

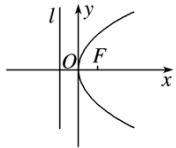
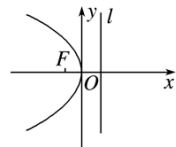
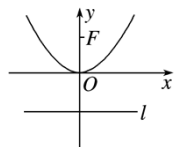
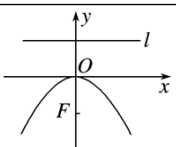
### 3.3.1 抛物线的标准方程

#### 【考点梳理】

##### 考点一：抛物线的定义

- 1. 定义：平面内与一定点  $F$  和一条定直线  $l$  (不经过点  $F$ ) 距离相等的点的轨迹.
- 2. 焦点：定点  $F$ .
- 3. 准线：定直线  $l$ .

##### 考点二：抛物线的标准方程

| 图形                                                                                  | 标准方程            | 焦点坐标                | 准线方程             |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|---------------------|------------------|
|    | $y^2=2px(p>0)$  | $(\frac{p}{2}, 0)$  | $x=-\frac{p}{2}$ |
|    | $y^2=-2px(p>0)$ | $(-\frac{p}{2}, 0)$ | $x=\frac{p}{2}$  |
|   | $x^2=2py(p>0)$  | $(0, \frac{p}{2})$  | $y=-\frac{p}{2}$ |
|  | $x^2=-2py(p>0)$ | $(0, -\frac{p}{2})$ | $y=\frac{p}{2}$  |

重难点技巧：p 的几何意义是焦点到准线的距离.

#### 【题型归纳】

##### 题型一：抛物线的定义求轨迹方程

1. (2022·全国·高二) 已知点  $M(2,2)$ ，直线  $l:x-y-1=0$ ，若动点  $P$  到  $l$  的距离等于  $|PM|$ ，则点  $P$  的轨迹是 ( )
- A. 椭圆

B. 双曲线

C. 抛物线

D. 直线

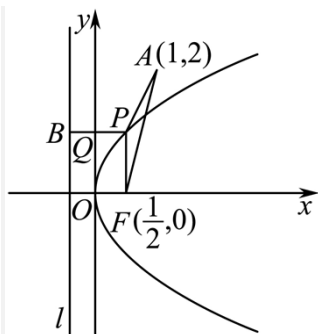
【答案】C

【分析】由抛物线的定义求解即可.

【详解】由抛物线的定义（平面内，到定点与定直线的距离相等的点的轨迹叫做抛物线）可知，点  $P$  的轨迹是抛物线.

故选：C





Q 抛物线的方程为  $y^2 = 2x$ ,

$\therefore$  抛物线的焦点为  $F(\frac{1}{2}, 0)$ , 准线  $l$  方程为  $x = -\frac{1}{2}$ ,

设点  $P$  在  $y$  轴上的射影为  $Q$  点, 延长  $PQ$  交准线  $l$  于点  $B$ , 连结  $PF$ ,

则  $PQ$  长即为点  $P$  到  $y$  轴的距离, 可得  $|PB| = |PQ| + \frac{1}{2}$ ,

根据抛物线的定义, 得  $|PB| = |PF|$ ,

$\therefore |PQ| + |PA| = |PB| + |PA| - \frac{1}{2} = |PF| + |PA| - \frac{1}{2}$ ,

根据平面几何知识, 可得  $|PF| + |PA| \geq |AF|$ , 得  $|PQ| + |PA| \geq |AF| - \frac{1}{2}$ .

当且仅当  $P$ 、 $A$ 、 $F$  三点共线时等号成立,

$$Q |AF| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (2 - 0)^2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2},$$

$\therefore$  当  $P$ 、 $A$ 、 $F$  三点共线时,  $|PQ| + |PA|$  的最小值为  $\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$ ,

即  $P$  到  $y$  轴的距离与  $P$  到点  $A$  的距离之和的最小值为  $\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$ .

故选: D.

5. (2022 秋·江苏徐州·高二徐州市第七中学校考阶段练习) 已知点  $M$  是抛物线  $x^2 = 4y$  上的一动点,  $F$  为抛物线的焦点,  $A$  是圆  $C: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$  上一动点, 则  $|MA| + |MF|$  的最小值为

A. 3

B. 4

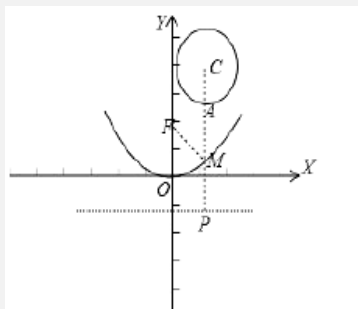
C. 5

D. 6

【答案】B

【解析】根据抛物线定义和三角形三边关系可知当  $M, A, P$  三点共线时,  $|MA| + |MF|$  的值最小, 根据圆的性质可知最小值为  $|CP| - r$ ; 根据抛物线方程和圆的方程可求得  $|CP|$ , 从而得到所求的最值.

【详解】



如图所示，利用抛物线的定义知： $|MP| = |MF|$

当  $M, A, P$  三点共线时， $|MA| + |MF|$  的值最小，且最小值为  $|CP| - r = |CP| - 1$

Q 抛物线的准线方程： $y = -1$ ， $C(1, 4)$

$$\therefore |CP| = 4 + 1 = 5 \quad \therefore (|MA| + |MF|)_{\min} = 5 - 1 = 4$$

本题正确选项： $B$

【点睛】本题考查线段距离之和的最值的求解，涉及到抛物线定义、圆的性质的应用，关键是能够找到取得最值时的点的位置，从而利用抛物线和圆的性质来进行求解.

6. (2022 春·江苏扬州·高二统考开学考试) 若抛物线的顶点为坐标原点，焦点  $F$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点， $P$  为

抛物线上的动点， $Q(5, 3)$ ，则  $|PF| + |PQ|$  的最小值为( )

A. 4

B. 5

C. 6

D. 2 17

【答案】C

【分析】过  $P$  作准线的垂线，与准线交于  $P'$ ，则  $|PF| + |PQ| = |PP'| + |PQ| \geq |P'Q|$ .

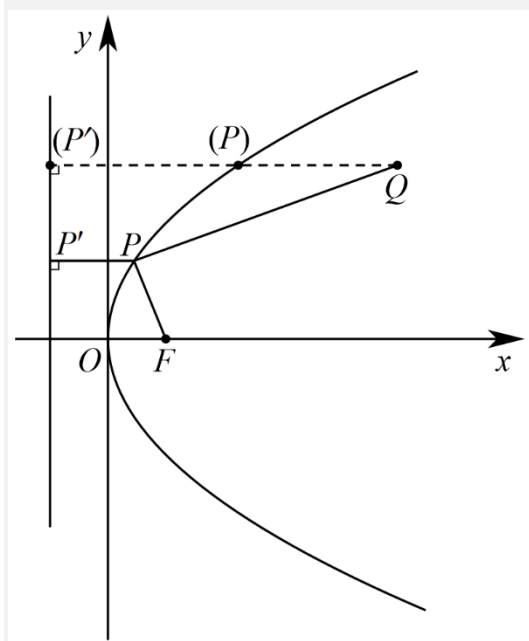
【详解】由题知抛物线焦点为  $F(1, 0)$ ，准线方程为  $x = -1$ ，

过  $P$  作准线的垂线，与准线交于  $P'$ ，则  $|PP'| = |PF|$ ，

$\therefore |PF| + |PQ| = |PP'| + |PQ|$ ，当且仅当  $P'$ 、 $P$ 、 $Q$  三点共线时（如图虚线位置） $|PP'| + |PQ|$  取最小，此时

$$|PP'| + |PQ| = |P'Q| = 5 + 1 = 6$$

故选：C.



### 题型三：抛物线焦半径的公式

7. (2022 秋·高二单元测试) 已知抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ ，直线  $l$  不过点  $F$  且与  $C$  交于  $A, B$  两点 (点  $A$  在  $x$  轴上方)，与  $y$  轴负半轴交于点  $M$ ，若  $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{BM}$ ， $|AF| = 3|BF|$ ，则直线  $AF$  的斜率为 ( )

- A.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】D

【分析】设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，由题可得  $\begin{cases} x_2 - x_1 = 4(0 - x_2) \\ x_1 + 2 = 3(x_2 + 2) \end{cases}$ ，进而可得点  $A$  坐标，然后利用斜率公式即得.

【详解】由题可得  $F(2, 0)$ ，设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ， $y_1 > 0$ ，

因为  $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{BM}$ ， $|AF| = 3|BF|$ ，

$$\therefore \begin{cases} x_2 - x_1 = 4(0 - x_2) \\ x_1 + 2 = 3(x_2 + 2) \end{cases},$$

解得  $x_1 = 10, x_2 = 2$ ，

所以  $y_1 = 4\sqrt{5}$ ，即  $A(10, 4\sqrt{5})$ ，

所以直线  $AF$  的斜率为  $\frac{4\sqrt{5}}{10-2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

故选：D.

8. (2023 秋·江苏南京·高二南京外国语学校校考阶段练习) 已知  $F$  为抛物线  $y^2 = x$  的焦点，点  $A, B, C$  在抛物线上， $F$  为  $\triangle ABC$  的重心，则  $|AF| + |BF| + |CF| =$  ( )

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/066152123213010143>