

高等数学基础作业 1

第 1 章函数

第 2 章极限与连续

(一) 单项选择题

1. 下列各函数对中，(C) 中的两个函数相等.

A. $f(x) = (Vx)^2, g(x) = x^2$. $f(x) = TP'', g(x) = X$

C. $f(x) = \ln x, g(x) = 3 \ln x$ $f(x) = x+1, \hat{g}(x) = \frac{1}{x-1}$

分析：判断函数相等的两个条件(1)相应法则相同(2)定义域相同

A、 $f(x) = (4x)^2$, 定义域 $\{x | x > 0\}$: $g(x)$ 定义域为 R

定义域不同，所以函数不相等；

B、 $f(x) = x/2, g(x) = x$ 相应法则不同，所以函数不相等；

C、 $f(x) = \ln x, 3 \ln x$ 定义域为 $\{x | x > 0\}$, $g(x) = 3 \ln x$ 定义域为 $\{x | x > 0\}$

所以两个函数相等

D、 $f(x) = X + 1$ 定义域为 R ; $g(x) = \frac{1}{x-4} + 1$, 定义域为 $\{x | x \neq 4, x \neq -1\}$

定义域不同，所以两函数不等。

故选 C

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-8, +\infty)$, 则函数 $f(x) + f(-x)$ 的图形关于 (C) 对称.

C.), 轴

D. $y = x$

分析：奇函数，关于原点对称

偶函数, $f(-x) = f(x)$ 关于 y 轴对称

$y = f(x)$ 它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 关于 $y = x$ 对称,

奇函数与偶函数的前提是定义域关于原点对称

设 $g(x) = h(x) + g(x)$ 则 $h(x) = g(x) - g(x) = 0$

所认为 $g(x) = f(x) + f(-x)$ 偶函数，即图形关于 y 轴对称

故选 c

太上有立德，其次有立功，其次有立言，虽久不废，此谓不朽。——《左传》

3. 下列函数中为奇函数是(B).

A. $y = \ln(1+x)$

B. $y = x \cos x$

C. $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$

D. $y = \ln(1+x^2)$

分析：A、 $y(-x) = \ln(1-x) \neq -\ln(1+x) = -y$ (偶函数)

B、 $y(-x) = -x \cos(-x) = -x \cos x = -y$ 为奇函数

或者 x 为奇函数, $\cos x$ 为偶函数, 奇偶函数乘积仍为奇函数

C、 $y(f) = \frac{a^f + a^{-f}}{2}$ 所认为偶函数

D、 $y(-x) = \ln(1+x^2) = y$ 非奇非偶函数 故选 B

4. 下列函数中为基本初等函数是(C).

A. $y = x + \sqrt{x}$

B. $y = \frac{1}{x}$

C. $y = x^2$

D. $y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

分析：六种基本初等函数

(1) $y = c$ (常数) ----- 常值函数

(2) $y = c^x$ 为常数 ----- 幂函数

(3) $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ ----- 指数函数

(4) $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ ----- 对数函数

(5) $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ ----- 三角函数

$y = a^x \sin x$

(6) $y = \arccos x, [-1, 1], y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ ----- 反三角函数

分段函数不是基本初等函数, 故 D 选项不对

对照比较选 C

5. 下列极限存计算不对的是(D).

A. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{5x+2} = -1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$

吾日三省乎吾身。为人谋而不忠乎？与朋友交而不信乎？传不习乎？ ——《论语》

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow r} x \sin \frac{1}{x} = 0$

分析:A、已知既卜。(〃>。)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

$$B, \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = \ln(1+0) = 0$$

初等函数在其定义域内是连续的

$$C, \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$x \rightarrow 00$ 时, 一是无穷小量, $\sin x$ 是有界函数,

无穷小量 $\times$ 有界函数仍是无穷小量

$$D、\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\sin X}{X} = 0, \text{ 令 } f = \frac{1}{X}, \text{ 则原式} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{f}{f'}$$

故选 D

6. 当 $X \rightarrow 0$ 时 ε 量 (C) 是无穷小量.

$$C \quad x \sin \frac{x}{x}$$

D. $\ln(x + 2)$

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量

A. $\lim_{r \rightarrow 0} = 1$, 重要极限

B、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 无穷大量

C、 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 无穷小量 $\times$ X 有界函数 $\sin$ 仍为无穷小量

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+2) = \ln(0+2) = \ln 2$$

故选 C

学而不知道，与不学同；知而不能行，与不知同。——黄晞

7. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 满足 (A)，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

B. $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义

C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

分析：连续的定义：极限存在且等于此点的函数值，则在此点连续即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

连续的充足必要条件 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

故选 A

(二) 填空题

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{x-3}$ 的定义域是 $\{x | x > 3\}$

函数 $f(x) = \frac{1}{x-3}$

分析：求定义域一般遵循的原则

(1) 偶次根号下的量 ≥ 0

(2) 分母的值不等于 0

(3) 对数符号下量(真值)为正

(4) 反三角中反正弦、反余弦符号内的量，绝对值小于等于 1 正切符号内的量不能取 $\pm \frac{\pi}{2}$ (4 = 0, 1, 2, ...)

(5)

然后求满足上述条件的集合的交集，即为定义域

$f(x) = \frac{1}{x-3}$

$x-3$

$x^2-9 > 0 \quad x > 3 \text{ 或 } x < -3$

$x-3 \neq 0$ 得 $x \neq 3$ 求魏

$1+x > 0 \quad x > -1$

定义域为 $\{x | x > 3\}$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

测 $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

分析：法一，令 $t = x^2+x$ 得 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4t}}{2}$

则 $f(0) = \frac{1}{0^2+0} = \frac{1}{0}$ 法二， $f(x) = \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)}$

吾日三省乎吾身。为人谋而不忠乎？与朋友交而不信乎？传不习乎？ —— 《论语》

1) $(\mathbb{Z}+1)$ 所以/ $\langle \rangle$ = " $_1$) f

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \underline{\hspace{2cm}}$.

志不强者智不达，言不信者行不果。——墨翟

分析：重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 等价式

$$\text{推广 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

4. 若函数 $y(x) = \begin{cases} x+k, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $k =$ _____.

分析：分段函数在分段点 x_0 处连续 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$$

5. 函数 $y = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的间断点是 $x = 0$ 所以 $k = e$

分析：间断点即定义域不存在的点或不连续的点

初等函数在其定义域范围内都是连续的

分段函数重要考虑分段点的连续性(运用连续的充足必要条件)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

6. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) - A$ 称为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量

分析： $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - A) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} A = A - A = 0$

所以 $f(x) - A$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量

(三) 计算题

1. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$$

求: $f'(x)$, $f'(0)$, $f'(1)$.

解: $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$

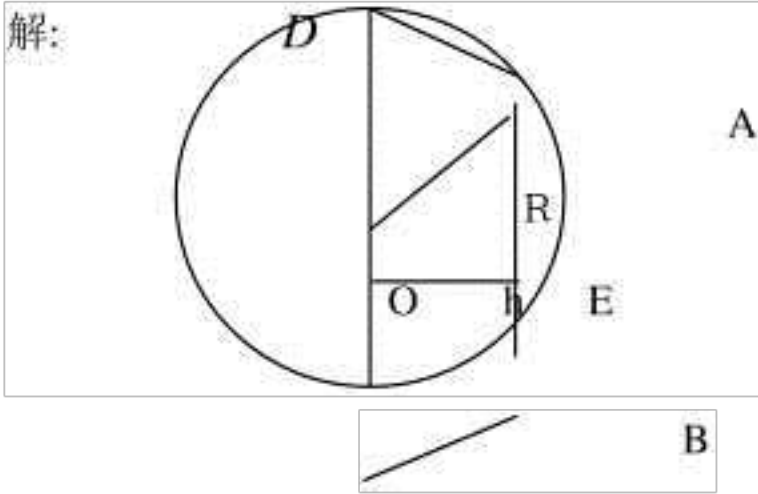
博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃行之。——《礼记》

2. 求函数 $y = \lg \frac{2x-1}{x}$ 的定义域.

解： $y = \lg \frac{2x-1}{x}$ 故意义，规定 $\frac{2x-1}{x} > 0$ 解得

则定义域为 $x < 0$ 或 $x > \frac{1}{2}$ ：

3. 在半径为 R 的半圆内内接一梯形，梯形的一个底边与半圆的直径重合，另一底边的两个端点在半圆上, 试将梯形的面积表达成其高的函数.



设梯形 ABCD 即为题中规定的梯形，设高为 h,即 OE=h, 下底 CD=2R

直角三角形 AOE 中，运用勾股定理得

$AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - h^2}$ 则上底 $DE = 2AE = 2\sqrt{R^2 - h^2}$

故 $S = \frac{1}{2}(DE + AB) \cdot h = \frac{1}{2}(2\sqrt{R^2 - h^2} + 2R) \cdot h = h(\sqrt{R^2 - h^2} + R)$

4. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{2 \cos 2x} = \frac{3}{2}$

5. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin(x+1)}$

解： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin(x+1)}$ 不存在，因为 $\sin(x+1)$ 在 $[-1, 1]$ 之间振荡，所以 $\frac{1}{\sin(x+1)}$ 在 $[-\infty, \infty]$ 之间振荡，没有极限。

乐民之乐者，民亦乐其乐；忧民之忧者，民亦忧其忧。——《孟子》

6.求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{t}$

解: 而 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-3\sin 3x} = -\frac{1}{3}$

7.求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\sin x}$

解: 用 $\frac{0}{0}$ 型 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\sin x}$

亚 M 妃

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z+1)^2 (1+1)^{-1}}{(1+1)\sin x} = \frac{1}{e^{31+2i} \sin x}$$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

9.求 $\lim_{x \rightarrow 4} (4x - 5x + 4)$

解: $\lim_{x \rightarrow 4} (4x - 5x + 4) = \lim_{x \rightarrow 4} (-x + 4) = -4 + 4 = 0$

10.设函数

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x > 1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ x+1, & x < -1 \end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 的连续性, 并写出其连续区间.

解: 分别对分段点 $x = -1, x = 1$ 处讨论连续性

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = -1 + 1 = 0$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续

穷则独善其身，达则兼善天下。——《孟子》

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x = 1$

$f'(x) = 2x$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ 即 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续

由 (1) (2) 得 $f(x)$ 在除点 $x = -1$ 外均连续

故 $f'(x)$ 的连续区间为 $(-1, +\infty)$

高等数学基础作业 2

第 3 章导数与微分

(一) 单项选择题

1. 设 $f(x) = 0$ 且极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ ().

- A. $f(0)$
- B. $f'(0)$
- C. $f''(0)$
- D. 0

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$ ().

- A. $e^a - a$
- B. $2e$
- C. $2f(x_0)$
- D. $-f'(x_0)$

3. 设 $f(x) = e^x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} =$ ().

- A. 99
- B. -99
- C. $99!$
- D. $-99!$

5. 下列结论中正确的是 (C) .

- A. 若在点 X 有极限, 则在点 X 可导.
- B. 若 $f(x)$ 在点 X 连续, 则在点 X 可导.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

先天下之忧而忧，后天下之乐而乐。——范仲淹

C. 若 $f(x)$ 在点 M 可导，则在点 M 有极限.

D. 若 $f(x)$ 在点 M 有极限，则在点 M 连续.

(一) 填空题

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则 $f'(0) =$

2. 设 $y = x^2 + 5e^x$ ，则 $y' =$

3. 曲线 $y = x^2 + 1$ 在 $(1, 2)$ 处的切线斜率是 $k =$. 曲线 $y = \sin x$ 在 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的切线方程是 $y =$

5. 设 $y = x^2$ ，则 $y' = 2x(1 + \ln x)$

6. 设 $y = x \ln x$ ，则 $y'' =$

(三) 计算题

1. 求下列函数的导数：

(1) $y = (x^2 + 3)e^x$

$$y' = -e^{\cos x} + x + 2x \ln x$$

$$\frac{2x \ln x + x}{x^2}$$

$$y = \frac{x(-\sin x + 2' \ln 2) - 3(\cos x + 2)}{x^2} :$$

(5) $y = \sin x \ln x$

(6) $y = 4x - \sin x \ln x$

操千曲尔后晓声，观千剑尔后识器。——刘勰

(6) $y = \cos e$

(7) $y = \frac{\sin x + 2x}{3^x} \quad V = 3^x (\cos x + 2x) \quad (\sin x + x) \cdot \ln 3$

(8) $y = x \ln x + \ln x \quad \cos^x x$

2. 求下列函数的导数 y' :

(1) $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = e^{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $y = \ln \cos x$

$y = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(3) $y = \frac{1}{x} \ln x$

(4) $y = \ln x + \ln x$

(5) $y = \cos e$

$y' = -2x \sin x$

(7) $y = \sin^2 x$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/065010230330012111>