[1,m]$上的值域为$\left[n,\dfrac{15}{4}\right]$，求$m+n$的值．

答案：(1)$k=-1$

(2)$\dfrac{7}{2}$

【解析】

分析：

（1）由$f(0)=0$求得参数值，再检验即可；

（2）由函数的单调性得$\begin{cases}f(1)=n\\ f(m)=\dfrac{15}{4}\end{cases}$，代入可求得$m,n$.

(1)

由$f(x)$是奇函数得$f(0)=1+k=0$，$k=-1$，此时$f(x)=2^x-2^{-x}$是奇函数；

(2)

由复合函数的性质得$f(x)=2^x-2^{-x}=2^x-\dfrac{1}{2^x}$在定义域内是增函数，

所以$\begin{cases}f(1)=n\\ f(m)=\dfrac{15}{4}\end{cases}$，$n=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，$2^m-\dfrac{1}{2^m}=\dfrac{15}{4}$，$2^m=4$或$2^m=-\dfrac{1}{4}$（舍去），

$m=2$，

所以$m+n=2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}$.

【方法技巧与总结】

解决指数函数有关问题，思路是从它们的图像与性质考虑，按照数形结合的思路分析，从图像与性质找到解题的突破口，但要注意底数对问题的影响.

题型三：指数函数中的恒成立问题

例 13．（2023·北京·高三专题练习）设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且当 $x\le 0$ 时，$f(x)=2^{-x}$，若对任意的 $x\in[m,m+1]$，不等式 $f(x)\geqslant f^2(x-m)$ 恒成立，则正数 m 的取值范围为（　　）

A．$m\ge 1$　　　B．$m>1$　　　C．$0<m<1$　　　D．$0<m\le 1$

答案：A

【解析】

分析：

分析可知 $f(x)=2^{|x|}$，由已知可得 $|x|\ge 2|x-m|$ 对任意的 $x\in[m,m+1]$ 恒成立，解得 $x\le 2m$ 对任意的 $x\in[m,m+1]$ 恒成立，可得出关于实数 m 的不等式，解之即可.

【详解】

因为函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且当 $x\le 0$ 时，$f(x)=2^{-x}$，

则当 $x\ge 0$ 时，$-x\le 0$，$f(x)=f(-x)=2^{x}$，故对任意的 $x\in R$，$f(x)=2^{|x|}$，

对任意的 $x\in[m,m+1]$，不等式 $f(x)\geqslant f^2(x-m)$ 恒成立，

即 $2^{|x|}\ge 2^{2|x-m|}$，即 $|x|\ge 2|x-m|$ 对任意的 $x\in[m,m+1]$ 恒成立，

且 m 为正数，则 $x\ge 2(x-m)$，可得 $x\le 2m$，所以，$m+1\le 2m$，可得 $m\ge 1$.

故选：A.

例 14．（2023·北京·高三专题练习）已知函数 $f(x)=3^x-3^{-x}$.

(1)利用函数单调性的定义证明 $f(x)$ 是单调递增函数；

(2)若对任意 $x\in[-1,1]$，$[f(x)]^2+mf(x)\ge -4$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

答案：(1)证明见解析

(2)$[-4,4]$

【解析】

分析：

（1）利用单调性的定义，取值、作差、整理、定号、得结论，即可得证.

（2）令 $t=3^x-3^{-x}$，根据 x 的范围，可得 t 的范围，原式等价为 $h(t)=t^2+mt$，$t\in\left[-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right]$，只需 $h(t)_{\min}\ge -4$ 即可，分别讨论 $-\frac{m}{2}\le -\frac{8}{3}$、$-\frac{8}{3}<-\frac{m}{2}<\frac{8}{3}$ 和 $-\frac{m}{2}\ge\frac{8}{3}$ 三种情况，根据二次函数的性质，计算求值，分析即可得答案.

(1)

由已知可得 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，