

第 05 讲 7.3.2 离散型随机变量的方差

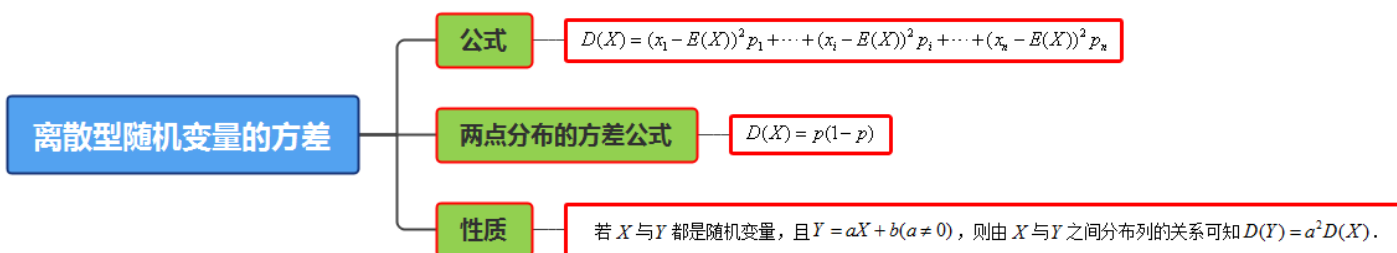
01

学习目标

课程标准	学习目标
①通过具体实例,理解离散型随机变量分布列的方差。 ②能解决与离散型随机变量相关的数学问题与实际问题中与方差的求解问题。 ③能解决一些稳定性的简单问题与决策性问题。	通过本节课的学习,要求掌握离散型随机变量的方差、标准差的求解,能解决与之相关的简单问题,有关决策性问题的处理意见与建议。

02

思维导图



03

知识清单

知识点 1: 离散型随机变量的方差

(1) 离散型随机变量的方差的概念

一般地, 若离散型随机变量 X 的概率分布列为:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

则称 $D(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + \cdots + (x_i - E(X))^2 p_i + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$

为随机变量 X 的方差, 有时也记为 $Var(X)$.

称 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差.

(2) 离散型随机变量的方差的深层理解

① 离散型随机变量 X 的方差 $D(X)$ 是个数值，是随机变量的一个重要特征数.

$(x_i - E(X))^2$ 描述了 x_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) 相对于均值 $E(X)$ 的偏离程度，而 $D(X)$ 是上述偏离程度的加权平均值，刻画了随机变量 X 的取值与其均值 $E(X)$ 的平均偏离程度. 随机变量的方差和标准差都反映了随机变量 X 取值的稳定性和波动、集中与离散程度， $D(X)$ 越大，表明平均偏离程度越大， X 的取值越分散；反之， $D(X)$ 越小， X 的取值越集中在 $E(X)$ 附近.

② 标准差与随机变量有相同的单位，而方差的单位是随机变量单位的平方.

③ 均值与方差的关系

在实际问题中仅靠均值还不能全面地说明随机变量的特征，还必须研究随机变量的集中与离散程度，这就需要求出方差.

④ 方差公式的变形： $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

⑤ 方差也是一个常数，它不具有随机性，方差的值一定非负.

(3) 两点分布的方差公式

一般地，如果随机变量 X 服从两点分布，那么： $D(X) = p(1-p)$.

X	1	0
P	p	$1-p$

【即学即练 1】(2024·全国·高二假期作业) 已知随机变量 ξ_i 服从两点分布，且 $P(\xi_i = 1) = p_i$ ($i=1, 2$)，若

$\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$ ，则下列判断正确的是 ()

A. $E(\xi_2) < D(\xi_2)$

B. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$

C. $E(\xi_1) < D(\xi_1)$

D. $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

【答案】D

【详解】 $\because E(\xi_1) = p_1$ ， $E(\xi_2) = p_2$ ， $\therefore E(\xi_1) < E(\xi_2)$ ，

$\therefore D(\xi_1) = p_1(1-p_1)$ ， $D(\xi_2) = p_2(1-p_2)$ ，

二次函数 $y = x(1-x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减，

$\therefore E(\xi_2) > D(\xi_2)$ ， $E(\xi_1) > D(\xi_1)$ ，且 $D(\xi_1) > D(\xi_2)$.

故选：D

(4) 方差的性质

若 X 与 Y 都是随机变量，且 $Y = aX + b$ ($a \neq 0$)，则由 X 与 Y 之间分布列的关系可知 $D(Y) = a^2 D(X)$.

【即学即练 2】（2024·全国·高二假期作业）若随机变量 X 满足 $D(X)=0.8$ ，则 $D(2X-3)=$ （ ）

- A. 0.8 B. 1.6 C. 3.2 D. 0.2

【答案】C

【详解】因为 $D(X)=0.8$ ，所以 $D(2X-3)=2^2 \times D(X)=4 \times 0.8=3.2$ 。

故选：C

知识点 2：样本方差与离散型随机变量方差的比较

（1）样本方差

样本数据 $\underset{k_1}{x_1}, \underset{k_2}{x_2}, \dots, \underset{k_i}{x_i}, \dots, \underset{k_n}{x_n}$ ；记 $k_1+k_2+\dots+k_n=N$

均值： $\bar{x}=x_1 f_1+x_2 f_2+\dots+x_n f_n$ ，其中 $f_i=\frac{k_i}{N}$ 。

方差： $s^2=(x_1-\bar{x})^2 f_1+(x_2-\bar{x})^2 f_2+\dots+(x_n-\bar{x})^2 f_n$

（2）离散型随机变量方差

离散型随机变量的分布列

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

均值 $E(X)=x_1 p_1+x_2 p_2+\dots+x_n p_n=\sum_{i=1}^n x_i p_i$

方差： $D(X)=(x_1-E(X))^2 p_1+\dots+(x_i-E(X))^2 p_i+\dots+(x_n-E(X))^2 p_n=\sum_{i=1}^n (x_i-E(X))^2 p_i$

【即学即练 3】（2024·全国·高三专题练习）甲、乙两种零件某次性能测评的分值 ξ ， η 的分布如下，则性能更稳定的零件是_____。

ξ	8	9	10
P	0.3	0.2	0.5
η	8	9	10
P	0.2	0.4	0.4

【答案】乙

【详解】由题意知： $E(\xi)=8 \times 0.3+9 \times 0.2+10 \times 0.5=9.2$ ，

$E(\eta)=8 \times 0.2+9 \times 0.4+10 \times 0.4=9.2$ ，

所以 $D(\xi)=0.3 \times (8-9.2)^2+0.2 \times (9-9.2)^2+0.5 \times (10-9.2)^2=0.76$ ，

$$D(\eta) = 0.2 \times (8 - 9.2)^2 + 0.4 \times (9 - 9.2)^2 + 0.4 \times (10 - 9.2)^2 = 0.56,$$

因为 $D(\eta) < D(\xi)$ ，所以乙更稳定。

故答案为:乙。

知识点 3: 求离散型随机变量 X 的方差步骤

- (1) 理解离散型随机变量 X 的意义，写出 X 所有可能的取值。
- (2) 判断离散型随机变量 X 是否服从特殊分布（如两点分布等）。若服从特殊分布，则可利用公式直接求解；若不服从特殊分布，则继续下面步骤。
- (3) 求出离散型随机变量 X 取每个值的概率 $P(X = x_i)$ 。
- (4) 写出离散型随机变量 X 的分布列。
- (5) 利用均值的定义求 $E(X)$ 。
- (6) 利用 $D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$ 求方差。

其中求均值 $E(X)$ 的关键是写出离散型随机变量 X 的分布列，前提是准确列出 X 所有可能的取值，并真正理解 X 取值的意义。

04

题型精讲

题型 01 求离散型随机变量的方差、标准差

【典例 1】（2024·全国·高二假期作业）甲乙两人进行定点投篮游戏，投篮者若投中，则继续投篮，否则由对方投篮，第一次由甲投；已知每次投篮甲、乙命中的概率分别为 $\frac{1}{3}$ ， $\frac{3}{4}$ 。在前 3 次投篮中，乙投篮的次数为 ξ ，求随机变量 ξ 的概率分布、数学期望和方差。

【答案】 分布列见解析，均值为 $\frac{25}{18}$ ，方差为 $\frac{149}{324}$ 。

【详解】 依题意， ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2，

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}; \quad P(\xi = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{18}; \quad P(\xi = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

所以 ξ 的概率分布为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{2}$

$$\text{数学期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{18},$$

方差 $D(\xi) = (0 - \frac{25}{18})^2 \times \frac{1}{9} + (1 - \frac{25}{18})^2 \times \frac{7}{18} + (2 - \frac{25}{18})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{149}{324}$.

【典例 2】（2024 下·全国·高二随堂练习）袋中有形状、大小完全相同的 3 个球，编号分别为 1，2，3. 用 X 表示取出的 2 个球中的最大号码，有放回地从袋中取两次，每次取 1 个球

(1) 写出 X 的分布列；

(2) 求 X 的均值与方差.

【答案】(1)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

(2) $E(X) = \frac{22}{9}$; $D(X) = \frac{38}{81}$

【详解】(1) 题意知 X 的可能取值为 1，2，3，

当 $X=1$ 时，有 (1,1) 一种情况；

当 $X=2$ 时，有 (1,2)，(2,1)，(2,2) 三种情况；

当 $X=3$ 时，有 (1,3)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3) 五种情况；

则 $P(X=1) = \frac{1}{9}$, $P(X=2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(X=3) = \frac{5}{9}$,

所以 X 的分布列：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

(2) X 的均值为： $E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{5}{9} = \frac{22}{9}$,

方差为 $D(X) = \left(\frac{22}{9} - 1\right)^2 \times \frac{1}{9} + \left(2 - \frac{22}{9}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(3 - \frac{22}{9}\right)^2 \times \frac{5}{9} = \frac{38}{81}$.

【典例 3】（2024·全国·高三专题练习）甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局. 三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军，已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5，0.4，0.8，各项目的比赛结果相互独立.

(1) 求甲学校获得冠军的概率；

(2) 用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望.

(3) 设用 Y 表示甲学校的总得分，比较 DX 和 DY 的大小（直接写出结果）.

【答案】(1) 0.6

(2) 分布列见解析， X 的期望为 13

(3) $DX = DY$

【详解】(1) 甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5, 0.4, 0.8, 可以得到两个学校每场比赛获胜的概率如下表:

	第一场比赛	第二场比赛	第三场比赛
甲学校获胜概率	0.5	0.4	0.8
乙学校获胜概率	0.5	0.6	0.2

甲学校要获得冠军, 需要在 3 场比赛中至少获胜 2 场,

① 甲学校 3 场全胜, 概率为: $P_1 = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16$,

② 甲学校 3 场获胜 2 场败 1 场, 概率为: $P_2 = 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.44$,

所以甲学校获得冠军的概率为: $P = P_1 + P_2 = 0.6$;

(2) 乙学校的总得分 X 的可能取值为: 0, 10, 20, 30, 其概率分别为:

$$P(X=0) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16,$$

$$P(X=10) = 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.44,$$

$$P(X=20) = 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.34,$$

$$P(X=30) = 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.06,$$

则 X 的分布列为:

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

X 的期望 $EX = 0 \times 0.16 + 10 \times 0.44 + 20 \times 0.34 + 30 \times 0.06 = 13$;

(3) 甲学校的总得分 Y 的可能取值为: 0, 10, 20, 30, 其概率分别为:

$$P(Y=0) = 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.06,$$

$$P(Y=10) = 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.34,$$

$$P(Y=20) = 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.44,$$

$$P(Y=30) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16,$$

则 Y 的分布列为:

Y	0	10	20	30
P	0.06	0.34	0.44	0.16

Y 的期望 $EY = 0 \times 0.06 + 10 \times 0.34 + 20 \times 0.44 + 30 \times 0.16 = 17$;

$$\text{故 } DY = (0-17)^2 \times 0.06 + (10-17)^2 \times 0.34 + (20-17)^2 \times 0.44 + (30-17)^2 \times 0.16 = 65,$$

$$\text{由 (2) 可得 } DX = (0-13)^2 \times 0.16 + (10-13)^2 \times 0.44 + (20-13)^2 \times 0.34 + (30-13)^2 \times 0.06 = 65,$$

故 $DX = DY$.

【变式 1】 (2024·全国·高二假期作业) 甲、乙两人进行定点投篮游戏, 投篮者若投中, 则继续投篮, 否则由对方投篮; 第一次由甲投篮, 已知每次投篮甲、乙命中的概率分别为 $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$. 在前 3 次投篮中, 乙投篮的次数为 X , 求 X 的概率分布、均值及标准差.

【答案】 分布列见解析, 均值为 $\frac{25}{18}$, 标准差为 $\frac{\sqrt{149}}{18}$

【详解】 由题意, 得 X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}; P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{18}; P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2};$$

故 X 的概率分布为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{7}{18}+2\times\frac{1}{2}=\frac{25}{18},$$

$$D(X)=\left(0-\frac{25}{18}\right)^2\times\frac{1}{9}+\left(1-\frac{25}{18}\right)^2\times\frac{7}{18}+\left(2-\frac{25}{18}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{149}{324}, \text{ 所以 } \sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{149}}{18}.$$

【变式 2】 (2024·全国·高三专题练习) 小王去自动取款机取款, 发现自己忘记了 6 位密码的最后一位数字, 他决定从 0~9 中不重复地随机选择 1 个进行尝试, 直到输对密码, 或者输错三次银行卡被锁定为止.

(1) 求小王的该银行卡被锁定的概率;

(2) 设小王尝试输入该银行卡密码的次数为 X , 求 X 的分布列、数学期望及方差.

【答案】 (1) $\frac{7}{10}$

(2) 分布列见解析, 数学期望 $\frac{27}{10}$, 方差 $\frac{41}{100}$.

【详解】 (1) 设“小王的该银行卡被锁定”为事件 A ,

$$\text{则 } P(A)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}.$$

(2) 由题意, X 的所有可能取值为 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(X=1)=\frac{1}{10}, P(X=2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}, P(X=3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times 1=\frac{4}{5},$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

所以数学期望 $E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{4}{5} = \frac{27}{10}$,

方差 $D(X) = \left(1 - \frac{27}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} + \left(2 - \frac{27}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} + \left(3 - \frac{27}{10}\right)^2 \times \frac{4}{5} = \frac{41}{100}$.

【变式 3】 (2023 下·湖北宜昌·高二校考阶段练习) 新高考数学试卷中多选题规定: 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分. 在做数学卷多选题时考生通常有以下两种策略: 策略 A: 为避免有选错得 0 分, 在四个选项中只选出一个自己最有把握的选项, 将多选题当作“单选题”来做; 策略 B: 争取得 5 分, 选出自己认为正确的全部选项, 本次考试前, 某同学通过模拟训练得出其在两种策略下作完成下面小题的情况如下表:

策略		概率		每题耗时 (分钟)
		第 11 题	第 12 题	
A	选对选项	0.8	0.5	3
B	部分选对	0.6	0.2	6
	全部选对	0.3	0.7	

已知该同学作答两题的状态互不影响, 若该同学此次考试决定用以下方案: 第 11 题采用策略 B, 第 12 题采用策略 A, 设他这两题得分之和为 X , 求 X 的分布列、均值及方差.

【答案】 分布列见解析, 均值为 3.7, 方差为 3.61.

【详解】 设事件 B_1 为“第 11 题得 0 分”, 事件 B_2 为“第 11 题得 2 分”, 事件 B_3 为“第 11 题得 5 分”, 事件 A_1 为“第 12 题得 0 分”, 事件 A_2 为“第 12 题得 2 分”,

则 $P(B_1) = 0.1$, $P(B_2) = 0.6$, $P(B_3) = 0.3$, $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.5$,

由题意知, X 的可能取值为 0, 2, 4, 5, 7,

所以 $P(X=0) = P(B_1A_1) = 0.1 \times 0.5 = 0.05$,

$P(X=2) = P(B_1A_2 + B_2A_1) = 0.1 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 = 0.35$,

$P(X=4) = P(B_2A_2) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$,

$P(X=5) = P(B_3A_1) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$,

$P(X=7) = P(B_3A_2) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$,

所以 X 的分布列为

X	0	2	4	5	7
P	0.05	0.35	0.3	0.15	0.15

所以 $E(X) = 0 \times 0.05 + 2 \times 0.35 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.15 + 7 \times 0.15 = 3.7$,

$$D(X) = (0-3.7)^2 \times 0.05 + (2-3.7)^2 \times 0.35 + (4-3.7)^2 \times 0.3 + (5-3.7)^2 \times 0.15 + (7-3.7)^2 \times 0.15 = 3.61.$$

题型 02 离散型随机变量的方差公式及性质

【典例 1】（2024·全国·高二假期作业）已知随机变量 X 的分布列如表：

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	m	n

若 $E(X) = 0$ ，则 $D(3X-1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】12

【详解】由 $E(X) = 0$ ， $\therefore E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times m + 2 \times n = -\frac{1}{2} + m + 2n = 0$ ①，

又由 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + n + m = 1$ ②，

联立 ①② 得
$$\begin{cases} m = \frac{1}{6} \\ n = \frac{1}{6} \end{cases},$$

所以 $D(X) = (-1-0)^2 \times \frac{1}{2} + (0-0)^2 \times \frac{1}{6} + (1-0)^2 \times \frac{1}{6} + (2-0)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$ ，

则 $D(3X-1) = 3^2 \times D(X) = 12$.

故答案为：12.

【典例 2】（2024 上·陕西渭南·高二校考期末）随机变量 X 的分布列如下表，则 $E(2X-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

$D(2X-1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

X	0	1	2
P	0.3	p	0.3

【答案】1 2.4

【详解】由题知： $p = 1 - 0.3 - 0.3 = 0.4$ ， $E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1$ ，

$D(X) = (0-1)^2 \times 0.3 + (1-1)^2 \times 0.4 + (2-1)^2 \times 0.3 = 0.6$.

$E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 1$ ， $D(2X-1) = 4D(X) = 2.4$.

故答案为：1，2.4

【典例 3】（2024·全国·高三专题练习）离散型随机变量 X 的分布为：

X	0	1	2	4	5
P	q	0.3	0.2	0.2	0.1

若离散型随机变量 Y 满足 $Y = 2X + 1$ ，则下列结果正确的为_____.

① $E(X)=2$; ② $E(Y)=4$; ③ $D(X)=2.8$; ④ $D(Y)=14$.

【答案】①③

【详解】由离散型随机变量 X 的分布列的性质, 可得 $q=1-0.3-0.2-0.2-0.1=0.2$,

则 $E(X)=0 \times 0.2+1 \times 0.3+2 \times 0.2+4 \times 0.2+5 \times 0.1=2$,

$D(X)=(0-2)^2 \times 0.2+(1-2)^2 \times 0.3+(2-2)^2 \times 0.2+(4-2)^2 \times 0.2+(5-2)^2 \times 0.1=2.8$,

所以①③正确;

又由离散型随机变量 Y 满足 $Y=2X+1$, 所以 $E(Y)=2E(X)+1=4+1=5$,

$D(Y)=2^2 D(X)=4 \times 2.8=11.2$, 所以②④错误,

故答案为: ①③.

【变式 1】(2024 上·辽宁·高二盘锦市高级中学校联考期末) 设随机变量 X 的方差 $D(X)=3$, 则 $D(2X-3)$ 的值为_____.

【答案】12

【详解】 $D(2X-3)=2^2 D(X)=2^2 \times 3=12$

故答案为: 12

【变式 2】(2024·全国·高三专题练习) 设样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的均值和方差分别为 1 和 4, 若 $y_i = mx_i + 3$, $i=1, 2, \dots, 10$, 且 $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ 的均值为 5, 则方差为_____.

【答案】16

【详解】由题设 $E(Y)=E(mX+3)=mE(X)+3=m+3=5$, 则 $m=2$,

所以 $D(Y)=D(mX+3)=m^2 D(X)=4 \times 4=16$.

故答案为: 16

【变式 3】(2024·全国·高三专题练习) 随机变量 X 的分布列如表所示, 若 $E(X)=\frac{1}{3}$, 则 $D(3X-2)=$ _____.

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	a	b

【答案】5

【详解】依题意可得
$$\begin{cases} a+b+\frac{1}{6}=1 \\ -1 \times \frac{1}{6} + 0 \times a + 1 \times b = \frac{1}{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases},$$

所以 $D(X)=\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(0-\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$,

所以 $D(3X-2) = 3^2 D(X) = 9 \times \frac{5}{9} = 5$.

故答案为: 5.

题型 03 两点分布的方差

【典例 1】(2023·全国·高二专题练习) 已知随机变量 ξ 满足 $P(\xi=0)=1-p$, $P(\xi=1)=p$, 其中 $0 < p < 1$. 令随机变量 $\eta = |\xi - E(\xi)|$, 则 ()

- A. $E(\eta) > E(\xi)$ B. $E(\eta) < E(\xi)$
C. $D(\eta) > D(\xi)$ D. $D(\eta) < D(\xi)$

【答案】D

【详解】随机变量 ξ 满足 $P(\xi=0)=1-p$, $P(\xi=1)=p$, 其中 $0 < p < 1$.

则随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1
P	$1-p$	p

所以 $E(\xi) = p$, $D(\xi) = p(1-p)$

随机变量 $\eta = |\xi - E(\xi)|$,

所以当 $\xi=0$ 时, $\eta = |\xi - E(\xi)| = p$, 当 $\xi=1$ 时, $\eta = |\xi - E(\xi)| = 1-p$

所以随机变量 $\eta = |\xi - E(\xi)|$ 的分布列如下表所示(当 $p=0.5$ 时, η 只有一个情况, 概率为 1):

η	p	$1-p$
P	$1-p$	p

则 $E(\eta) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$

$$\begin{aligned} D(\eta) &= [p - 2p(1-p)]^2 \cdot (1-p) + [1-p - 2p(1-p)]^2 \cdot p \\ &= p(1-p)(2p-1)^2 \end{aligned}$$

当 $E(\xi) = E(\eta)$ 即 $p = 2p(1-p)$, 解得 $p = \frac{1}{2}$. 所以 A、B 错误.

$$\begin{aligned} D(\xi) - D(\eta) &= p(1-p) - p(1-p)(2p-1)^2 \\ &= 4p^2(1-p)^2 > 0 \text{ 恒成立.} \end{aligned}$$

所以 C 错误, D 正确

故选: D

【变式 1】(2023 下·广东中山·高二统考期末) 已知离散型随机变量 X 服从两点分布, 且

$P(X=0)=3-4P(X=1)$ ，则随机变量 X 的方差为_____.

【答案】 $\frac{2}{9}$

【详解】因为离散型随机变量 X 服从两点分布，设 $P(X=0)=p_1$ ，所以 $P(X=1)=1-p_1$ ，

所以，代入 $P(X=0)=3-4P(X=1)$ 有： $p_1=3-4(1-p_1)$ ，

解得： $p_1=\frac{1}{3}$ ， $P(X=1)=1-p_1=\frac{2}{3}$ ，

因为离散型随机变量 X 服从两点分布，所以 $D(X)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ 。

故答案为： $\frac{2}{9}$ 。

题型 04 方差的实际应用

【典例 1】（2023 上·全国·高三专题练习）甲、乙两种品牌的手表，它们的日走时误差分别为 X 和 Y (单位：s)，其分布列为

甲品牌的走时误差分布列

X	-1	0	1
P	0.1	0.8	0.1

乙品牌的走时误差分布列

Y	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

试对两种品牌手表的性能作出描述：_____.

【答案】 甲种手表的性能更好，更稳定

【详解】由甲品牌的走时误差分布列，可得：

$$E(X)=-1\times 0.1+0\times 0.8+1\times 0.1=0,$$

$$D(X)=(-1-0)^2\times 0.1+(0-0)^2\times 0.8+(1-0)^2\times 0.1=0.2;$$

由乙品牌的走时误差分布列，可得：

$$E(Y)=-2\times 0.1+(-1)\times 0.2+0\times 0.4+1\times 0.2+2\times 0.1=0,$$

$$D(Y)=(-2)^2\times 0.1+(-1)^2\times 0.2+0^2\times 0.4+1^2\times 0.2+2^2\times 0.1=1.2,$$

则甲、乙两种手表走时误差的期望一样，但甲种手表的方差小于乙种手表的方差，所以认为甲种手表的性能更好，更稳定。

【典例 2】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/067035014113006112>