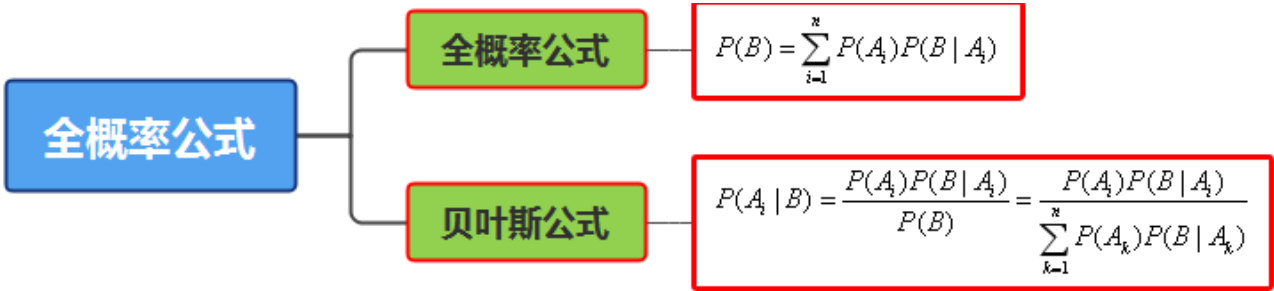


第 02 讲 7.1.2 全概率公式

01 学习目标

课程标准	学习目标
1.结合古典概型，了解利用概率的加法公式与乘法公式推导出全概率公式的过程，为解决一类概率问题奠定基础。 2.理解全概率公式，并能利用全概率公式进行相关的概率计算。 3.了解贝叶斯公式，并能利用贝叶斯公式进行简单的计算。	通过本节课的学习，要求会利用全概率公式求解事件概率，会利用贝叶斯公式进行简单的计算，解决简单的应用问题。

02 思维导图



03 知识清单

知识点 01：全概率公式

(1) 一般地, 设 $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4 \dots n$, 则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$, 有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$, 我们称此公式为全概率公式.

(2) 全概率公式的理解
全概率公式的直观意义: 某事件 B 的发生有各种可能的原因 A_i ($i = 1, 2, 3, 4 \dots n$), 并且这些原因两两互斥不能同时发生, 如果事件 B 是由原因 A_i 所引起的, 且事件 A_i 发生时, BA_i 必同时发生, 则 $P(B)$ 与 $P(BA_i)$ 有关, 且等于其总和 $\sum_{i=1}^n P(BA_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$.

“全概率”的“全”就是总和的含义, 若要求这个总和, 需已知概率 $P(BA_i)$, 或已知各原因 A_i

发生的概率 $P(A_i)$ 及在 A_i 发生的条件下 B 发生的概率 $P(B|A_i)$. 通俗地说, 事件 B 发生的可能性, 就是其原因 A_i 发生的可能性与已知在 A_i 发生的条件下事件 B 发生的可能性的乘积之和.

【即学即练 1】 (2425 高三上·山东·阶段练习) 一位教授去参加学术会议, 他选择自驾、乘坐动车和飞机的概率分别为 0.2, 0.5, 0.3, 现在知道他选择自驾、乘坐动车和飞机迟到的概率分别为 0.5, 0.2, 0.1, 则这位教授迟到的概率为 ()

- A. 0.8 B. 0.5 C. 0.23 D. 0.32

【答案】C

【知识点】 利用全概率公式求概率

【分析】 根据全概率公式来求得正确答案.

【详解】 依题意, 教授迟到的概率为 $0.2 \times 0.5 + 0.5 \times 0.2 + 0.3 \times 0.1 = 0.23$.

故选: C

知识点 02: 贝叶斯公式

(1) 设 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$,

则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$, $P(B) > 0$, 有
$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)},$$

$i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$.

【即学即练 2】 (2425 高三上·江苏扬州) 某工厂有 A, B 两个生产车间, 所生产的同一批产品合格率分别是 98% 和 99%, 已知某批产品的 60% 和 40% 分别是 A, B 两个车间生产, 质量跟踪小组从中随机抽取一件, 发现不合格, 则该产品是由 A 车间生产的概率为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

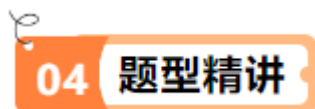
【知识点】 利用贝叶斯公式求概率

【分析】 根据贝叶斯公式求得正确答案.

【详解】 依题意, 该产品是由 A 车间生产的概率为:

$$\frac{0.6 \times (1 - 0.98)}{0.6 \times (1 - 0.98) + 0.4 \times (1 - 0.99)} = \frac{0.6 \times 0.02}{0.6 \times 0.02 + 0.4 \times 0.01} = \frac{3}{4}.$$

故选: A



题型 01 全概率公式的应用

【典例1】(多选)(2425 高三上·广西·期中)对于随机事件 A, B , 若 $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, 则 ()

A. $P(AB) = \frac{1}{10}$ B. $P(A|B) = \frac{1}{6}$ C. $P(A+B) = 1$ D. $P(\overline{AB}) = \frac{1}{2}$

【答案】ABD

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率

【分析】根据条件概率的计算公式, 可判断 AB 的真假, 根据和事件概率计算公式, 可判断 C 的真假, 结合全概率公式和条件概率计算公式, 可判断 D 的真假.

【详解】对于 A: 因为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, 故 A 正确;

对于 B: 由 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{6}$, 故 B 正确;

对于 C: 因为 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, 故 C 错误;

对于 D: 因为 $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot P(B|\overline{A})$,

所以 $P(B|\overline{A}) = \frac{5}{6}$.

所以 $P(\overline{AB}) = P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$. 故 D 正确.

故选: ABD

【典例2】(2425 高三上·广东深圳·阶段练习)为了回馈长期以来的顾客群体, 某健身房在五周年庆活动期间设计出了一种游戏活动, 顾客需投掷一枚骰子两次, 若两次投掷的数字都是偶数, 则该顾客获得该健身房的免费团操券 5 张, 且有 2 次终极抽奖机会 (2 次抽奖结果互不影响); 若两次投掷的数字之和是 5 或 9, 则该顾客获得该健身房的免费团操券 5 张, 且有 1 次终极抽奖机会; 其余情况顾客均获得该健身房的免费团操券 3 张, 不具有终极抽奖机会. 已知每次在终极抽奖活动中的奖品和对应的概率如下表所示.

奖品	一个健身背包	一盒蛋白粉
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

则一位参加游戏活动的顾客获得蛋白粉的概率为_____.

【答案】 $\frac{95}{576}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、利用全概率公式求概率

【分析】记事件 A_1 = “顾客有两次终极抽奖机会”，事件 A_2 = “顾客有一次终极抽奖机会”，事件 B = “获得蛋白粉”，求出 $P(A_1)$ ， $P(A_2)$ ，利用全概率公式即可求解.

【详解】记事件 A_1 = “顾客有两次终极抽奖机会”，
事件 A_2 = “顾客有一次终极抽奖机会”，事件 B = “获得蛋白粉”，

$$P(A_1) = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}, \quad P(B|A_1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}, \quad P(B|A_2) = \frac{1}{4},$$

两次投掷的数字之和是 5 的情况有：“1,4”，“4,1”，“2,3”，“3,2”，

两次投掷的数字之和是 9 的情况有：“6,3”，“3,6”，“4,5”，“5,4”，

所以 $P(A_2) = \frac{8}{6^2} = \frac{2}{9},$

$$\therefore P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{16} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{95}{576}.$$

故答案为： $\frac{95}{576}$.

【典例 3】（2425 高二上·四川眉山·期中）现有红、黄、绿三个不透明盒子，其中红色盒子内装有两个红球、一个黄球和一个绿球；黄色盒子内装有两个红球，两个绿球；绿色盒子内装有两个红球，两个黄球.小明第一次先从红色盒子内随机抽取一个球，将取出的球放入与球同色的盒子中；第二次从该放入球的盒子中随机抽取一个球.记抽到红球获得 1 块月饼、黄球获得 2 块月饼、绿球获得 3 块月饼，小明所获得月饼为两次抽球所获得月饼的总和，求下列事件发生的概率

(1)求第二次抽到红的概率

(2)如果第二次抽到红球，那么它来自黄色盒子的概率

(3)小明获得 4 块月饼的概率

【答案】(1) $\frac{9}{20}$

(2) $\frac{2}{9}$

(3) $\frac{11}{40}$

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率

【分析】记红球为 1 球，黄球为 2 球，绿球为 3 球，记事件 A_i, B_i 分别表示第一次、第二次取到 i 球， $i = 1, 2, 3$.

(1) 分别求出第一次摸出红、黄、绿球的概率，以及第二次从红、黄、绿盒子里摸出红球的条件概率，再由全概率公式得到第二次摸出红球的概率；

(2) 由条件概率和 (1) 中的结果计算得出答案；

(3) 列出所有可能得情况，分别求出发生的概率再求和.

【详解】(1) 记红球为 1 球，黄球为 2 球，绿球为 3 球，记事件 A_i, B_i 分别表示第一次、第二次取到 i

球, $i=1,2,3$,

则 $P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}$,

又由条件概率知 $P(B_1|A_1)=\frac{1}{2}$, $P(B_1|A_2)=\frac{2}{5}$, $P(B_1|A_3)=\frac{2}{5}$,

由全概率公式知 $P(B_1)=\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B_i|A_i)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\times 2=\frac{9}{20}$,

(2) 如果第二次抽到红球, 那么它来自黄色盒子的概率为 $P(A_2|B_1)=\frac{P(A_2B_1)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}}{\frac{9}{20}}=\frac{\frac{2}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{2}{9}$,

(3) 若小明获得 4 块月饼可能的情况有三种:

①第一次从红色盒子内抽到红球, 第二次从红盒子内抽到绿球, 其概率为 $P(A_1)P(B_3|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$,

②第一次从红色盒子内抽到绿球, 第二次从绿盒子内抽到红球, 其概率为 $P(A_3)P(B_1|A_3)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$,

③第一次从红色盒子内抽到黄球, 第二次从黄盒子内抽到黄球, 其概率为 $P(A_2)P(B_2|A_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$,

所以小明获得 4 块月饼的概率是 $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{11}{40}$.

【变式 1】(2425 高二上·辽宁沈阳·阶段练习) 某校团委开展知识竞赛活动. 现有两组题目放在 A, B 两个箱子中, A 箱中有 6 道选择题和 3 道论述题, B 箱中有 3 道选择题和 2 道论述题. 参赛选手先在任一箱子中随机选取一题, 作答完后再在此箱子中选取第二题作答, 答题结束后将这两个题目放回原箱子.

(1) 若同学甲从 B 箱中抽取了 2 题, 求第 2 题抽到论述题的概率;

(2) 若同学乙从 A 箱中抽取了 2 题, 答题结束后误将题目放回了 B 箱, 接着同学丙从 B 箱中抽取题目作答, 求丙取出的第一道题是选择题的概率.

【答案】(1) $\frac{2}{5}$

(2) $\frac{13}{21}$

【知识点】利用全概率公式求概率

【分析】(1) 设出事件后, 利用全概率公式求解即可得;

(2) 设出相应事件后, 借助组合数公式求出同学乙从 A 箱中取出不同题目的不同概率, 再利用全概率公式求解即可得.

【详解】(1) 设事件 A_i 表示“甲第 i 次从 B 箱中取到论述题”, $i=1,2$,

则 $P(A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2|\overline{A_1})=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$;

(2) 设事件 A 为“丙从 B 箱中取出的第一道题是选择题”，

事件 B_1 为“乙从 A 箱中取出 2 道选择题”，

事件 B_2 为“乙从 A 箱中取出 1 道选择题和 1 道论述题”，

事件 B_3 为“乙从 A 箱中取出 2 道论述题”，

$$\text{则 } P(B_1) = \frac{C_6^2}{C_9^2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}, \quad P(B_2) = \frac{C_6^1 \cdot C_3^1}{C_9^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(B_3) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$

$$\text{则 } P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)$$

$$= \frac{5}{12} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{12} \times \frac{3}{7} = \frac{25+24+3}{84} = \frac{13}{21},$$

即丙取出的第一道题是选择题的概率为 $\frac{13}{21}$.

【变式 2】(2425 高三上·广西南宁·阶段练习) 设有甲、乙两个不透明的箱子，每个箱子中装有除颜色外其他都相同的小球，其中甲箱有 4 个红球和 3 个白球，乙箱有 3 个红球和 2 个白球. 从甲箱中随机摸出 2 个球放入乙箱，再从乙箱中随机摸出 1 个球.

(1) 求从乙箱中摸出白球的概率；

(2) 若从乙箱中摸出白球，求从甲箱中摸出 2 个红球的概率.

【答案】(1) $\frac{20}{49}$ ；

(2) $\frac{1}{5}$.

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率、实际问题中的组合计数问题、独立事件的乘法公式

【分析】(1) 利用独立乘法公式、全概率公式求从乙箱中摸出白球的概率

(2) 应用条件概率的求法求从甲箱中摸出 2 个红球的概率.

【详解】(1) 由题意，从甲摸出 2 红球概率为 $P(A) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$ ，此时从乙摸出白球概率为 $\frac{2}{7}$ ，

从甲摸出 2 白球概率为 $P(B) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$ ，此时从乙摸出白球概率为 $\frac{4}{7}$ ，

从甲摸出红白球各一个的概率为 $P(C) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$ ，此时从乙摸出白球概率为 $\frac{3}{7}$ ，

所以从乙箱中摸出白球的概率为 $\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{20}{49}$.

(2) 由 (1) 知，从乙箱中摸出白球情况下，甲箱中摸出 2 个红球的概率为 $\frac{\frac{2}{7} \times \frac{2}{7}}{\frac{20}{49}} = \frac{1}{5}$.

【变式 3】(2425 高三上·湖南·期中) 某红茶批发地只经营甲、乙、丙三种品牌的红茶，且甲、乙、丙三种品牌的红茶优质率分别为 0.9, 0.8, 0.7.

(1)若该红茶批发地甲、乙、丙三种品牌的红茶市场占有率的比例为4:4:2, 小张到该批发地任意购买一盒红茶, 求他买到的红茶是优质品的概率;

(2)若小张到该批发地甲、乙、丙三种品牌店各任意买一盒红茶, 求他恰好买到两盒优质红茶的概率.

【答案】(1) 0.82

(2) 0.398

【知识点】独立事件的乘法公式、利用全概率公式求概率

【分析】(1) 设出对应事件, 利用全概率公式完成概率计算;

(2) 先分析目标事件所包含的事件, 然后利用概率乘法公式计算出结果.

【详解】(1) 设事件 A, B, C 分别表示小张买到的红茶品牌为甲品牌、乙品牌、丙品牌, 事件 D 表示他买到的红茶是优质品,

则依据已知可得 $P(A) = P(B) = \frac{4}{4+4+2} = 0.4, P(C) = 0.2, P(D|A) = 0.9, P(D|B) = 0.8, P(D|C) = 0.7,$

由全概率公式得

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = 0.9 \times 0.4 + 0.8 \times 0.4 + 0.7 \times 0.2 = 0.82,$$

所以他买到的红茶是优质品的概率为 0.82.

(2) 设事件 E 表示他恰好买到两盒优质红茶, 组成事件 E 的情况有:

甲乙优质红茶丙非优质红茶、甲丙优质红茶乙非优质红茶, 乙丙优质红茶甲非优质红茶, 且优质与否互相独立,

则 $P(E) = 0.9 \times 0.8 \times (1 - 0.7) + 0.9 \times (1 - 0.8) \times 0.7 + (1 - 0.9) \times 0.8 \times 0.7 = 0.216 + 0.126 + 0.056 = 0.398,$

所以他恰好买到两盒优质红茶的概率为 0.398.

题型 02 贝叶斯公式的应用

【典例 1】(2425 高三上·河北沧州·阶段练习) 中国是瓷器的故乡, 瓷器的发明是中华民族对世界文明的伟大贡献, 瓷器传承着中国文化, 有很高的欣赏和收藏价值. 现有一批同规格的瓷器, 由甲、乙、丙三家瓷厂生产, 其中甲、乙、丙瓷厂分别生产 300 件、300 件、400 件, 而且甲、乙、丙瓷厂的次品率依次为 4%、3%、3%. 现从这批瓷器中任取一件, 若取到的是次品, 则其来自甲厂的概率为_____. (结果保留两位小数)

【答案】0.36

【知识点】利用贝叶斯公式求概率、利用全概率公式求概率、计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】先由古典概率计算抽到各厂产品的概率, 再由全概率计算抽到次品的概率, 最后由条件概率计算即可;

【详解】设 B 表示事件: 取得次品. A_i 表示事件: 该产品由第 i 家工厂生产 ($i=1, 2, 3$). 第 i 家工厂 ($i=1, 2, 3$) 分别表示甲、乙、丙瓷厂.

$$P(A_1) = \frac{300}{300+300+400} = \frac{3}{10}, P(A_2) = \frac{300}{300+300+400} = \frac{3}{10}, P(A_3) = \frac{400}{300+300+400} = \frac{2}{5}.$$

$$P(B|A_1)=4\%, P(B|A_2)=3\%, P(B|A_3)=3\%,$$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{3}{10}\times 4\%+\frac{3}{10}\times 3\%+\frac{2}{5}\times 3\%=0.033.$$

故取到的是次品，则其来自甲厂的概率为 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}\times 4\%}{0.033}\approx 0.36.$

故答案为：0.36.

【典例 2】（2425 高二上·湖北十堰·阶段练习）假定某工厂甲、乙、丙 3 个车间生产同一种螺钉，产量依次占全厂的 45%、35%、20%，如果各车间的次品率依次为 4%、2%、5%。现在从待出厂产品中检查出 1 个次品，则它是由甲车间生产的概率是_____。

【答案】 $\frac{18}{35}$

【知识点】 利用贝叶斯公式求概率、利用全概率公式求概率、计算条件概率

【分析】 先根据全概率公式求出 $P(A)$ ，再代入贝叶斯公式计算即可。

【详解】 设“从待出厂产品中取出 1 个是次品”为事件 A ，从待出厂产品中取出 1 个产品是甲、乙、丙车间生产的事件分别为事件 B_1, B_2, B_3 ，

$$\text{则 } P(B_1)=0.45, P(B_2)=0.35, P(B_3)=0.2, P(A|B_1)=0.04, P(A|B_2)=0.02, P(A|B_3)=0.05,$$

$$\text{由全概率公式得 } P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=0.45\times 0.04+0.35\times 0.02+0.2\times 0.05=0.035,$$

现在从待出厂产品中检查出 1 个次品，则它是由甲车间生产的概率是

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.45\times 0.04}{0.035}=\frac{18}{35}.$$

故答案为： $\frac{18}{35}.$

【典例 3】（2425 高三·上海·课堂例题）一纸箱中原来装有 10 件产品，其中一等品 5 件，二等品 3 件，三等品 2 件，若取走一件产品，但不知是几等品，然后从纸箱中任取 2 件产品，结果都是一等品，求取走的也是一等品的概率。

【答案】 $\frac{3}{8}$

【知识点】 利用贝叶斯公式求概率、利用全概率公式求概率、计算条件概率

【分析】 利用结合条件，利用全概率公式及贝叶斯公式计算得解。

【详解】 设事件 A_i 为“取走的是 i 等品”，其中 $i=1,2,3$ ，

依题意， $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$ ，且 A_1, A_2, A_3 彼此互斥，

$$\text{则有 } P(A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}, P(A_2)=\frac{3}{10}, P(A_3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},$$

设事件 B 为“取走一件产品后从纸箱中任取 2 件产品都是一等品”，

$$\text{则有 } P(B|A_1) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}, \quad P(B|A_2) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{5}{18}, \quad P(B|A_3) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{5}{18},$$

由全概率公式得 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{18} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{18} = \frac{2}{9},$$

$$\text{由贝叶斯公式得, } P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{3}{8},$$

所以取走的也是一等品的概率 $\frac{3}{8}$.

【变式 1】 (2425 高三上·广西南宁·阶段练习) 在秋冬季节, 疾病 D_1 的发病率为 2%, 病人中 40% 表现出症状 S , 疾病 D_2 的发病率为 5%, 病人中 18% 表现出症状 S , 疾病 D_3 的发病率为 0.5%, 病人中 60% 表现出症状 S . 则任意一位病人有症状 S 的概率为_____, 病人有症状 S 时患疾病 D_2 的概率为_____ (症状 S 只在患有疾病 D_1, D_2, D_3 时出现)

$$\text{【答案】} \quad 0.02 / \frac{1}{50} \quad 0.45 / \frac{9}{20}$$

【知识点】 利用全概率公式求概率、利用贝叶斯公式求概率

【分析】 根据全概率公式和贝叶斯公式计算可得结果.

【详解】 由题意可知: $P(D_1) = 0.02$, $P(D_2) = 0.05$, $P(D_3) = 0.005$,

$$P(S|D_1) = 0.4, \quad P(S|D_2) = 0.18, \quad P(S|D_3) = 0.6,$$

由全概率公式可知:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_2)P(D_2) + P(S|D_3)P(D_3) \\ &= 0.02 \times 0.4 + 0.05 \times 0.18 + 0.005 \times 0.6 = 0.02, \end{aligned}$$

即任意一位病人有症状 S 的概率为 0.02,

由贝叶斯公式可知:

$$P(D_2|S) = \frac{P(D_2)P(S|D_2)}{P(S)} = \frac{0.05 \times 0.18}{0.02} = 0.45,$$

即病人有症状 S 时患疾病 D_2 的概率为 0.45.

故答案为: 0.02, 0.45.

【变式 2】 (2425 高二下·全国·课后作业) 有一台用来检验产品质量的仪器, 已知一只次品经检验被认为是次品的概率为 0.99, 而一只正品经检验被认为是次品的概率为 0.005, 已知产品的次品率为 4%, 若一产品经检验被认为是次品, 则它确实为次品的概率约为_____ (精确到小数点后三位).

【答案】 0.892

【知识点】利用贝叶斯公式求概率、利用全概率公式求概率

【分析】设 A = “产品经检验被认为是次品”， B = “产品确实为次品”，求出 $P(B)$ ， $P(\bar{B})$ ， $P(A|B)$ ， $P(A|\bar{B})$ ，根据贝叶斯公式求 $P(B|A)$ 。

【详解】设 A = “产品经检验被认为是次品”， B = “产品确实为次品”，
由题意知， $P(B) = 0.04$ ， $P(\bar{B}) = 0.96$ ， $P(A|B) = 0.99$ ， $P(A|\bar{B}) = 0.005$ ，
由贝叶斯公式得，所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.99 \times 0.04}{0.99 \times 0.04 + 0.005 \times 0.96} \approx 0.892.$$

故答案为：0.892.

【变式 3】（2425 高二下·全国·课前预习）5 个袋子中放有白球和黑球，其中 1 号袋中白球占 $\frac{1}{3}$ ，另外 2, 3, 4, 5 号 4 个袋子中白球都占 $\frac{1}{4}$ ，从中随机取 1 个袋子，从所取的袋子中随机取 1 个球，结果是白球，求这个球来自 1 号袋中的概率。

【答案】 $\frac{1}{4}$

【知识点】利用贝叶斯公式求概率、利用全概率公式求概率

【分析】根据贝叶斯公式即可求解。

【详解】设 A_i = “取到第 i 号袋子”， $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ，
 B = “取到白球”，

根据题意得 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = \frac{1}{5}$ ，

$$P(B|A_1) = \frac{1}{3}, \quad P(B|A_2) = P(B|A_3) = P(B|A_4) = P(B|A_5) = \frac{1}{4},$$

由贝叶斯公式得，

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^5 P(A_i)P(B|A_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

所以这个球来自 1 号袋中的概率为 $\frac{1}{4}$ 。

题型 03 全概率公式和贝叶斯公式的综合应用

【典例 1】（2425 高二上·黑龙江哈尔滨·阶段练习）有一道数学题，不知道答案的概率为 0.6，如果知道答案则本题答对的概率为 0.9，不知道答案则本题答对的概率为 0.2，在答对本题的条件下，则不知道答案的概率为（ ）

A. 0.75 B. 0.52 C. 0.48 D. 0.25

【答案】D

【知识点】利用全概率公式求概率、计算条件概率

【分析】根据全概率公式和条件概率公式即可得出答案.

【详解】设事件 A：知道答案，事件 B：答对本题，

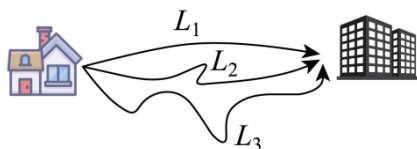
则 $P(\bar{A}) = 0.6$ ， $P(B|A) = 0.9$ ， $P(B|\bar{A}) = 0.2$

则 $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = 0.9 \times 0.4 + 0.2 \times 0.6 = 0.48$

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B|\bar{A})P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.6}{0.48} = 0.25$$

故选：D

【典例 2】（2024 高二·全国·专题练习）小张从家到公司上班总共有三条路可以直达，如图所示，但是每条路每天拥堵的可能性不太一样，由于路的长短不同，选择每条路的概率如下： $P(L_1) = 0.5$ ， $P(L_2) = 0.3$ ， $P(L_3) = 0.2$ ．每天上述三条路不拥堵的概率分别为： $P(C_1) = 0.2$ ， $P(C_2) = 0.4$ ， $P(C_3) = 0.7$ ．假设遇到拥堵会迟到，不拥堵便不会迟到．



(1) 小张从家到公司不迟到的概率是多少？

(2) 小张到达公司未迟到且选择第一条路的概率是多少？（结果保留三位小数）

【答案】(1) 0.36

(2) 0.279

【知识点】利用贝叶斯公式求概率、利用全概率公式求概率、计算条件概率

【分析】(1) 小张从家到公司不迟到会受到三条路的影响，因此这是一个全概率问题，根据全概率求解即可；

(2) 运用条件概率公式之后，再用概率的乘法公式计算即可．

【详解】(1) 设事件 C 为到公司不迟到（说明选择的路不拥堵），事件 L_i 为选择第 i 条路．

由全概率公式，得 $P(C) = \sum_{i=1}^3 P(L_i)P(C|L_i)$

$$= P(L_1) \times P(C|L_1) + P(L_2) \times P(C|L_2) + P(L_3) \times P(C|L_3)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/058040050034007040>