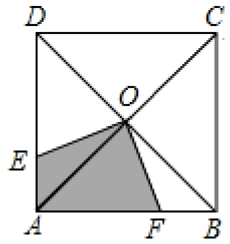
17 全等三角形等腰旋转模型

一、单选题

1．如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 2，对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E、F 分别在边 AD、AB 上，且 $OE\perp OF$，则四边形 $AFOE$ 的面积是（　　）



A．4　　B．2　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】C

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$OA=OB$，$\angle OAE=\angle OBF=45°$，$AC\perp BD$，

∴$\angle AOB=90°$，

∵$OE\perp OF$，

∴$\angle EOF=90°$，

∴$\angle AOE=\angle BOF$，

∴$\triangle AOE\cong\triangle BOF$（ASA），

∴$\triangle AOE$ 的面积＝$\triangle BOF$ 的面积，

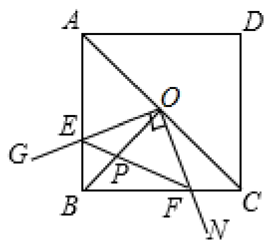
∴四边形 $AFOE$ 的面积＝$\frac{1}{4}$正方形 $ABCD$ 的面积＝$\frac{1}{4}\times 2^2=1$；

故选 C．

2．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 O 为对角线 AC 的中点，过点 O 作射线 OG、ON 分别交 AB、BC 于点 E、F，且 $\angle EOF=90°$，BO、EF 交于点 P．则下列结论中：

（1）图形中全等的三角形只有两对；（2）正方形 $ABCD$ 的面积等于四边形 $OEBF$ 面积的 4 倍；（3）$BE+BF=\sqrt{2}OA$；（4）$AE^2+CF^2=2OP\cdot OB$．

正确的结论有（　　）个．



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】C

【详解】解：（1）不正确；图形中全等的三角形有四对：$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，$\triangle AOB\cong\triangle COB$，$\triangle AOE\cong\triangle BOF$，$\triangle BOE\cong\triangle COF$；

理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=CD=DA$，$\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=\angle D=90^{\circ}$，$\angle BAO=\angle BCO=45^{\circ}$，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases}AB=AD\\BC=DC\\AC=AC\end{cases},$$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC(SSS)$；

$\because$ 点 O 为对角线 AC 的中点，

$\therefore OA=OC$，

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COB$ 中，

$$\begin{cases}OA=OC\\AB=CB\\OB=OB\end{cases},$$

$\therefore\triangle AOB\cong\triangle COB(SSS)$；

$\because AB=CB$，$OA=OC$，$\angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore$ $\angle AOB=90^{\circ}$，$\angle OBC=45^{\circ}$，

又 $\because\angle EOF=90^{\circ}$，

$\therefore\angle AOE=\angle BOF$，

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，

$$\begin{cases}\angle OAE=\angle OBF=45^{\circ}\\OA=OB\\\angle AOE=\angle BOF\end{cases},$$

$\therefore\triangle AOE\cong\triangle BOF(ASA)$；

同理：$\triangle BOE\cong\triangle COF$；

（2）正确．理由如下：

$\because\triangle AOE\cong\triangle BOF$，

$\therefore$ 四边形 $OEBF$ 的面积 $=\triangle ABO$ 的面积 $=\dfrac{1}{4}$ 正方形 $ABCD$ 的面积；

（3）正确．理由如下：

$\because\Delta BOE\cong\Delta COF$，

$\therefore BE=CF$，

$\therefore BE+BF=CF+BF=BC=AB=\sqrt{2}OA$；

（4）正确.

$AE^2+CF^2=BE^2+BF^2=EF^2=（\sqrt{2}OF）^2=2OF^2$,

在△OPF与△OFB中，

$\angle OBF=\angle OFP=45°$ ，

$\angle POF=\angle FOB$,

∴△OPF∽△OFB,

OP：$OF=OF$：OB,

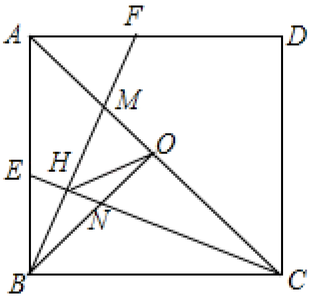
$OF^2=OP\cdot OB$,

$AE^2+CF^2=2OP\cdot OB$.

正确结论的个数有3个；

故选：C.

3．如图，正方形$ABCD$中，E，F分别为AB，AD上的点，$AF=BE$，CE，BF交于点H，BF交AC于点M，O为AC的中点，OB交CE于点N，连接OH．下列结论：①$BF\perp CE$；②$BM=CN$；③$\angle FHO=45°$；④$CH-BH=\sqrt{2}OH$，正确的个数是（　　）



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】D

【详解】解：$\because AF=BE$，$AB=BC$，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle BEC(SAS)$，

$\therefore \angle BCE=\angle ABF$，

又∵$\angle ABC=\angle ABH+\angle HBC=90°$，

∴$\angle HBC+\angle HCB=90°$，

即$BF\perp EC$，故结论①正确；

$\because$四边形是正方形，

$\therefore BO\perp AC$，$BO=OC$，

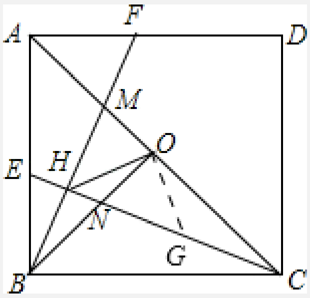
由题意正方形中$\angle ABO=\angle BCO$，在上面所证$\angle BCE=\angle ABF$，

$\therefore \angle ECO=\angle FBO$，

$\therefore \triangle OBM\cong\triangle ONC$（AAS），

$\therefore BM=CN$，即结论②正确；

过O点作OG垂直于OH，OG交CH与G点，



$\because \angle HON + \angle NOG = \angle NOG + \angle GOC$，

$\therefore \angle HON = \angle GOC$，

在$\triangle OGC$与$\triangle OHB$中，

$$\begin{cases} \angle OCN = \angle OBH \\ OC = OB \\ \angle HON = \angle GOC \end{cases},$$

故$\triangle OGC \cong \triangle OHB$（$ASA$），

$\therefore OH=OG$，

$\because OH \perp OG$，

$\therefore \angle OHG=45°$，

$\therefore \angle FHO = \angle FHC - \angle OHC = 90° - 45° = 45°$，故结论③正确；

$\because \triangle OGC \cong \triangle OHB$，

$\therefore BH = CG$，

$\therefore CH - BH = CH - CG = HG$，

$\because \angle HOG = 90°$，$OH=OG$，

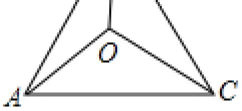
$\therefore CH - BH=HG = \sqrt{2}OH$，故结论④正确；

综上所述，①②③④正确．

故选：D．

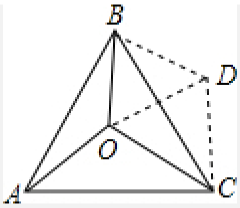
二、填空题

4．如图，等边$\triangle ABC$中，$\angle AOB = 115°, \angle BOC = 125°$，则以线段$OA, OB, OC$为边构成的三角形的各角的度数分别为____________________．



【答案】$55°$，$60°$，$65°$．

【详解】解：将$\triangle AOB$逆时针旋转$60°$，得到$\triangle CDB$，



∵ $\triangle AOB \cong \triangle CDB$， $\triangle ABC$ 是等边三角形，且旋转角相等，则 $OB=DB$， $\angle OBD=60°$

∴ $\triangle BOD$ 是等边三角形． 则 $OB=DB=OD$

又∵ $\triangle AOB \cong \triangle CDB$ ∴ $\angle AOB=\angle CDB=115°$ $OA=DC$

故以线段 OA,OB,OC 三边构成的三角形为 $\triangle OCD$

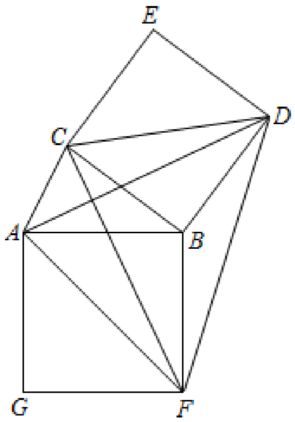
所以 $\angle ODC=\angle CDB-\angle ODB=115°-60°=55°$

$\angle COD=\angle BOC-\angle BOD=125°-60°=65°$

$\angle OCD=180°-\angle ODC-COD=180°-65°-55°=60°$

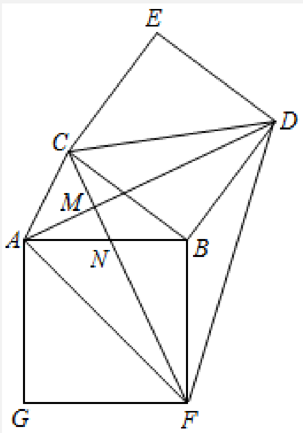
故答案为：$55°,60°,65°$ ．

5．如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别以 AB 、 BC 为边向外作正方形 $ABFG$ 、 $BCED$ ，连接 AD 、 CF 、 CD 、 AF ，若 $AD=6$ ，则四边形 $AFDC$ 的面积＝__________．



【答案】18

【详解】解：连接 FD，设 CF 与 AD 交于点 M，CF 与 AB 交于点 N，如图：



∵四边形 $ABFG$、$BCED$ 是正方形，

∴$AB=FB$，$CB=DB$，$\angle ABF=\angle CBD=90°$，

∴$\angle ABF+\angle ABC=\angle CBD+\angle ABC$，

即$\angle ABD=\angle CBF$，

在△ABD和△FBC中，

$$\begin{cases} AB=FB \\ \angle ABD=\angle CBF \\ DB=CB \end{cases},$$

∴△ABD≌△FBC（SAS）；

∴$AD=FC$，$\angle BAD=\angle BFC$，

∴$\angle AMF=180°-\angle BAD-\angle CNA=180°-(\angle BFC+\angle BNF)=180°-90°=90°$，

∴$AD\perp CF$，

∵$AD=6$，

∴$FC=AD=6$，

∴四边形$ACDF$的面积$=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ADF}$

$=\frac{1}{2}\times AD\times CM+\frac{1}{2}\times AD\times FM$

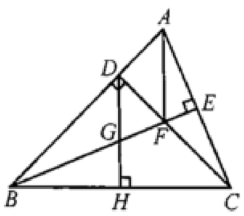
$=\frac{1}{2}\times AD\times CF$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 6$

$=18$.

故答案为：18.

6．如图所示，在$\triangle ABC$中，$DB=DC$，$CD\perp AB$于点D，BE平分$\angle ABC$，且$BE\perp AC$于点E与CD相交于点F，$DH\perp BC$于点H，交BE于点G，下列结论：①$AD+CF=BD$；②$GD=FD$；③$CE=\frac{1}{2}BF$④$DH\parallel AF$；其中正确的是___________.



【答案】①②③④

【详解】∵$CD\perp AB$于点D，$BE\perp AC$于点E，

∴∠BDF=∠BDA=90°，∠BAC+∠ABF=∠DAC+∠ACD=90°，

∴∠ABF=∠ACD，

在△ADC和△FDB中

$\begin{cases}\angle BDF=\angle BDA \\ \angle ABF=\angle ACD \\ BD=CD\end{cases}$，

∴△ADC≌△FDB（AAS），

∴AD=DF，∠DAC=∠DFB，

又∵DF+CF=CD，CD=BD，

∴ $AD+CF=BD$，故①正确；

∵AD=DF，$CD\perp AB$ 于点 D，

∴∠DAF=∠DFA=$\frac{1}{2}\times 90°=45°$，

∵BD=DC，$CD\perp AB$ 于点 D，$DH\perp BC$ 于点 H，

∴∠HDC=∠HDB=45°，

又∵∠DFA＝45°，

∴∠DFA=∠HDC，

∴ $DH\parallel AF$，故④正确；

∵BE 平分 $\angle ABC$，且 $BE\perp AC$ 于点 E，

∴∠ABE=∠CBE,∠AEB=∠CEB，

在△ABE 和△CBE 中

$\begin{cases}\angle ABE=\angle CBE \\ BE=BE \\ \angle AEB=\angle CEB\end{cases}$，

∴△ABE≌△CBE，

∴AE=CE，

∴CE=$\frac{1}{2}$AC，

又∵△ADC≌△FDB，

∴BF=AC，

∴ $CE=\frac{1}{2}BF$，故③正确；

∵ $DB=DC$，$CD\perp AB$ 于点 D，

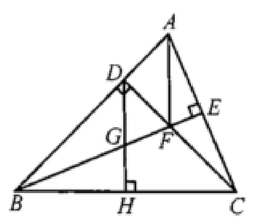
∴∠DBC=45°，

又∵BE 平分 $\angle ABC$，

∴∠DBE=$\frac{1}{2}\times 45°=22.5°$，

∴∠DFB=$90°-22.5°=67.5°$，

又∵∠HDB=45°，



∴∠DGF=∠DBG+∠BDG=22.5°+45°=67.5°，

∴∠DFB=∠DGF，

∴DG＝DF，故②正确．

故答案为：①②③④．

三、解答题

7．在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，点D为直线BC上的一个动点（不与点B，C重合），以AD为一边在AD的右侧作$\triangle ADE$，使$AD=AE$，$\angle DAE=\angle BAC$，连CE．

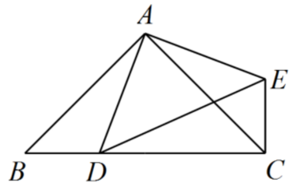


图1

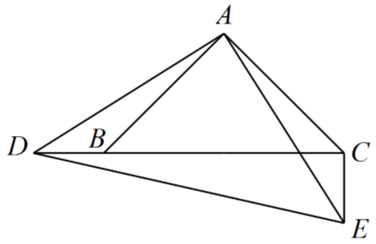


图2

（1）如图1，当点D在线段BC上时，

①BC与CE的位置关系是______；

②线段BC、CD、CE之间的数量关系是______．

（2）如图2，当点D在线段CB的延长线上时，（1）中的两个结论还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请写出正确的结论再给出证明．

【答案】(1）①垂直；②$BC=CD+CE$；（2）位置关系：垂直，数量关系：$CD=BC+CE$，证明见解析；

【详解】解：（1）∵$AB=AC$，$\angle BAC=90°$

∴$\angle ABC=\angle ACB=45°$

∵$\angle DAE=\angle BAC$

∴$\angle BAD=\angle CAE$

又∵$AB=AC$，$AD=AE$

∴$\triangle ABD\cong\triangle ACE(SAS)$

∴$\angle ABC=\angle ACE=45°$，$BD=CE$

①∴$\angle BCE=\angle ACB+\angle ACE=90°$，∴$CE\perp BC$

②∴$BC=CD+BD=CD+CE$

（2）位置关系：垂直，数量关系：$CD=BC+CE$，证明如下：

∵$AB=AC$，$\angle BAC=90°$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45°$

$\therefore \angle ABD = 135°$

$\because \angle DAE = \angle BAC$

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$

又$\because AB = AC$， $AD = AE$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE(SAS)$

$\therefore \angle ACE = \angle ABD = 135°$， $BD = CE$

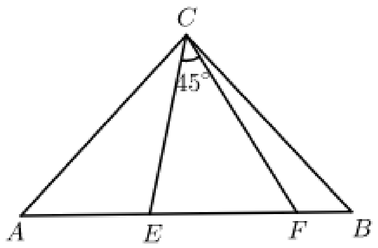
$\therefore \angle BCD = \angle ACE - \angle ACD = 90°$

$\therefore BC \perp CE$

又$\because CD = BC + BD$

$\therefore CD = BC + CE$

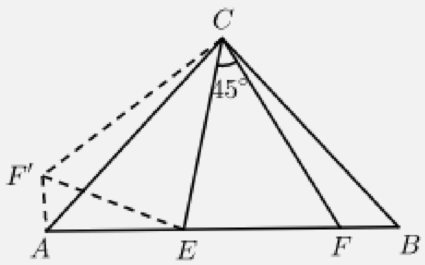
8．如图所示，等腰直角△*ABC*中，∠*ACB*＝90°，*E*、*F*为*AB*上两点（*E*左*F*右），且∠*ECF*＝45°，求证：$AE^2 + BF^2 = EF^2$．



【答案】见解析

【详解】解：$AE^2 + BF^2 = EF^2$，理由如下：

如图，将△*BCF*绕点*C*旋转得△*ACF'*，使△*BCF*的*BC*与*AC*边重合，



即△*ACF'* ≌△*BCF*,

∵在△*ABC*中，∠*ACB*＝90°，*AC*＝*BC*,

∴∠*CAF'* ＝∠*B*＝45°，

∴∠*EAF'* ＝90°，

∵∠*ECF*＝45°，

∴∠*ACE*＋∠*BCF*＝45°，

∵∠*ACF'* ＝∠*BCF*,

∴$\angle ECF'=45°$，

在$\triangle ECF$和$\triangle ECF'$中

$$\begin{cases}CE=CE\\ \angle ECF'=\angle ECF=45°\\ CF=CF'\end{cases}$$

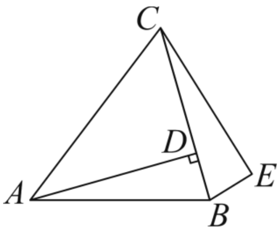
∴$\triangle ECF\cong\triangle ECF'$（$SAS$），

∴$EF=EF'$，

在$Rt\triangle AEF'$中，$AE^2+F'A^2=F'E^2$，

∴$AE^2+BF^2=EF^2$．

9．如图，等腰三角形ABC中，$BA=BC$，$\angle ABC=\alpha$．作$AD\perp BC$于点D，将线段BD绕着点B顺时针旋转角α后得到线段BE，连接CE．



（1）求证：$BE\perp CE$；

（2）延长线段AD，交线段CE于点F．求$\angle CFA$的度数（用含有α的式子表示）．

【答案】（1）见解析；（2）$\angle CFA=\alpha$

【详解】证明：Q 线段BD绕点B顺时针旋转角α得到线段BE，

$\therefore BD=BE,\angle DBE=\alpha.$

Q $\angle ABC=\alpha$，$\therefore\angle ABC=\angle DBE$．

Q $AD\perp BC$，

$\therefore\angle ADB=90°$．

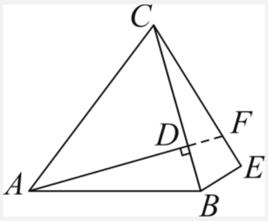
在ΔABD与ΔCBE中，

$$\begin{cases}AB=CB,\\ \angle ABD=\angle CBE,\\ BD=BE,\end{cases}$$

$\therefore\Delta ADB\cong\Delta CEB$

$\therefore\angle ADB=\angle CEB=90°.$

$\therefore BE\perp CE$．



（2）解：Q $\Delta ADB \cong \Delta CEB$ ，

$\therefore \angle DAB = \angle ECB$，

又Q $\angle ADB = \angle CDF$，

$\therefore \angle CFA = \angle CBA = \alpha$，

10．如图，在直角VABC中，$\angle BAC = 90°$，点 D 是BC上一点，连接AD，把AD绕点 A 逆时针旋转 90°，得到AE，连接DE交AC于点 M.

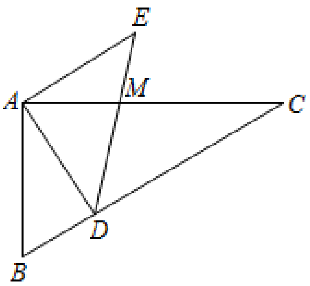


图1

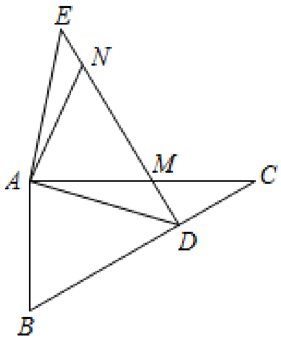


图2

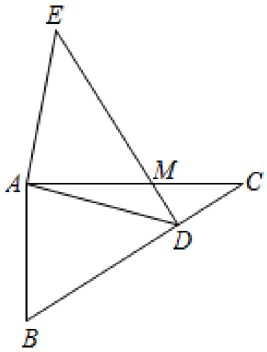


图3

（1）如图 1，若 $AB = 2, \angle C = 30°, AD \perp BC$，求$CD$的长；

（2）如图 2，若$\angle ADB = 45°$，点 N 为ME上一点，$MN = \frac{1}{2}BC$，求证：$AN = EN + CD$；

（3）如图 3，若$\angle C = 30°$，点 D 为直线BC上一动点，直线DE与直线AC交于点 M，当$\triangle ADM$为等腰三角形时，请直接写出此时$\angle CDM$的度数.

【答案】（1）3；（2）见解析；（3）$60°$或$15°$或$37.5°$

【详解】解：（1）∵ $\angle BAC = 90°$，$AB = 2, \angle C = 30°$，

∴BC=2AB=4，$\angle B$=60°，

∵ $AD \perp BC$

∴ $\angle ADB = 90°, \angle BAD = 30°$，

∴BD=$\frac{1}{2}$AB=1，

∴ CD=BC-BD=4-1=3；

（2）证明：如图 2，在 BD 上截取 DF=EN，

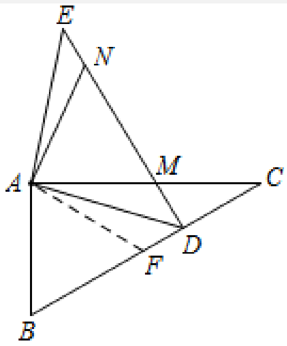


图2

∵把AD绕点A逆时针旋转90°，得到AE，

∴AD=AE，$\angle EAD=90^\circ$，$\angle EDA=\angle AED=45^\circ$，

∵$\angle ADB=45^\circ$，

∴$\angle ADF=\angle AEN=45^\circ$，

∴$\triangle AEN\cong\triangle ADF$，

∴AN=AF，$\angle EAN=\angle DAF,\angle ANE=\angle AFD$，

∵$\angle EAD=90^\circ$，$\angle EAN=\angle DAF$，

∴$\angle NAF=90^\circ$，

∵$\angle BAC=90^\circ$，$\angle ANE=\angle AFD$，

∴$\angle MAN=\angle BAF,\angle ANM=\angle AFB$，

∵AN=AF，

∴$\triangle AMN\cong\triangle ABF$，

∴$BF=MN=\frac{1}{2}BC$，即F是BC的中点，

∴AF=FC=DF+CD=EN+CD，

∵AN=AF，

∴$AN=EN+CD$；

（3）解：由题意可得AD=AE，$\angle EAD=90^\circ$，

∴$\angle EDA=\angle AED=45^\circ$，

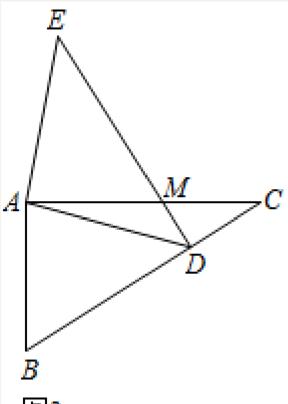


图3

分三种情况：

①AM=MD时，

∵AM=MD，

∴$\angle EDA=\angle MAD=45^\circ$，

∴$\angle AMD=90^\circ$，

∵$\angle C=30^\circ$，

∴$\angle CDM=\angle AMD-\angle C=60^\circ$；

②AM=AD 时，

∵AM=AD，

∴ $\angle EDA=\angle AMD=45°$，

∵ $\angle C=30°$，

∴ $\angle CDM=\angle AMD-\angle C=15°$；

③AD=MD 时，

∵AD=MD，

∴ $\angle AMD=\angle MAD$，

∴ $\angle EDA=45°$，

∴ $\angle AMD=\angle MAD=\dfrac{180°-45°}{2}=67.5°$，

∵ $\angle C=30°$，

∴ $\angle CDM=\angle AMD-\angle C=37.5°$．

∴当 $\triangle ADM$ 为等腰三角形时，$\angle CDM$ 的度数为 $60°$ 或 $15°$ 或 $37.5°$．

11．（1）如图 1 所示，$\triangle ACB$，$\triangle ECD$ 都是等腰三角形，A、C、D 三点在同一直线上，连接 BD、AE，并延长 AE 交 BD 于点 F，试判断 AE 与 BD 的数量关系及位置关系，并证明你的结论．

（2）若 $\triangle ECD$ 绕顶点 C 顺时针转任意角度后得到图 2，图 1 中的结论是否仍然成立？请说明理由．

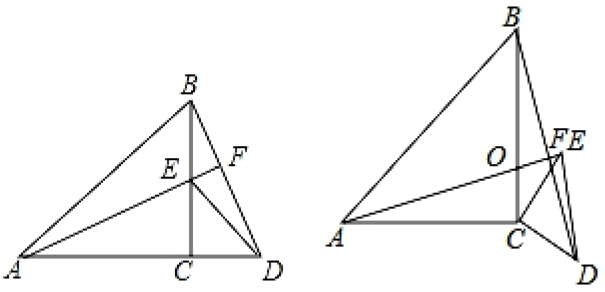


图1　　图2

【答案】（1）AE=BD，AE⊥BD，见解析；（2）结论还成立，见解析

【详解】（1）AE=BD，AE⊥BD．

证明：∵ $\triangle ACB$，$\triangle ECD$ 都是等腰三角形，

∴AC=BC, CE=CD，

在 $\triangle$ACE 和 $\triangle$BCD 中

$$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACE=\angle BCD \\ CE=CD \end{cases}$$

∴ $\triangle$ACE≌$\triangle$BCD（SAS），

∴AE=BD，∠CAE＝∠DBC，

∵∠ACB＝90°，

∴∠CAE+∠AEC＝90°，

∵∠CAE＝∠DBC，∠AEC＝∠BEF，

∴∠DBC+∠BEF＝90°，

∴∠BFE＝180°﹣90°＝90°，

∴AE⊥BD；

（2）解：结论还成立，

理由是：∵∠ACB＝∠ECD，

∴∠ACB+∠BCE＝∠ECD+∠BCE，

即∠ACE＝∠BCD，

在∨ACE和∨BCD中

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD \\ CE = CD \end{cases}$$

∴∨ACE≌∨BCD（SAS），

∴AE=BD，∠CAE＝∠DBC，

∵∠ACB＝90°，

∴∠CAE+∠AOC＝90°，

∵∠CAE＝∠DBC，∠AOC＝∠BOE，

∴∠DBC+∠BOE＝90°，

∴∠BFO＝180°﹣90°＝90°，

∴AE⊥BD.

12．如图，图1等腰△BAC与等腰△DEC，共点于C，且∠BCA＝∠ECD，连结BE、AD，若BC＝AC、EC＝DC.

（1）求证：BE＝AD；

（2）若将等腰△DEC绕点C旋转至图2、3、4情况时，其余条件不变，BE与AD还相等吗？为什么？（请你用图2证明你的猜想）

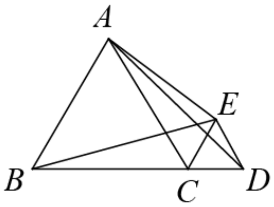


图1

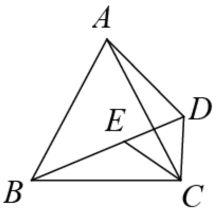


图2

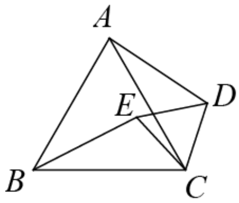


图3

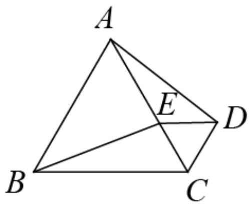


图4

【答案】（1）证明见解析；（2）BE＝AD，理由见解析.

【详解】（1）证明：∵∠BCA＝∠ECD，

∴∠BCA+∠ECA＝∠ECD+∠ECA，

∴∠BCE＝∠ACD，

在△BCE 和△ACD 中，$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCE = \angle ACD \\ CE = CD \end{cases}$，

∴△BCE≌△ACD（SAS），

∴BE＝AD；

（2）解：图 2、图 3、图 4 中，BE＝AD，以图 2 为例，理由如下：

∵∠BCA＝∠ECD，

∴∠BCA－∠ECA＝∠ECD－∠ECA，

∴∠BCE＝∠ACD，

在△BCE 和△ACD 中，$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCE = \angle ACD \\ CE = CD \end{cases}$，

∴△BCE≌△ACD（SAS），

∴BE＝AD.

13．如图，△*ACB* 和△*DCE* 均为等腰三角形，点 *A*，*D*，*E* 在同一直线上，连接 *BE*.

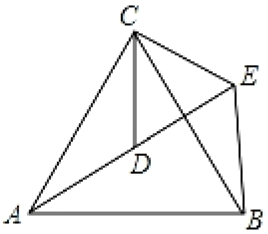


图1

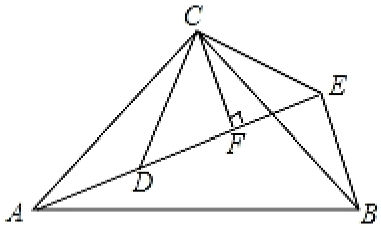


图2

（1）如图 1，若∠*CAB*＝∠*CBA*＝∠*CDE*＝∠*CED*＝50°.

①求证：*AD*＝*BE*;

②求∠*AEB* 的度数.

（2）如图 2，若∠*ACB*＝∠*DCE*＝90°，*CF* 为△*DCE* 中 *DE* 边上的高，试猜想 *AE*，*CF*，*BE* 之间的关系，并证明你的结论.

【答案】（1）①见解析；②80°；（2）*AE*＝2*CF*+*BE*，理由见解析.

【详解】（1）①证明：∵∠CAB＝∠CBA＝∠CDE＝∠CED＝50°，

∴∠ACB＝∠DCE＝180°－2×50°＝80°，

∵∠ACB＝∠ACD+∠DCB，∠DCE＝∠DCB+∠BCE，

∴∠ACD＝∠BCE，

∵△ACB，△DCE 都是等腰三角形，

∴AC＝BC，DC＝EC，

在△ACD 和△BCE 中，

$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE \\ DC = EC \end{cases}$，

∴△ACD≌△BCE（SAS），

∴AD＝BE.

②解：∵△ACD≌△BCE，

∴∠ADC＝∠BEC，

∵点 A、D、E 在同一直线上，且∠CDE＝50°，

∴∠ADC＝180° - ∠CDE＝130°，

∴∠BEC＝130°，

∵∠BEC＝∠CED+∠AEB，∠CED＝50°，

∴∠AEB＝∠BEC - ∠CED＝80°.

（2）结论：AE＝2CF+BE.

理由：∵△ACB，△DCE 都是等腰直角三角形，

∴∠CDE＝∠CED＝45°，

∵CF⊥DE，

∴∠CFD＝90°，DF＝EF＝CF，

∵AD＝BE，

∴AE＝AD+DE＝BE+2CF.

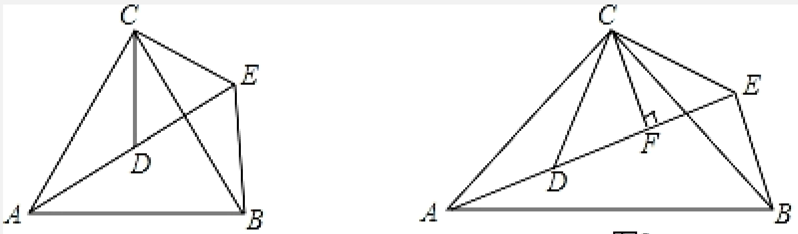
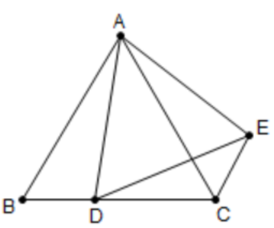
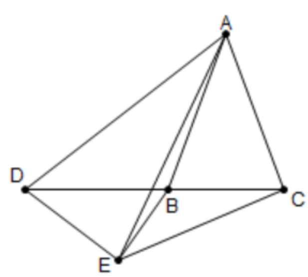
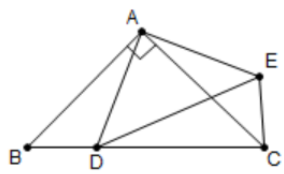


图1　　　　图2

14.在$\vee ABC$中，$AB = AC$，D是直线BC上一点(不与点B、C重合)，以AD为一边在AD的右侧作$\vee ADE$，$AD = AE$，$\angle DAE = \angle BAC$，连接CE.







（1）如图，当 D在线段BC上时，求证：$BD = CE$.

（2）如图，若点D在线段CB的延长线上，$\angle BCE = \alpha$，$\angle BAC = \beta$.则α、β

之间有怎样的数量关系？写出你的理由.

（3）如图，当点D在线段BC上，$\angle BAC=90^{\circ}$，$BC=4$，求$S_{\triangledown DCE}$最大值.

【答案】（1）见解析；（2）$\alpha=\beta$，理由见解析；（3）2

【详解】解：（1）$\because \angle BAC=\angle DAE$，

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$，

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases}AB=AC\\ \angle BAD=\angle CAE\\ AD=AE\end{cases},$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE(SAS)$，

$\therefore BD=CE$；

（2）同（1）的方法得$\triangle ABD\cong\triangle ACE(SAS)$，

∴∠ACE=∠ABD，∠BCE=α，

∴∠ACE=∠ ACB+∠BCE=∠ACB+α，

在$\triangledown ABC$中，

∵AB= AC，∠BAC=β，

∴∠ACB=∠ABC $=\frac{1}{2}(180^{\circ}-\beta)=90^{\circ}-\frac{1}{2}\beta$，

∴∠ABD= $180^{\circ}-\angle ABC=90^{\circ}+\frac{1}{2}\beta$，

∴∠ACE=∠ACB $+\alpha=90^{\circ}-\frac{1}{2}\beta+\alpha$，

∵∠ACE=∠ABD $=90^{\circ}+\frac{1}{2}\beta$，

$\therefore 90^{\circ}-\frac{1}{2}\beta+\alpha=90^{\circ}+\frac{1}{2}\beta$，

∴α = β；

（3）如图，过A做$AH\perp BC$于点H，

$\because AB=AC$，$\angle BAC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ABC=45^{\circ}$，$BH=AH=\frac{1}{2}BC=2$，

同（1）的方法得，$\triangle ABD\cong\triangle ACE(SAS)$，

$\therefore S_{\Delta AEC}=S_{\Delta ABD}$，$S_{\Delta AEC}+S_{\Delta ADC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ADC}$，

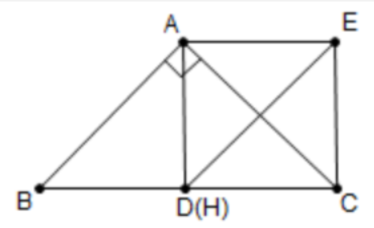
即$S_{四边形ADCE}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH=4$，

$\therefore S_{\Delta DCE}=S_{四边形ADCE}-S_{\Delta ADE}$，

当 $S_{\Delta ADE}$ 最小时，$S_{\Delta DCE}$ 最大，

$\therefore$ 当 $AD \perp BC$，$AD = 2$ 时最小，$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}AD^2 = 2$，

$\therefore S_{\Delta DCE最大} = 4 - 2 = 2$.



15．点 C 为线段 AB 上一点，以 AC 为斜边作等腰 $Rt\triangle ADC$，连接BD．在△ABD 外侧，以 BD 为斜边作等腰 $Rt\triangle BED$，连接 EC.

（1）如图 1，当∠DBA=30°时：

①求证：AC=BD;

②判断线段 EC 与 EB 的数量关系，并证明；

（2）如图 2，当 0°＜∠DBA＜45°时，EC 与 EB 的数量关系是否保持不变？如果不变，请你证明 EC=EB.

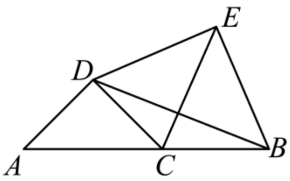


图1

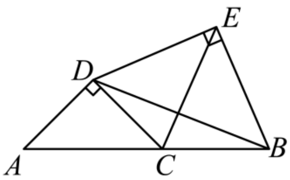


图2

【答案】(1）①证明见解析；②$EC = EB$，证明见解析；(2）EC 与 EB 的数量关系保持不变，证明见解析.

【详解】(1）①如图 1，过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F，

∵ $Rt\triangle ADC$ 是等腰三角形，

$\therefore DF$ 是斜边 AC 上的中线，

$\therefore DF = \frac{1}{2}AC$，

又∵ 在 $Rt\triangle BDF$ 中，$\angle DBA = 30°$，

$\therefore DF = \frac{1}{2}BD$，

$\therefore \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$，即 $AC = BD$；

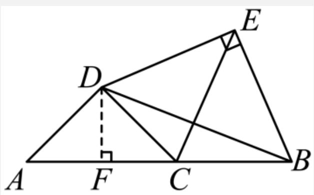


图1

② $EC=EB$，证明如下：

$\because Rt\triangle ADC$ 和 $Rt\triangle BED$ 都是等腰直角三角形，

$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC, DE=EB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD$， $\angle ACD=\angle BDE=45^{\circ}$，

由①知， $AC=BD$，

$\therefore CD=DE$，

$\because \angle DBA=30^{\circ}$，

$\therefore \angle BDC=\angle ACD-\angle DBA=15^{\circ}$，

$\therefore \angle CDE=\angle BDC+\angle BDE=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形，

$\therefore EC=DE=EB$；

（2）EC 与 EB 的数量关系保持不变，证明如下：

如图 2，过点 D 作 BD 的垂线，交 BE 延长线于点 G，连接 CG，

$\therefore \angle BDG=90^{\circ}$，

$\because Rt\triangle ADC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AD=CD, \angle ADC=90^{\circ}, \angle A=\angle ACD=45^{\circ}$，

$\therefore \angle ADC+\angle BDC=\angle BDG+\angle BDC$， 即 $\angle ADB=\angle CDG$，

$\because Rt\triangle BED$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle DBE=45^{\circ}, DE\perp BE$，

$\therefore \triangle BDG$ 是等腰直角三角形，且 $BD=GD$，

$\therefore EB=EG$（等腰三角形的三线合一），

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CGD$ 中， $\begin{cases} AD=CD \\ \angle ADB=\angle CDG \\ BD=GD \end{cases}$，

$\therefore \triangle ABD\cong \triangle CGD(SAS)$，

$\therefore \angle A=\angle DCG=45^{\circ}$，

$\therefore \angle ACG=\angle ACD+\angle DCG=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BCG=180^{\circ}-\angle ACG=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle BCG$ 是直角三角形，

又 $\because EB=EG$，

$\therefore$ 点 E 是 BG 的中点，即 EC 是斜边 BG 上的中线，

$\therefore EC=EB$.