

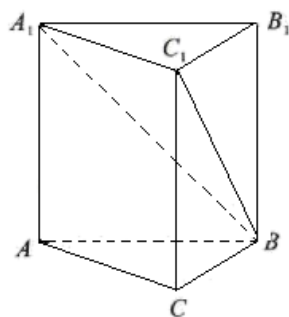
2023-2024 学年广西壮族自治区玉林市第一中学第二学期期中七校联考高三数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 《九章算术》中记载，堑堵是底面为直角三角形的直三棱柱，阳马指底面为矩形，一侧棱垂直于底面的四棱锥.如图，在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp BC$ ， $AA_1 = 2$ ，当阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$ 时，堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的体积为（ ）



- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\frac{32}{3}\pi$ D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda + \mu =$ （ ）

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果，哥德巴赫猜想的内容是：每个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数的和，例如： $4 = 2 + 2$ ， $6 = 3 + 3$ ， $8 = 3 + 5$ ，那么在不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数，其和等于 16 的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{21}$ B. $\frac{2}{21}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{2}{15}$

4. 若函数 $f(x) = e^x$ 的图象上两点 M ， N 关于直线 $y = x$ 的对称点在 $g(x) = ax - 2$ 的图象上，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right)$ B. $(-\infty, e)$ C. $\left(0, \frac{e}{2}\right)$ D. $(0, e)$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n^2 \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} =$ （ ）

- A. 0 B. 55 C. 66 D. 78

6. 设 i 是虚数单位, 复数 $\frac{1+i}{i} = (\quad)$

- A. $-1+i$ B. $-1-i$ C. $1+i$ D. $1-i$

7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 的一条渐近线为 $y = -2x$, 且一个焦点与抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点相同, 则此双曲线的方程为

()

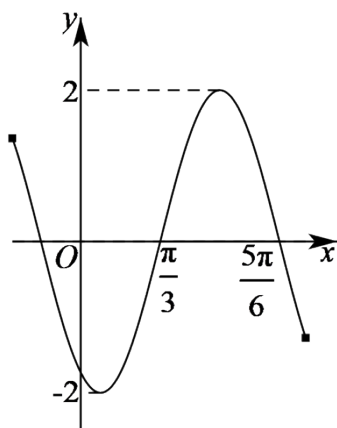
- A. $\frac{5}{4}x^2 - 5y^2 = 1$ B. $5y^2 - \frac{5}{4}x^2 = 1$ C. $\frac{5}{4}y^2 - 5x^2 = 1$ D. $5x^2 - \frac{5}{4}y^2 = 1$

8. 已知函数 $f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - a$ ($0 < a < A$) 在区间 $\left[0, \frac{7\pi}{3\omega}\right]$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 若

$x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. $\frac{4\pi}{3}$

9. 已知函数 $f(x) = 2 \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi \leq \pi$) 的图象如图所示, 则下列说法错误的是 ()



A. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{17\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}\right]$ 上单调递减

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增

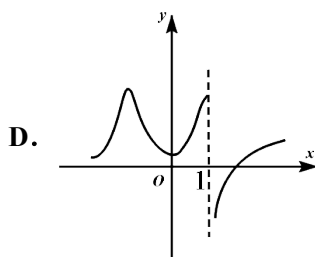
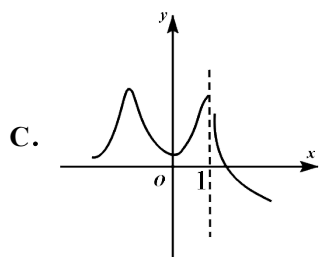
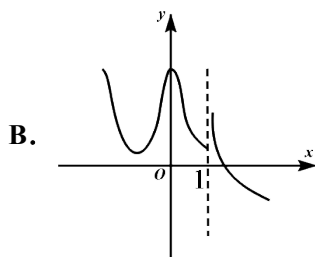
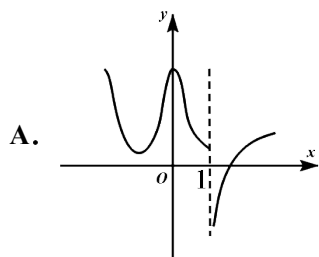
C. 函数 $f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$)

D. 函数 $f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

10. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = \frac{1}{9}$, $S_3 = \frac{7}{27}$, 则 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 ()

- A. $\left(\frac{4}{27}\right)^2$ B. $\left(\frac{4}{27}\right)^3$ C. $\left(\frac{4}{27}\right)^4$ D. $\left(\frac{4}{27}\right)^5$

11. 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x - \frac{1}{x}), & x > 1, \\ e^{\cos \pi x}, & x \leq 1 \end{cases}$ 的图象大致是 ()



12. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=BC=5$, $AC=6$, P 在底面 ABC 内的射影 D 位于直线 AC 上, 且 $AD=2CD$, $PD=4$. 设三棱锥 $P-ABC$ 的每个顶点都在球 Q 的球面上, 则球 Q 的半径为 ()

- A. $\frac{\sqrt{689}}{8}$ B. $\frac{\sqrt{689}}{6}$ C. $\frac{5\sqrt{26}}{8}$ D. $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知边长为 $4\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 现沿对角线 BD 折起, 使得二面角 $A-BD-C$ 为 120° , 此时点 A, B, C, D 在同一个球面上, 则该球的表面积为_____.

14. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 过 F 作直线与 C 相交于 P, Q 两点, 且 Q 在第一象限, 若 $2\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FQ}$, 则直线 PQ 的斜率是_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ 2a_n, & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, 则满足 $2019 \leq S_m \leq 3000$ 的正整数 m 的所有取值为_____.

16. 已知 $z \cdot i = 1 + 2i$ (i 为虚数单位), 则复数 $z =$ _____.

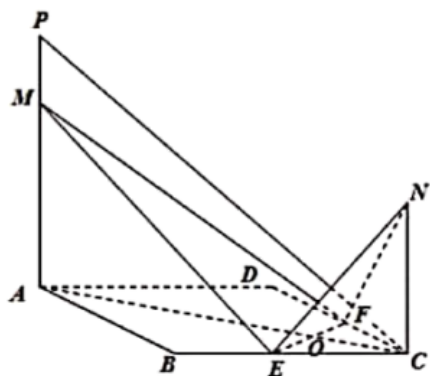
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x-1| + |x+1| - 2$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 1$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq a^2 - a - 2$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

18. (12分) 如图, 已知 E, F 分别是正方形 $ABCD$ 边 BC, CD 的中点, EF 与 AC 交于点 O , PA, NC 都垂直于平面 $ABCD$, 且 $PA = AB = 4, NC = 2, M$ 是线段 PA 上一动点.



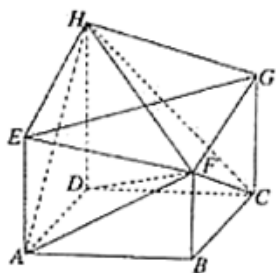
- (1) 当 $MO \perp$ 平面 EFN , 求 $AM:MP$ 的值;
- (2) 当 M 是 PA 中点时, 求四面体 $M-EFN$ 的体积.

19. (12分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, α 为实数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 8 \sin \theta$, 曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M .

- (1) 求线段 AB 长的最小值;
- (2) 求点 M 的轨迹方程.

20. (12分) 若关于 x 的方程 $x^2 + (m-2)x + 5 - m = 0$ 的两根都大于 2, 求实数 m 的取值范围.

21. (12分) 底面 $ABCD$ 为菱形的直四棱柱, 被一平面截取后得到如图所示的几何体. 若 $DA = DH = DB = 4, AE = CG = 3$.



- (1) 求证: $EG \perp DF$;
- (2) 求二面角 $A-HF-C$ 的正弦值.

22. (10分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 有一个微型智能机器人 (大小不计) 只能沿着坐标轴的正方向或负方向行进, 且每一步只能行进 1 个单位长度, 例如: 该机器人在点 $(1, 0)$ 处时, 下一步可行进到 $(2, 0)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(1, -1)$ 这四个点中的任一位置. 记该机器人从坐标原点 O 出发、行进 n 步后落在 y 轴上的不同走法的种数为 $L(n)$.

(1) 分别求 $L(1)$ 、 $L(2)$ 、 $L(3)$ 的值;

(2) 求 $L(n)$ 的表达式.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

利用均值不等式可得 $V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2$, 即可求得 AB , 进而求得外接球的半径, 即可求解.

【详解】

由题意易得 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$$\text{所以 } V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2,$$

当且仅当 $AC = BC$ 时等号成立,

又阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$,

所以 $AB = 2$,

$$\text{所以 堑堵 } ABC-A_1B_1C_1 \text{ 的外接球的半径 } R = \sqrt{\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2},$$

$$\text{所以 外接球的体积 } V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi,$$

故选:B

【点睛】

本题以中国传统文化为背景, 考查四棱锥的体积、直三棱柱的外接球的体积、基本不等式的应用, 体现了数学运算、直观想象等核心素养.

2、A

【解析】

先根据 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}$ 得到 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 从而 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 故可得 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 利用 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$ 可得 $\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 故可计算 $\lambda + \mu$ 的值.

【详解】

因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}$, 所以 P 为 $\triangle ABC$ 的重心,

所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\therefore \frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

所以 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

所以 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 因为 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$,

所以 $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\therefore \lambda + \mu = -\frac{1}{3}$, 故选 A.

【点睛】

对于 $\triangle ABC$, 一般地, 如果 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 反之, 如果 G 为平面上一点, 且满足

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 那么 G 为 $\triangle ABC$ 的重心.

3、B

【解析】

先求出从不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数的所有可能结果, 然后再求出其和等于 16 的结果, 根据等可能事件的概率公式可求.

【详解】

解: 不超过 18 的素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 共 7 个, 从中随机选取两个不同的数共有 $C_7^2 = 21$,

其和等于 16 的结果 (3,13), (5,11) 共 2 种等可能的结果,

故概率 $P = \frac{2}{21}$.

故选: B.

【点睛】

古典概型要求能够列举出所有事件和发生事件的个数, 本题不可以列举出所有事件但可以用分步计数得到, 属于基础题.

4、D

【解析】

由题可知, 可转化为曲线 $g(x) = ax - 2$ 与 $y = \ln x$ 有两个公共点, 可转化为方程 $ax - 2 = \ln x$ 有两解, 构造函数

$h(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$ ，利用导数研究函数单调性，分析即得解

【详解】

函数 $f(x) = e^x$ 的图象上两点 M ， N 关于直线 $y = x$ 的对称点在 $y = \ln x$ 上，

即曲线 $g(x) = ax - 2$ 与 $y = \ln x$ 有两个公共点，

即方程 $ax - 2 = \ln x$ 有两解，

即 $a = \frac{2 + \ln x}{x}$ 有两解，

令 $h(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$ ，

则 $h'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$ ，

则当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时， $h'(x) > 0$ ；当 $x > \frac{1}{e}$ 时， $h'(x) < 0$ ，

故 $x = \frac{1}{e}$ 时 $h(x)$ 取得极大值 $h\left(\frac{1}{e}\right) = e$ ，也即为最大值，

当 $x \rightarrow 0$ 时， $h(x) \rightarrow -\infty$ ；当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $h(x) \rightarrow 0$ ，

所以 $0 < a < e$ 满足条件．

故选：D

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的零点，考查了学生综合分析，转化划归，数形结合，数学运算的能力，属于较难题．

5、D

【解析】

先分 n 为奇数和偶数两种情况计算出 $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)$ 的值，可进一步得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，然后代入

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}$ 转化计算，再根据等差数列求和公式计算出结果．

【详解】

解：由题意得，当 n 为奇数时， $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ，

当 n 为偶数时， $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

所以当 n 为奇数时， $a_n = -n^2$ ；当 n 为偶数时， $a_n = n^2$ ，

所以 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}$

$$= -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots - 11^2 + 12^2$$

$$= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + (12^2 - 11^2)$$

$$= (2+1)(2-1) + (4+3)(4-3) + \cdots + (12+11)(12-11)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 11 + 12$$

$$= \frac{12 \times (1+12)}{2}$$

$$= 78$$

故选：D

【点睛】

此题考查数列与三角函数的综合问题，以及数列求和，考查了正弦函数的性质应用，等差数列的求和公式，属于中档题.

6、D

【解析】

利用复数的除法运算，化简复数 $\frac{1+i}{i} = 1-i$ ，即可求解，得到答案.

【详解】

由题意，复数 $\frac{1+i}{i} = \frac{(1+i) \cdot (-i)}{i \times (-i)} = 1-i$ ，故选 D.

【点睛】

本题主要考查了复数的除法运算，其中解答中熟记复数的除法运算是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

7、C

【解析】

求得抛物线的焦点坐标，可得双曲线方程 $\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{-a} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{b}{-a}}x$ ，由题意可得 $b = -4a$ ，又 $c^2 = 1$ ，

即 $b - a = 1$ ，解得 a ， b ，即可得到所求双曲线的方程.

【详解】

解：抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 $(0, 1)$

可得双曲线 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 (b > 0, a < 0)$

即为 $\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{-a} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{b}{-a}}x$

由题意可得 $\sqrt{\frac{b}{-a}} = 2$ ，即 $b = -4a$

又 $c^2 = 1$ ，即 $b - a = 1$

解得 $a = -\frac{1}{5}$ ， $b = \frac{4}{5}$ 。

即双曲线的方程为 $\frac{5y^2}{4} - 5x^2 = 1$ 。

故选：C

【点睛】

本题主要考查了求双曲线的方程，属于中档题。

8、C

【解析】

根据题意，知当 $x = \frac{7\pi}{3\omega}$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$ ，由对称轴的性质可知 $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3\omega}$ 和 $x_2 + x_3 = \frac{8\pi}{3\omega}$ ，即可求出 ω ，即可求

出 $f(x)$ 的最小正周期。

【详解】

解：由于 $f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - a$ ($0 < a < A$) 在区间 $\left[0, \frac{7\pi}{3\omega}\right]$ 有三个零点 x_1 ， x_2 ， x_3 ，

当 $x = \frac{7\pi}{3\omega}$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$ ，

∴ 由对称轴可知 x_1 ， x_2 满足 $\omega x_1 + \frac{\pi}{6} + \omega x_2 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \times 2$ ，

即 $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3\omega}$ 。

同理 x_2 ， x_3 满足 $\omega x_2 + \frac{\pi}{6} + \omega x_3 + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \times 2$ ，即 $x_2 + x_3 = \frac{8\pi}{3\omega}$ ，

∴ $x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{10\pi}{3\omega} = \frac{5\pi}{3}$ ， $\omega = 2$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/065143034044011332>