

中考数学一轮复习资料五合一

《核心考点+重点题型+高分秘籍+题组特训+过关检测》

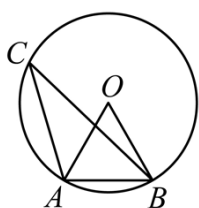
(全国通用版)

第21讲 圆

题组特训详解

一、选择题

1. 如图, 点 A, B, C 是 $\odot O$ 上的点, $AO=3$, $\angle C=30^\circ$, 则 $\widehat{AB}$ 的长是 ()



A. π

B. 2π

C. 3π

D. 4π

【答案】A

【分析】根据同弧所对的圆周角与圆心角的关系, 得出 $\angle AOB = 60^\circ$, 代入弧长计算公式即可.

【详解】 $\because \widehat{AB}$ 所对的圆周角 $\angle C = 30^\circ$, 所对的圆心角为 $\angle AOB$,

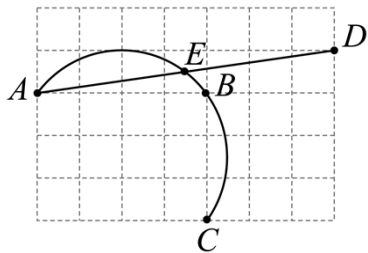
$\therefore \angle AOB = 60^\circ$,

$\therefore \widehat{AB}$ 的长是 $\frac{60\pi \times 3}{180} = \pi$,

故选: A

【点睛】本题考查同弧所对的圆周角与圆心角的关系及弧长的计算公式, 解题的关键是求出 $\angle AOB = 60^\circ$.

2. 如图所示, 在由边长为 1 的小正方形组成的网格图中, 一段圆弧经过格点 A, B, C , AE 的延长线经过格点 D , 则 $\widehat{AE}$ 的长为 ()



A. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{5\pi}{8}$

D. $\frac{5\pi}{4}$

【答案】D

【分析】如图，作 AB 、 BC 的垂直平分线，两线交于 O ， F 为 AB 的中点，连接 OA 、 OE 、 OC ，由垂径定理可得 $AF = \frac{1}{2}AB = 2$ ， $OF = \frac{3}{2}$ ，再运用勾股定理求得 $OA = \frac{5}{2}$ ，再根据 $\angle AOE = 90^\circ$ 和弧长公式即可解答．

【详解】解：如图，作 AB 、 BC 的垂直平分线，两线交于 O ， F 为 AB 的中点，连接 OA 、 OE 、 OC 、 AB 、 BC 、 CD

由垂径定理得： $AF = \frac{1}{2}AB = 2$ ， $OF = \frac{3}{2}$

$$\therefore OA = \sqrt{AF^2 + OF^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ$$

$\therefore AC$ 是直径

根据网格图形可知： $AC = CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$ ， $AD = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

$$\therefore AC^2 + CD^2 = AD^2 = 50，$$

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰直角三角形，

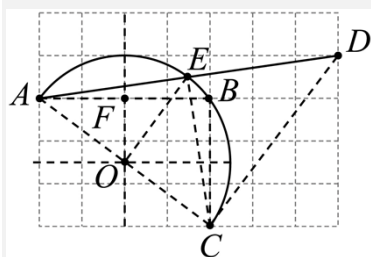
$$\therefore \angle ACD = 90^\circ，\angle CAE = 45^\circ，$$

$$\therefore \angle ECA = 45^\circ，$$

$\therefore \overset{\frown}{AE}$ 所对的圆心角是 90° ，

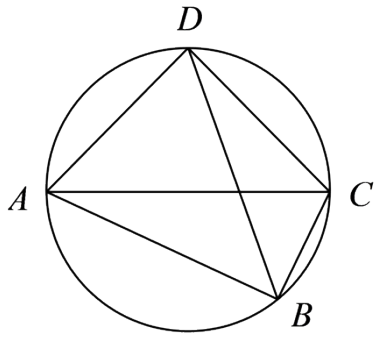
$$\therefore \text{弧 } AE \text{ 的长是 } \frac{90 \times 2\pi \times \frac{5}{2}}{360} = \frac{5}{4}\pi。$$

故选：D．



【点睛】本题主要考查了垂径定理、弧长公式等知识点，根据题意找到圆心是解答本题的关键．

3．如图，在圆内接四边形 $ABCD$ 中， $AD = CD$ ， AC 为直径，若四边形 $ABCD$ 的面积是 S ， BD 的长是 x ，则 S 与 x 之间的数关系式是（ ）



A . $S = x^2$

B . $S = \sqrt{2}x^2$

C . $S = \frac{1}{2}x^2$

D . $S = \frac{2}{3}x^2$

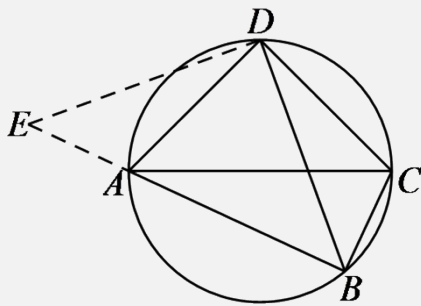
【答案】 C

【分析】 延长 BA 到 E ，使 $AE = CB$ ，连接 DE ，先证明 $\triangle DAE \cong \triangle DCB$ (SAS)，得到

$BD = DE = x$, $S_{\triangle DAE} = S_{\triangle DCB}$, $\angle ADE = \angle CDB$ ，再证明 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle BDE}$, $\angle CAE = \angle BAD = 90^\circ$ ，最后得到

$$S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}x^2 .$$

【详解】 解：如图，延长 BA 到 E ，使 $AE = CB$ ，连接 DE ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，

$$\therefore \angle DAB + \angle DCB = 180^\circ = \angle DAB + \angle DAE ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DCB ,$$

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle DAE = \angle DCB \\ AE = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle DCB (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore BD = DE = x, S_{\triangle DAE} = S_{\triangle DCB}, \angle ADE = \angle CDB ,$$

$$\therefore S_{\triangle DAE} + S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DCB} + S_{\triangle ABD}, \quad \angle ADE + \angle ADB = \angle CDB + \angle ADB$$

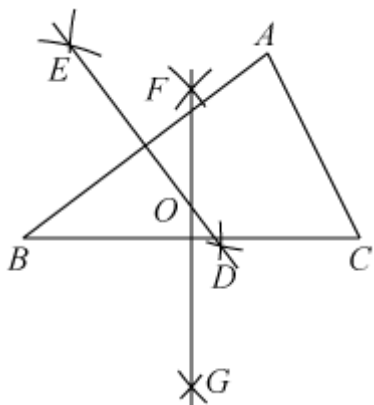
即 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle BDE}, \angle CAE = \angle BAD = 90^\circ$,

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}x^2,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了圆的内接四边形，全等三角形的判定与性质，解题的关键是作辅助线，构造 $\triangle DAE \cong \triangle DCB$.

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 D, E 两点，作直线 DE ；分别以点 B 和点 C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧，两弧相交于 F, G 两点，作直线 FG . 直线 DE 与 FG 相交于点 O ，若以点 O 为圆心， OA 为半径作圆，则下列说法错误的是（ ）



A. 点 B 在 $\odot O$ 上

B. $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆

C. AB 是 $\odot O$ 的弦

D. AC 是 $\odot O$ 的切线

【答案】D

【分析】根据作图可得直线 DE 与 FG 分别为 AB, BC 的垂直平分线，从而得到 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，即可求解.

【详解】解：根据题意得：直线 DE 与 FG 分别为 AB, BC 的垂直平分线，

$\therefore$ 点 O 到 $\triangle ABC$ 的三个顶点的距离相等，

$\therefore \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，故 B 选项正确，不符合题意；

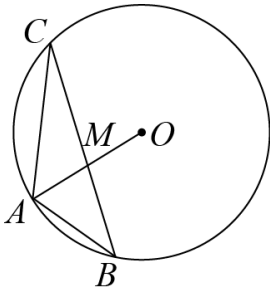
$\therefore$ 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上，故 A 选项正确，不符合题意；

$\therefore AB, AC$ 是 $\odot O$ 的弦，故 C 选项正确，不符合题意；D 选项错误，符合题意；

故选：D

【点睛】本题主要考查了尺规作图，三角形的外接圆，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

5. 如图, 点 A , B , C 在 $\odot O$ 上, $\widehat{AC} = 2\widehat{AB}$, $\angle ABC = 38^\circ$, 连接 OA 交 BC 于点 M , 则 $\angle AMC$ 的度数是 ()

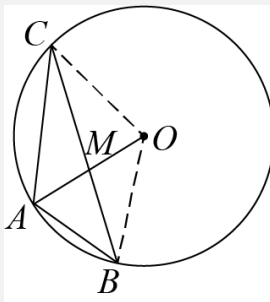


- A . 108° B . 109° C . 110° D . 112°

【答案】B

【分析】连接 OB , OC 由已知条件求得 $\angle AOB$, 由 $OC = OB$, 得 $\angle OCB = \angle OBC$, 继而求得 $\angle AMC = \angle OMB = 109^\circ$, 再根据三角形内角和性质, 即可求得 $\angle AMC$.

【详解】如解图, 连接 OB , OC ,



$$\because \angle ABC = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 76^\circ.$$

$$\because \widehat{AC} = 2\widehat{AB},$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{1}{2}\angle AOC = 38^\circ.$$

$$\because OC = OB,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 76^\circ - 38^\circ) = 33^\circ,$$

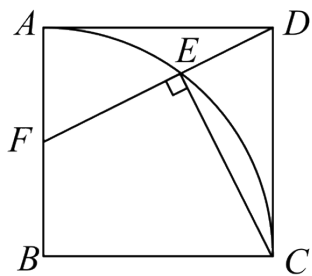
$$\therefore \angle OMB = 180^\circ - \angle AOB - \angle OBC = 180^\circ - 38^\circ - 33^\circ = 109^\circ,$$

$$\therefore \angle AMC = \angle OMB = 109^\circ.$$

故选 B.

【点睛】本题考查了圆心角定理, 圆周角定理, 三角形内角和定理, 等边对等角, 熟悉以上知识是解题的关键.

6. 如图, 在边长为4正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在以 B 为圆心的弧 AC 上, 射线 DE 交 AB 于 F , 连接 CE , 若 $CE \perp DF$, 则 $DE = ()$



A. 2

B. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

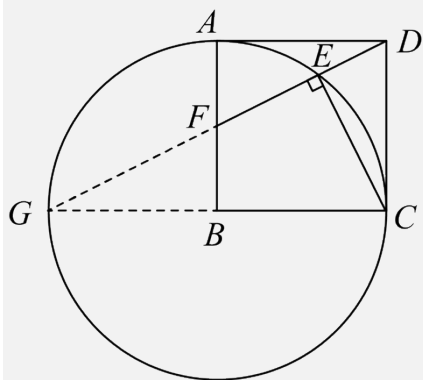
C. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

D. $\frac{6}{5}\sqrt{5}$

【答案】C

【分析】设射线 DF 交 $\odot B$ 于点 G , 连接 BG , 证明 $\angle DCE = \angle G$, 勾股定理得出 GD , 进而根据 $\sin \angle DCE = \sin \angle G$, 列出方程, 解方程即可求解.

【详解】解: 如图所示, 设射线 DF 交 $\odot B$ 于点 G , 连接 BG ,



$\because CE \perp DF$,

$\therefore GC$ 是 $\odot B$ 的直径,

$\therefore BC = 2BC = 8$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore CD = BC = 4, \angle DCG = 90^\circ$,

$\therefore \angle DCE = 90^\circ - \angle GDC = \angle G$, $GD = \sqrt{CD^2 + GC^2} = 4\sqrt{5}$,

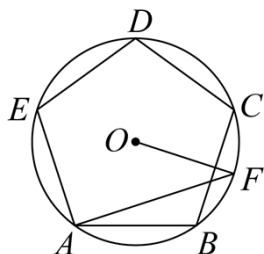
$\therefore \sin \angle DCE = \frac{ED}{CD} = \sin G = \frac{CD}{GD}$,

$\therefore ED = \frac{CD^2}{GD} = \frac{16}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

故选: C.

【点睛】本题考查了直角所对的弦是直角，正弦的定义，正方形的性质，勾股定理，掌握以上知识是解题的关键．

7．如图，正五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$ ，其半径为 1，作 $OF \perp BC$ 交 $\odot O$ 于点 F ，则 $\widehat{FA}$ 的长为（ ）



- A． π B． $\frac{2}{5}\pi$ C． $\frac{3}{5}\pi$ D． $\frac{2}{3}\pi$

【答案】C

【分析】求出弧所对圆心角的度数，代入弧长公式即可求得．

【详解】解： $\because$ 多边形 $ABCDE$ 为正五边形，

$$\therefore \widehat{BA}, \widehat{BC} \text{ 的度数相等} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

$$\because OF \perp BC,$$

$$\therefore \widehat{FB} \text{ 的度数} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ,$$

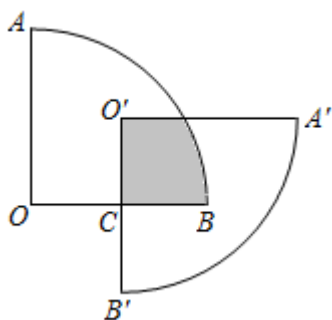
$$\therefore \widehat{FA} \text{ 的度数} = 108^\circ,$$

$$\therefore \widehat{FA} \text{ 的长度} = \frac{108^\circ \times \pi \times 1}{180^\circ} = \frac{3}{5}\pi.$$

故选 C

【点睛】本题考查了弧长的计算，熟记弧长公式是解题关键．

8．如图，扇形 OAB 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OA = 4$ ，点 C 为 OB 的中点，将扇形 OAB 绕点 C 顺时针旋转 90° ，得到扇形 $O'A'B'$ ，则图中阴影部分的面积为（ ）



- A． $\frac{4\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} - 4$ B． $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 4$

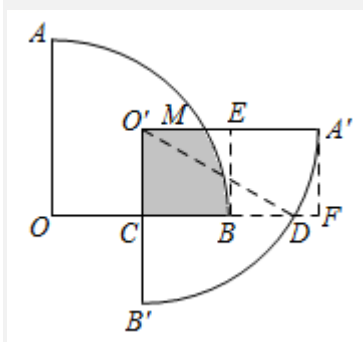
$$C. \frac{4\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{3} - 4$$

$$D. \frac{4\pi}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$$

【答案】B

【分析】过点 B 作 $BE \perp O'A'$ 于点 E ，过点 A' 作 $A'F \perp OB$ 交 OB 的延长线于点 F ，设 $\widehat{A'B'}$ 交 OF 于点 D ， $\widehat{AB}$ 交 $O'A'$ 于点 M ，根据题意得出 $\angle CO'D = 60^\circ$ ，进而根据 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形}B'O'A'} - S_{\text{CDB}'} - S_{\text{BDAM}}$ 即可求解。

【详解】解：如图所示，过点 B 作 $BE \perp O'A'$ 于点 E ，过点 A' 作 $A'F \perp OB$ 交 OB 的延长线于点 F ，设 $\widehat{A'B'}$ 交 OF 于点 D ， $\widehat{AB}$ 交 $O'A'$ 于点 M ，



$$\because O'C = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

则四边形 $CO'EB$, $BEA'F$ 是正方形，

$$\because O'C = \frac{1}{2}OB,$$

$$\therefore O'D = O'B' = OB,$$

$$\cos \angle CO'D = \frac{O'C}{O'D} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle CO'D = 60^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{扇形}B'O'D} = \frac{60 \times \pi \times 4^2}{360} = \frac{8}{3}\pi,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CO'D \text{ 中, } CD = \sqrt{O'D^2 - O'C^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle CO'D} = \frac{1}{2} \cdot O'C \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{CDB}'} = S_{\text{扇形}B'O'D} - S_{\triangle CO'D} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3},$$

$$\because S_{\text{BEM}} = S_{\text{A'FD}},$$

$$\therefore S_{\text{BDAM}} = S_{\text{正方形}BFA'E} = 2 \times 2 = 4,$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形}B'O'A'} - S_{\text{CDB}'} - S_{\text{BDAM}},$$

$$= \frac{90 \times \pi \times 4^2}{360} - \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right) - 4,$$

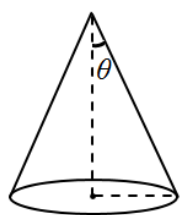
$$= 4\pi - \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 4,$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 4,$$

故选：B．

【点睛】本题考查了求扇形面积，旋转的性质，正方形的性质，掌握扇形面积公式是解题的关键．

9．已知圆锥的底面半径为5cm，设圆锥的母线与高的夹角为 θ （如图所示），且 $\sin\theta$ 的值为 $\frac{5}{13}$ ，则侧面积为（ ）



A． $36\pi\text{cm}^2$

B． $45\pi\text{cm}^2$

C． $65\pi\text{cm}^2$

D． $78\pi\text{cm}^2$

【答案】C

【分析】由题意可知圆锥母线长为13cm，求出底面圆周长，再由圆锥侧面展开图是一个扇形，利用扇形面积公式求解即可得到答案．

【详解】解： $\because \sin\theta$ 的值为 $\frac{5}{13}$ ，圆锥的底面半径为5cm，

$\therefore$ 母线长为13cm，

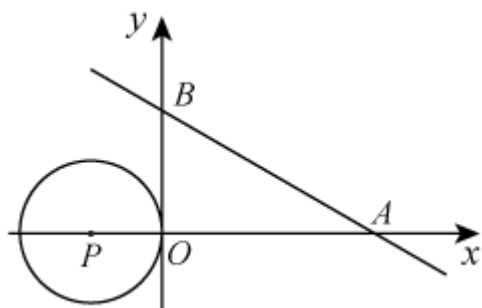
$\therefore$ 底面圆周长为 $2\pi \times 5 = 10\pi\text{cm}$ ，

$\therefore$ 圆锥的侧面积 $= \frac{1}{2}LR = \frac{1}{2} \times 10\pi \times 13 = 65\pi\text{cm}^2$ ，

故选：C．

【点睛】本题考查求圆锥侧面积，涉及三角函数求边长、圆周长及扇形面积公式，熟记圆锥侧面展开图是一个扇形是解决问题的关键．

10．如图，直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于A、B两点，圆心P的坐标为 $(-1, 0)$ ， $\odot P$ 与 y 轴相切于原点O，若将圆P沿 x 轴向右移动，当 $\odot P$ 与该直线相交时，横坐标为整数的点P的个数是（ ）



A . 2

B . 3

C . 4

D . 5

【答案】 B

【分析】 先判断图中的特殊直角三角形，画出 $\odot P$ 与该直线相切时的位置，再在圆和直线相交过程中找到所有整数点即可 .

【详解】 在 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 上，

令 $x = 0, y = \sqrt{3}$; 令 $y = 0, x = 3$

$\therefore A(3, 0), B(0, \sqrt{3})$

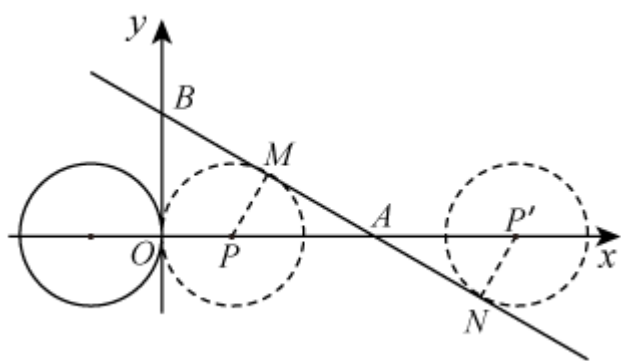
$\therefore OA = 3, OB = \sqrt{3}$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABO$ 中 $\angle BAO = 30^\circ$

$\therefore$ 如图所示，当 $\odot P$ 在 P 点和 P' 点时和直线相切，切点分别为 M, N

$\therefore$ 当 $\odot P$ 与该直线相交时，

横坐标为整数的点 P 即 PP' 线段之间的 $(2, 0), (3, 0), (4, 0)$ 三个点 .

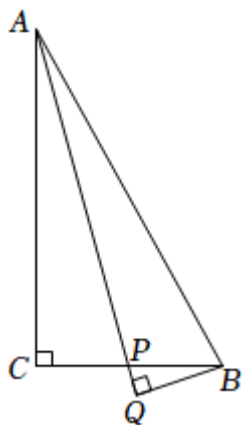


故选： B

【点睛】 此题考查圆与切线的关系，结合平面直角坐标系求点的坐标，解题关键是画出两种可能性，看图选整数点即可 .

二、填空题

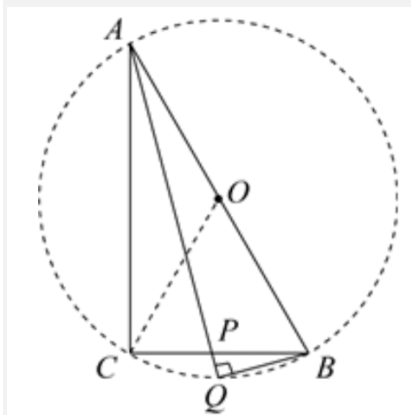
11. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 2$, 点 P 从 C 点出发, 沿 CB 运动到点 B 停止, 过点 B 作射线 AP 的垂线, 垂足为 Q , 点 Q 运动的路径长为__.



【答案】 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{1}{3}\pi$

【分析】由 $AQ \perp BQ$, 得点 Q 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上运动, 运动路径为弧 BC , 连接 OC , 代入弧长公式即可计算.

【详解】 $\because AQ \perp BQ$, $\angle C = 90^\circ$,
 $\therefore ACQB$ 四点共圆,
 $\therefore$ 点 Q 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上运动, 运动路径为弧 BC , 连接 OC ,

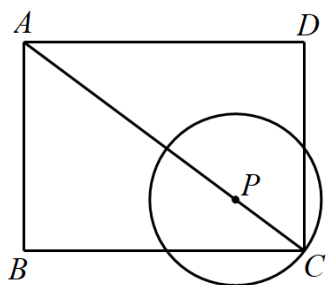


$\because \angle C = 90^\circ$, $OA = OB$,
 $\therefore CO = OA = 1$,
 $\therefore \angle COB = 2\angle CAB = 60^\circ$,
 $\therefore$ 弧 BC 的长为 $\frac{60 \times \pi \times 1}{180} = \frac{\pi}{3}$,

故答案为： $\frac{\pi}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了圆周角定理，弧长公式，确定点 Q 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上运动是解题的关键 .

12 . 如图， P 是矩形 $ABCD$ 对角线 AC 上的一个动点，以点 P 为圆心， PC 长为半径作 $\odot P$. 若 $AC = \frac{5}{3}$ 且 $\tan \angle ACB = \frac{3}{4}$ ，当 $\odot P$ 与矩形 $ABCD$ 的边相切时， PC 的长为_____ .

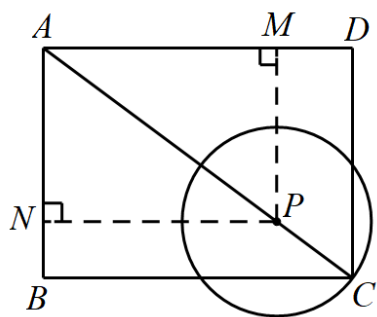


【答案】 $\frac{5}{8}$ 或 $\frac{20}{27}$

【分析】 由锐角的正切求出 AB ， BC 的长，分两种情况，由相似三角形的性质即可求出 PC 的长 .

【详解】 解：由题意知 $\odot P$ 只能与 AD ， AB 相切，

作 $PM \perp AD$ 于 M ， $PN \perp AB$ 于 N ，



$$\because \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{令 } AB = 3x, BC = 4x,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5x = \frac{5}{3},$$

$$\therefore x = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AB = 1, BC = \frac{4}{3},$$

当 $\odot P$ 与 AD 相切时， $PM = PC$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore CD \perp AD, BC \perp AB, CD = AB = 1,$$

$$\therefore PM \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle APM \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore AP:AC = PM:CD,$$

$$\therefore AP = AC - PC = \frac{5}{3} - PC,$$

$$\therefore \left(\frac{5}{3} - PC\right) : \frac{5}{3} = PC : 1,$$

$$\therefore PC = \frac{5}{8};$$

当 $\odot P$ 与 AB 相切时, $PN = PC$,

$$\therefore PN \parallel CB,$$

$$\therefore \triangle ANP \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore AP:AC = PN:BC,$$

$$\therefore AP = AC - PC = \frac{5}{3} - PC,$$

$$\therefore \left(\frac{5}{3} - PC\right) : \frac{5}{3} = PC : \frac{4}{3},$$

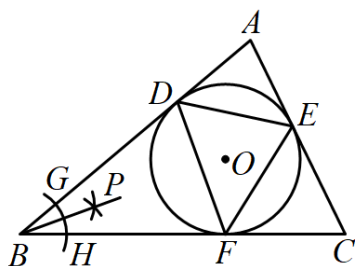
$$\therefore PC = \frac{20}{27}.$$

$$\therefore PC \text{ 的长是 } \frac{5}{8} \text{ 或 } \frac{20}{27}.$$

故答案为: $\frac{5}{8}$ 或 $\frac{20}{27}$.

【点睛】本题考查切线的性质, 矩形的性质, 解直角三角形, 相似三角形的判定和性质, 关键是要分两种情况讨论.

13. 如图, $\triangle ABC$ 的内切圆 (圆心为点 O) 与各边分别相切于点 D, E, F , 连接 EF, DE, DF . 以点 B 为圆心, 以适当长为半径作弧分别交 AB, BC 于 G, H 两点; 分别以点 G, H 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}GH$ 的长为半径作弧, 两条弧交于点 P ; 作射线 BP . 下列说法正确的是_____. (填代码即可)



A. 射线 BP 一定过点 O

B. 点 O 是 $\triangle DEF$ 三条中线的交点

C. 若 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 则 $DE = \frac{1}{2}BC$

D. 点 O 是 $\triangle DEF$ 三条边的垂直平分线的交点

【答案】ACD

【分析】根据三角形内切圆和外接圆的性质逐一判断即可.

【详解】解: A、 $\because \triangle ABC$ 的内切圆圆心为 O ,

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点,

以点 B 为圆心, 以适当长为半径作弧分别交 AB, BC 于 G, H 两点; 分别以点 G, H 为圆心, 以大于

$\frac{1}{2}GH$ 的长为半径作弧, 两条弧交于点 P ; 作射线 BP , 由此可得 BP 是角平分线, 所以射线 BP 一定过点 O , 说法正确, 故此选项符合题意;

B、 $\because D, E, F$ 都在 $\odot O$ 上,

$\therefore \odot O$ 是 $\triangle DEF$ 的外接圆,

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle DEF$ 三条边的垂直平分线的交点, 故此选项不符合题意;

C、当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时, 则 $OC \perp AB$,

$\because AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 D ,

$\therefore OD \perp AB$,

$\therefore O, D, C$ 三点共线,

$\therefore$ 点 D 是 AB 的中点,

同理点 E 是 AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$, 故此选项符合题意;

D、 $\because D, E, F$ 都在 $\odot O$ 上,

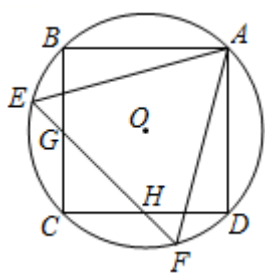
$\therefore \odot O$ 是 $\triangle DEF$ 的外接圆,

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle DEF$ 三条边的垂直平分线的交点, 故此选项符合题意;

故答案为: ACD.

【点睛】本题考查了三角形内切圆和外接圆的特点和性质, 三角形中位线定理, 解题的关键是能与其它知识联系起来, 加以证明选项的正确.

14. 如图, 正方形 $ABCD$ 和等边 $\triangle AEF$ 都内接于圆 O , EF 与 BC, CD 分别相交于点 G, H . 若 $AE = 6$, 则 EG 的长为_____.

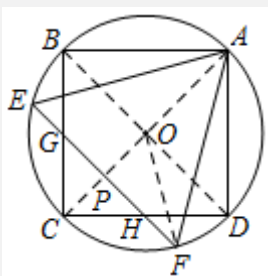


【答案】 $3 - \sqrt{3}$ $## -\sqrt{3} + 3$

【分析】连接 AC 、 BD 、 OF ， AC 与 EF 交于 P 点，则它们的交点为 O 点，如图，利用正方形和等边三角形的性质得到 $\angle COF = 60^\circ$ ， $AC \perp BD$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ，利用含 30° 度的直角三角形三边的关系得到

$OP = \frac{1}{2}OF = \frac{1}{2}OC$ ， $OP = \frac{\sqrt{3}}{3}PF = \sqrt{3}$ ，从而得到 $PC = OP = \sqrt{3}$ ，然后利用 $\triangle PCG$ 为等腰直角三角形得到 $PG = PC = \sqrt{3}$ ，从而得到 $EG = PE - PG = 3 - \sqrt{3}$ 。

【详解】解：连接 AC 、 BD 、 OF ， AC 与 EF 交于 P 点，则它们的交点为 O 点，
如图，



$\because$ 正方形 $ABCD$ 和等边 $\triangle AEF$ 都内接于圆 O ，

$\therefore \angle COF = 60^\circ$ ， $AC \perp BD$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ，

$\because EF \parallel BD$ ，

$\therefore AC \perp EF$ ，

$\therefore PE = PF = \frac{1}{2}EF = 3$ ，

在 $Rt\triangle OPF$ 中， $OP = \frac{1}{2}OF = \frac{1}{2}OC$ ，

$\because OP = \frac{\sqrt{3}}{3}PF = \sqrt{3}$ ，

$\therefore PC = OP = \sqrt{3}$ ，

$\because \triangle PCG$ 为等腰直角三角形，

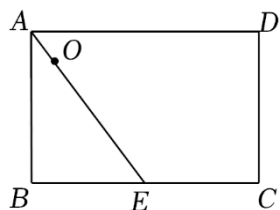
$\therefore PG = PC = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore EG = PE - PG = 3 - \sqrt{3}.$$

故答案为： $3 - \sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了三角形的外心与外接圆：三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做三角形的外心．也考查了等边三角形和正方形的性质．

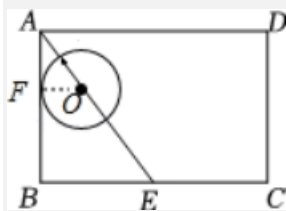
15．如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，点 E 是 BC 的中点，连接 AE ，点 O 是线段 AE 上一点， $\odot O$ 的半径为 1，如果 $\odot O$ 与矩形 $ABCD$ 的各边都没有公共点，那么线段 AO 长的取值范围是 ___．



【答案】 $\frac{5}{3} < AO < \frac{15}{4}$

【分析】 根据题意，需要分 $\odot O$ 分别与边 AB 、 BE 相切两种情况下，计算出 AO 长度即可解答．

【详解】 解：设 $\odot O$ 与 AB 相切于点 F ，连接 OF ， $OF=1$ ，



$$\because BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3, \quad \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$\triangle ABE$ 中，

$$\because AB > BE,$$

$$\therefore \angle BAE < \angle BEA$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BEA,$$

$$\therefore \angle BAE < \angle DAE,$$

$$\because \angle AFO = \angle ABE = 90^\circ, \quad \angle FAO = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle AFO \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{AO}{AE} = \frac{OF}{BE}, \quad \text{即 } AO = \frac{OF \times AE}{EB} = \frac{1 \times 5}{3} = \frac{5}{3},$$

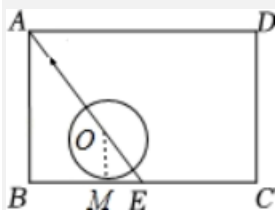
$$\because \angle DAE > \angle BAE,$$

∴若 $\odot O$ 与 AD 相切时，和 AB 一定相交；

若 $\odot O$ 与 AB 相切时，和 AD 一定相离．

同理当 $\odot O$ 与 BC 相切于点 M 时，连接 OM ， $OM=1$ ，计算得 $EO=\frac{5}{4}$ ，

∴此时 $AO=5-EO=5-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$ ，

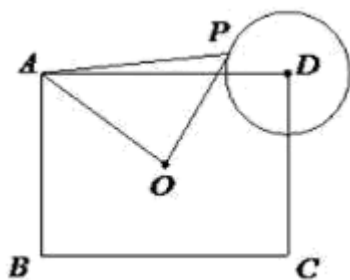


∴当 $\frac{5}{3} < AO < \frac{15}{4}$ 时， $\odot O$ 与矩形 $ABCD$ 的各边都没有公共点，

故答案为： $\frac{5}{3} < AO < \frac{15}{4}$ ．

【点睛】本题考查了切线的性质、勾股定理、相似三角形的判定与性质，解题关键是分两种情况计算．

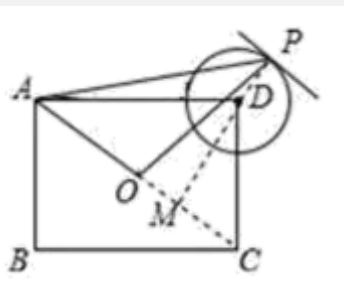
16．如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $BC=8$ ， O 为矩形 $ABCD$ 的对角线的交点，以 D 为圆心，半径为1作 $\odot D$ ， P 为 $\odot D$ 上的一个动点，连接 AP 、 OP ，则 $\triangle AOP$ 面积的最大值为_____．



【答案】14.5

【分析】当 P 点移动到过点 P 的直线平行于 OA 且与 $\odot D$ 相切时， $\triangle AOP$ 面积的最大，由于 P 为切点，得出 PM 垂直于切线，进而得出 $PM \perp AC$ ，根据勾股定理先求得 AC 的长，进而求得 OA 的长，根据 $\triangle ADM \sim \triangle ACD$ ，求得 DM 的长，从而求得 PM 的长，最后根据三角形的面积公式即可求得．

【详解】当 P 点移动到过点 P 的直线平行于 OA 且与 $\odot D$ 相切时， $\triangle AOP$ 面积的最大，如图，



∴过点 P 的直线是 $\odot D$ 的切线，

$\therefore DP$ 垂直于切线，延长 PD 交 AC 于 M ，则 $DM \perp AC$ ，

$\therefore$ 在矩形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $BC=8$ ，

$\therefore AC=10$ ，

$\therefore OA=5$ ，

$\therefore \angle AMD = \angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle DAM = \angle CAD$ ，

$\therefore \triangle ADM \sim \triangle ACD$ ，

$$\therefore \frac{DM}{CD} = \frac{AD}{AC}，$$

$\therefore AD=8$ ， $CD=6$ ， $AC=10$ ，

$$\therefore DM = \frac{24}{5}，$$

$$\therefore PM = PD + DM = 1 + \frac{24}{5} = \frac{29}{5}，$$

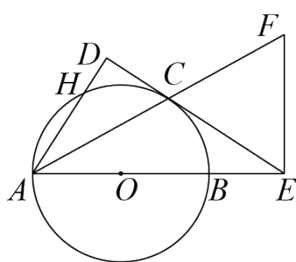
$$\therefore \triangle AOP \text{ 的最大面积} = \frac{1}{2} OA \cdot PM = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{29}{5} = \frac{29}{2} = 14.5，$$

故答案为：14.5．

【点睛】本题考查了圆的切线的性质，矩形的性质，平行线的性质，勾股定理的应用以及三角形相似的判定与性质，判断出点 P 处于什么位置时面积最大是解题关键．

三、解答题

17．如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， CH 为 $\odot O$ 上的两点， C 为 $\widehat{BH}$ 的中点， $AD \perp DE$ 于 D ．



(1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $EF \perp AE$ ， $EF=6$ ， $BE=4$ ，求 AD 的长．

【答案】(1) 见解析

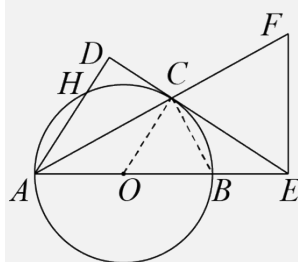
$$(2) AD = \frac{45}{13}$$

【分析】(1) 连接 OC ，利用弧与圆周角的关系可得 $\angle HAC = \angle BAC$ ，从而结合等腰三角形的性质和平行

(2) 通过证明 $\triangle CBE \sim \triangle ACE$, $\triangle EOC \sim \triangle EAD$, 然后利用相似三角形的性质分析求解.

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$
$$\therefore CH = BC,$$
$$\because OA = OC,$$
$$\therefore \angle HAC = \angle OCA,$$
$$\therefore \angle OCE = \angle ADE = 90^\circ, \text{ 即: } OC \perp DE,$$

(2) 解: 连接 BC ,

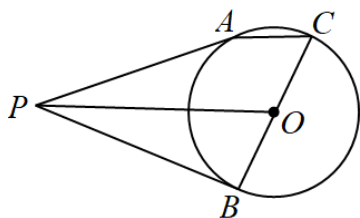

$$\therefore \angle DAC + \angle DCA = \angle EAF + \angle F = 90^\circ,$$
$$\therefore EF = EC = 6,$$

$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\begin{aligned}
&\because \angle BCE + \angle OCB = 90^\circ, \\
&\because AB \text{ 为 } \odot O \text{ 的直径}, \\
&\because \angle CAE + \angle CBA = 90^\circ, \\
&\text{又 } \because OB = OC, \\
&\therefore \angle OCB = \angle CBA, \\
&\therefore \angle BCE = \angle CAE, \quad \angle AEC = \angle AEC \\
&\therefore \triangle CBE \sim \triangle ACE, \\
&\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{BE}{CE}, \quad \text{即 } \frac{6}{AE} = \frac{4}{6}, \\
&\therefore AE = 9, \\
&\therefore AB = AE - BE = 5, \quad OC = OB = \frac{5}{2}, \\
&\therefore OE = OB + BE = \frac{13}{2}, \\
&\because OC \parallel AD, \\
&\therefore \triangle EOC \sim \triangle EAD, \\
&\therefore \frac{OC}{AD} = \frac{OE}{AE}, \quad \text{即 } \frac{\frac{5}{2}}{AD} = \frac{\frac{13}{2}}{9}, \\
&\therefore AD = \frac{45}{13}.
\end{aligned}$$

【点睛】本题考查切线的判定和性质，相似三角形的判定和性质，掌握相关性质定理，准确添加辅助线是解题关键

18. 如图， BC 是 $\odot O$ 的直径， PB 是 $\odot O$ 的切线，切点为 B ，连接 PO ，过点 C 作 $AC \parallel PO$ 交 $\odot O$ 于点 A ，连接 PA 。



- (1) 求证： AP 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若 $\cos \angle APO = \frac{4}{5}$ ， $\odot O$ 的半径为 3，求 AC 的长。

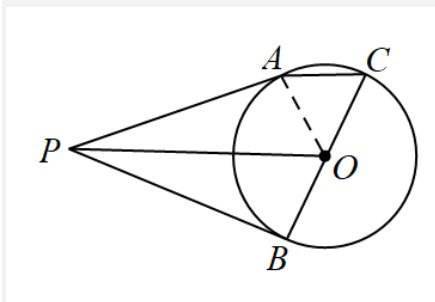
【答案】(1) 见解析

(2) AC 的长为 $\frac{18}{5}$

【分析】(1) 连接 OA ，证明 $\triangle POB \cong \triangle POA$ ，可得 $\angle OAP = \angle OBP$ ，由 PB 是 $\odot O$ 的切线，可得 $\angle OBP = 90^\circ$ ，进而可证结论成立；

(2) 连接 AB 交 OP 于点 D ，可证 OP 垂直平分 AB ，设 $AP = 4x$ ， $OP = 5x$ ，利用勾股定理求出 x 的值，由圆周角定理可知 $\angle BAC = 90^\circ$ ，再利用勾股定理可求出 AC 的长．

【详解】(1) 连接 OA ．



$\because OA = OC$ ，

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$ ．

$\because AC \parallel PO$ ，

$\therefore \angle POB = \angle OCA, \angle POA = \angle OAC$ ，

$\therefore \angle POB = \angle POA$ ，

$\because OP = OP$ ，

$\therefore \triangle POB \cong \triangle POA (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle OAP = \angle OBP$ ．

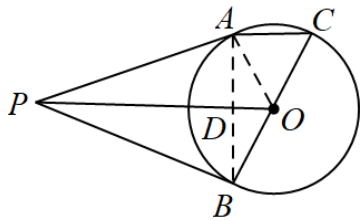
$\because PB$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle OBP = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OAP = 90^\circ$ ，

$\therefore AP$ 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 连接 AB 交 OP 于点 D ．



$\because \odot O$ 的半径为 3,

$\therefore OA = 3, BC = 6$.

$\because \triangle POB \cong \triangle POA$,

$\therefore PA = PB$,

$\because OA = OB$,

$\therefore OP$ 垂直平分 AB ,

$\because \cos \angle APO = \frac{4}{5}$,

$\therefore$ 设 $AP = 4x, OP = 5x$,

$\because OA^2 + PA^2 = OP^2$,

$\therefore 3^2 + (4x)^2 = (5x)^2$,

解得 $x = 1$,

$\therefore PA = 4, OP = 5$,

$\because \frac{1}{2} OP \cdot AD = \frac{1}{2} AP \cdot OA$,

$\therefore 5AD = 12$,

$\therefore AD = \frac{12}{5}$,

$\therefore AB = 2AD = \frac{24}{5}$.

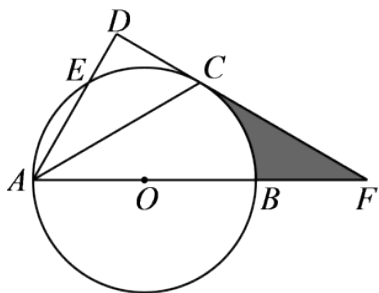
$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \frac{18}{5}$.

【点睛】 本题考查了切线的判定与性质，全等三角形的判定与性质，线段垂直平分线的性质，勾股定理，以及锐角三角函数的知识，正确作出辅助线是解答本题的关键．

19 . 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C, E 在 $\odot O$ 上， AC 平分 $\angle EAB$ ， $CD \perp AE$ ，垂足为 D ， DC ， AB 的延长线交于点 F .



(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $DE = 1, AE = 2$, 求图中阴影部分的面积.

【答案】(1) 见解析

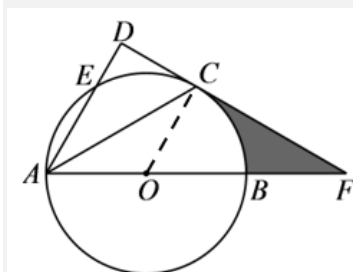
$$(2) 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

【分析】(1) 连接 OC , 根据角平分线的意义和等边对等角得出 $\angle EAC = \angle OCA$, 继而根据平行线的判定与性质求出 $\angle D = \angle OCF$, 根据切线的判定证明即可;

(2) 作 $OP \perp AE$ 于点 P , 利用特殊角的三角函数值求出 $\angle PAO = 60^\circ$, 进而求出 CF , 最后根据

$$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle FOC} - S_{\text{扇形}OBC} \text{ 求解即可.}$$

【详解】(1) 证明: 如图, 连接 OC .



$$\because AC \text{ 平分 } \angle EAB,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle OAC.$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle OCA,$$

$$\therefore AD \parallel OC,$$

$$\therefore \angle D = \angle OCF.$$

$$\because CD \perp AE.$$

$$\therefore \angle OCF = \angle D = 90^\circ.$$

$$\therefore OC \perp DF.$$

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线;

$$\therefore \cos \angle PAO = \frac{PA}{OA} = \frac{1}{2},$$
$$\therefore CF = OC \cdot \tan \angle COF = 2 \times \tan 60^\circ = 2\sqrt{3},$$

【点睛】 本题考查了角平分线的意义和等边对等角，平行线的判定与性质，切线的判定，解直角三角形等知识．连接常用的辅助线是解题关键．

(2) 连接 BG ，与 OF 交于点 M ，若 $BE=1$ ， $OE=2$ ，求 $\frac{BM}{MG}$ 的值．

$$(2) \frac{5}{8}$$

【分析】(1) 连接 OB, OC . 根据切线的性质和切线长定理可知 $BE = BF, \angle OEB = \angle OFB = 90^\circ$, $CF = CG, \angle OFC = \angle OGC = 90^\circ$, 即易证 $\triangle OEB \cong \triangle OFB$ (HL), $\triangle OFC \cong \triangle OGC$ (HL), 得出

$\angle OBE = \angle OBF = \frac{1}{2} \angle EBF$, $\angle BOE = \angle BOF = \frac{1}{2} \angle EOF$, $\angle COG = \angle COF = \frac{1}{2} \angle GOF$, 从而可求出

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$. 再根据 $\angle EBF = 2\angle OPC$, 即可证明 $\angle OBF = \angle OPC$, 说明 O, B, P, C 四点共圆, 由圆内接四边形的性质可知 $\angle BOC + \angle BPC = 180^\circ$, 即可求出 $\angle BPC = 90^\circ$, 易证 $EG \parallel CP$, 得出

$\angle EOF = \angle OPC$, 从而可求出 $\angle EOF = \angle OPC = 60^\circ$, 进而可求出 $\angle BOE = \frac{1}{2} \angle EOF = 30^\circ$,

$\angle GOF = 120^\circ$, 由含 30° 度角的直角三角形的性质和勾股定理可求出 $BO = 2BE = 2$, $OE = \sqrt{3}$. 由扇形的

面积公式可求出 $S_{\text{扇形}GOF} = \pi$. 又易求出 $OC = 2OF = 2\sqrt{3}$, $CF = 3$, 从而可求出

$S_{\text{四边形}CGOF} = 2S_{\triangle COF} = 3\sqrt{3}$, 最后由 $S_{\text{阴}} = S_{\text{四边形}CGOF} - S_{\text{扇形}GOF}$ 求解即可;

(2) 连接 OB, OC , 过点 B 作 $BH \perp CD$ 于点 H , 交 OF 于点 P . 由 (1) 可知 $BE = BF = 1$,

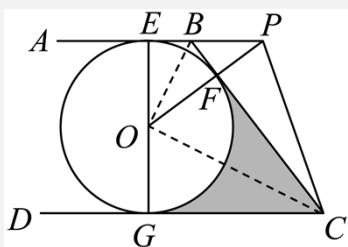
$CF = CG$. 设 $CF = CG = x$, 则 $BC = CF + BF = x + 1$, 由所作辅助线结合题意可知四边形 $BEGH$ 为矩

形, 即得出 $BH = EG = 2OE = 4$, $GH = BE = 1$, 从而可求出 $CH = x - 1$. 再根据勾股定理可列出关于 x 的

等式, 解出 x 的值, 即得出 $CF = CG = 4$, $CH = 3$, $BC = 5$. 易证 $\triangle PBF \sim \triangle CBH$, 得出 $\frac{BP}{BC} = \frac{BF}{BH}$, 代入

数据即可求出 $BP = \frac{5}{4}$. 又易证 $\triangle OMG \sim \triangle PMB$, 即得出 $\frac{BM}{MG} = \frac{BP}{OG} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8}$.

【详解】(1) 解: 如图, 连接 OB, OC .



$\because AB, BC, CD$ 分别与 $\odot O$ 相切于 E, F, G 三点,

$\therefore BE = BF, \angle OEB = \angle OFB = 90^\circ, CF = CG, \angle OFC = \angle OGC = 90^\circ$,

又 $\because OB = OB, OC = OC$,

$\therefore \triangle OEB \cong \triangle OFB$ (HL), $\triangle OFC \cong \triangle OGC$ (HL),

$\therefore \angle OBE = \angle OBF = \frac{1}{2} \angle EBF, \angle BOE = \angle BOF = \frac{1}{2} \angle EOF, \angle COG = \angle COF = \frac{1}{2} \angle GOF$,

$\therefore \angle BOC = \angle BOF + \angle COF = \frac{1}{2} \angle EOF + \frac{1}{2} \angle GOF = \frac{1}{2} (\angle EOF + \angle GOF) = 90^\circ$.

$\because \angle EBF = 2\angle OPC$,

$$\therefore \angle OBF = \angle OPC,$$

$\therefore O、B、P、C$ 四点共圆,

$$\therefore \angle BOC + \angle BPC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = 90^\circ, \text{ 即 } CP \perp AP,$$

$$\therefore EG \parallel CP,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle OPC.$$

$$\therefore \angle EOF + \angle EBF = 180^\circ,$$

$$\therefore 3\angle EOF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle OPC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \frac{1}{2}\angle EOF = 30^\circ, \quad \angle GOF = 120^\circ$$

$$\therefore BO = 2BE = 2,$$

$$\therefore OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\text{扇形}GOF} = \frac{120\pi \times (\sqrt{3})^2}{360} = \pi.$$

$$\therefore \angle BOF + \angle COF = 90^\circ, \quad \angle OCF + \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF = \angle OCF = 30^\circ,$$

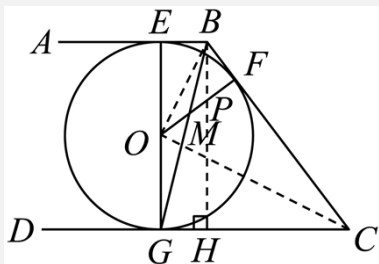
$$\therefore OC = 2OF = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CF = \sqrt{OC^2 - OF^2} = 3,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CGOF} = 2S_{\triangle COF} = 2 \times \frac{1}{2} OF \cdot CF = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\text{四边形}CGOF} - S_{\text{扇形}GOF} = 3\sqrt{3} - \pi;$$

(2) 如图, 连接 OB, OC , 过点 B 作 $BH \perp CD$ 于点 H , 交 OF 于点 P .



$\therefore AB, BC, CD$ 分别与 $\odot O$ 相切于 E, F, G 三点,

$$\therefore BE = BF = 1, \quad CF = CG.$$

设 $CF = CG = x$ ，则 $BC = CF + BF = x + 1$

由所作辅助线结合题意可知四边形 $BEGH$ 为矩形，

$$\therefore BH = EG = 2OE = 4, \quad GH = BE = 1,$$

$$\therefore CH = CG - GH = x - 1.$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle BCH \text{ 中, } BH^2 + CH^2 = BC^2,$$

$$\therefore 4^2 + (x-1)^2 = (x+1)^2,$$

解得： $x = 4$ ，

$$\therefore CF = CG = 4, \quad CH = 3, \quad BC = 5.$$

$$\because \angle PFB = \angle CHB = 90^\circ, \quad \angle PBF = \angle CBH,$$

$$\therefore \triangle PBF \sim \triangle CBH,$$

$$\therefore \frac{BP}{BC} = \frac{BF}{BH}, \quad \text{即 } \frac{BP}{5} = \frac{1}{4},$$

$$\text{解得: } BP = \frac{5}{4}.$$

$$\because OG \parallel BP,$$

$$\therefore \angle OGM = \angle PBM.$$

$$\text{又 } \because \angle OMG = \angle PMB,$$

$$\therefore \triangle OMG \sim \triangle PMB,$$

$$\therefore \frac{BM}{MG} = \frac{BP}{OG} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8}.$$

【点睛】本题为圆的综合题．考查切线的性质，切线长定理，三角形全等的判定和性质，圆周角定理，圆内接四边形的性质，含 30 度角的直角三角形的性质，勾股定理，扇形的面积公式，矩形的判定和性质，三角形相似的判定和性质等知识．在解圆的相关题型中，连接常用的辅助线是解题关键．

过关检测详细解析

一．选择题

1．如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，若 $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\odot O$ 半径为 2，则劣弧 $\widehat{BC}$ 的长为()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/058030137057006102>