

2024 届云南省红河州云南省蒙自一中高三期末预热联考数学试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $C = \frac{\pi}{3}$, 若 $\vec{m} = (c - \sqrt{6}, a - b)$, $\vec{n} = (a - b, c + \sqrt{6})$, 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. 3 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

2. 已知 m, n 为两条不重合直线, α, β 为两个不重合平面, 下列条件中, $\alpha \perp \beta$ 的充分条件是 ()

- A. $m \parallel n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ B. $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$
C. $m \perp n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ D. $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$

3. 设 $P = \{y | y = -x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, $Q = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$, 则

- A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$
C. $C_R P \subseteq Q$ D. $Q \subseteq C_R P$

4. 若关于 x 的不等式 $\left(\frac{1}{x}\right)^x \leq \frac{1}{27}$ 有正整数解, 则实数 k 的最小值为 ()

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

5. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

6. 若复数 $(2a + i)(1 + i)$ (i 为虚数单位) 在复平面内所对应的点在虚轴上, 则实数 a 为 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 已知复数 $z = 1 - i$, $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数, 则 $\frac{1+z}{\bar{z}} =$ ()

- A. $\frac{3+i}{2}$ B. $\frac{1+i}{2}$ C. $\frac{1-3i}{2}$ D. $\frac{1+3i}{2}$

8. 在平面直角坐标系中, 若不等式组
$$\begin{cases} x-4y+4 \leq 0 \\ 2x+y-10 \leq 0 \\ 5x-2y+2 \geq 0 \end{cases}$$
 所表示的平面区域内存在点 (x_0, y_0) , 使不等式 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$

成立, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -\frac{5}{2}]$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ C. $[4, +\infty)$ D. $(-\infty, -4]$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 虚轴的两个端点分别为 B_1, B_2 , 若四边

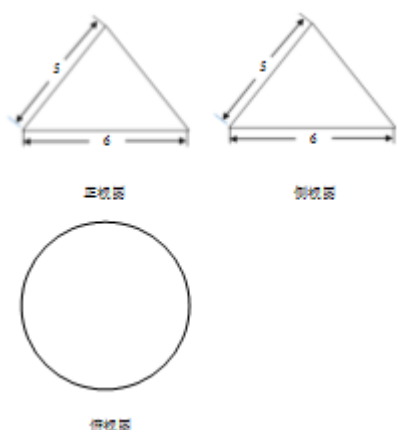
形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π , 则双曲线焦距的最小值为 ()

- A. 8 B. 16 C. $6\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

10. 复数 $z = \frac{(i-1)^2 + 4}{i+1}$ 的虚部为 ()

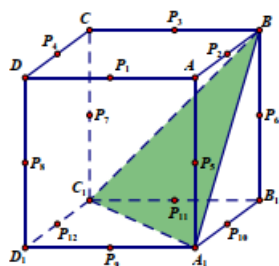
- A. -1 B. -3 C. 1 D. 2

11. 如图所示, 已知某几何体的三视图及其尺寸 (单位: cm), 则该几何体的表面积为 ()



- A. $15\pi \text{ cm}^2$ B. $21\pi \text{ cm}^2$
C. $24\pi \text{ cm}^2$ D. $33\pi \text{ cm}^2$

12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, P_i ($i=1, 2, \dots, 12$) 是棱的中点, 在任意两个中点的连线中, 与平面 A_1C_1B 平行的直线有几条 ()



A. 36 B. 21 C. 12 D. 6

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，若 $a_3 - a_2 = 5$ ，则 $a_4 + 8a_2$ 的最小值为_____.

14. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(4, \sigma^2)$ ， $P(X < 6) = 0.78$ ，则 $P(X \leq 2) =$ _____.

15. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是棱 DD_1 的中点， F 是侧面 CDD_1C_1 上的动点，且 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE ，记 B_1 与 F 的轨迹构成的平面为 α .

① $\exists F$ ，使得 $B_1F \perp CD_1$ ；

② 直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正切值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ；

③ α 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$ ；

④ 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的各个侧面中，与 α 所成的锐二面角相等的侧面共四个.

其中正确命题的序号是_____。（写出所有正确命题的序号）

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a + \sqrt{2}b = 2c$ ，设角 C 的角平分线交 AB 于点 D ，则 $\cos C$ 的值最小时， $\frac{BD}{AD} =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $2\sqrt{3}\sin^2 \frac{A}{2} + \sin A - \sqrt{3} = 0$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 已知 $\triangle ABC$ 外接圆半径 $R = \sqrt{3}$ ， $AC = \sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1, x \in R$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $f(\frac{A}{2}) = 1$ 且 A 为锐角， $a = 3$ ， $\sin C = 2\sin B$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x - a| (a \in R)$.

(1) 当 $a = 2$ 时，若 $f(x) + |3x - 2| \geq M$ 恒成立，求 M 的最大值；

(2) 记 $f(x) \leq |2x + 1| - |2x - 1|$ 的解集为集合 A ，若 $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subseteq A$ ，求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知动点 M 到定点 $(1, 0)$ 的距离比到 y 轴的距离多 1.

(1) 求动点 M 的轨迹 C 的方程;

(2) 设 A, B 是轨迹 C 在 $(x \geq 0)$ 上异于原点 O 的两个不同点, 直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β , 当 α, β 变化且 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ 时, 证明: 直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x - a\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) x \in (0, +\infty)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 曲线 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 $3(e^2 - 1)$.

(i) 求 a ;

(ii) 若 $(x - k)f'(x) \geq -(x + 1)^2$, 求整数 k 的最大值.

22. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{3}, 1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $M(4, 0)$ 的直线交椭圆于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, 在线段 AB 上取点 D , 使 $\overrightarrow{AD} = -\lambda \overrightarrow{DB}$, 求证: 点 D 在定直线上.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

由 $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{n}$, 可得 $(a - b)^2 = (c - \sqrt{6})(c + \sqrt{6})$, 化简利用余弦定理可得 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$, 解得 ab . 即可得出三角形面积.

【详解】

解: $\because \overrightarrow{m} = (c - \sqrt{6}, a - b), \overrightarrow{n} = (a - b, c + \sqrt{6})$, 且 $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{n}$,

$\therefore (a - b)^2 = (c - \sqrt{6})(c + \sqrt{6})$, 化为: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab - 6$.

$$\therefore \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - 6}{2ab} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } ab = 6.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了向量共线定理、余弦定理、三角形面积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

2、D

【解析】

根据面面垂直的判定定理，对选项中的命题进行分析、判断正误即可.

【详解】

对于 A，当 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ 时，则平面 α 与平面 β 可能相交， $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件，故 A 错误；

对于 B，当 $m \parallel n$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ 时，则 $\alpha \parallel \beta$ ，故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件，故 B 错误；

对于 C，当 $m \perp n$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ 时，则平面 α 与平面 β 相交， $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件，故 C 错误；

对于 D，当 $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ，则一定能得到 $\alpha \perp \beta$ ，故 D 正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查了面面垂直的判断问题，属于基础题.

3、C

【解析】

解：因为 $P = \{y | y = -x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\} = \{y | y \leq 1\}$ ， $Q = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\} = \{y | y > 0\}$ ，因此选 C

4、A

【解析】

根据题意可将 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{k}{x}} \leq \frac{1}{27}$ 转化为 $\frac{\ln x}{x} \geq \frac{3 \ln 3}{k}$ ，令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，利用导数，判断其单调性即可得到实数 k 的最小值.

【详解】

因为不等式有正整数解, 所以 $x > 0$, 于是 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{k}{x}} \leq \frac{1}{27}$ 转化为 $\frac{k \ln x}{x} \geq 3 \ln 3$, $x = 1$ 显然不是不等式的解, 当 $x > 1$ 时,

$\ln x > 0$, 所以 $\frac{k \ln x}{x} \geq 3 \ln 3$ 可变形为 $\frac{\ln x}{x} \geq \frac{3 \ln 3}{k}$.

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 而 $2 < e < 3$, 所以

当 $x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f_{\max} = \max\{f(2), f(3)\} = \frac{\ln 3}{3}$, 故 $\frac{\ln 3}{3} \geq \frac{3 \ln 3}{k}$, 解得 $k \geq 9$.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查不等式能成立问题的解法, 涉及到对数函数的单调性的应用, 构造函数法的应用, 导数的应用等, 意在考查学生的转化能力, 属于中档题.

5、C

【解析】

根据并集的求法直接求出结果.

【详解】

$\because A = \{x \mid -1 < x < 2\}, B = \{x \mid x > 1\}$,

$\therefore A \cup B = (-1, +\infty)$,

故选 C.

【点睛】

考查并集的求法, 属于基础题.

6、D

【解析】

利用复数代数形式的乘除运算化简, 再由实部为 0 求得 a 值.

【详解】

解: $Q(2a + i)(1 + i) = (2a - 1) + (2a + 1)i$ 在复平面内所对应的点在虚轴上,

$\therefore 2a - 1 = 0$, 即 $a = \frac{1}{2}$.

故选 D.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算, 考查复数的代数表示法及其几何意义, 是基础题.

7、C

【解析】

求出 $\bar{z}$ ，直接由复数的代数形式的乘除运算化简复数.

【详解】

$$\frac{1+z}{\bar{z}} = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1-3i}{2}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查复数的代数形式的四则运算，共轭复数，属于基础题.

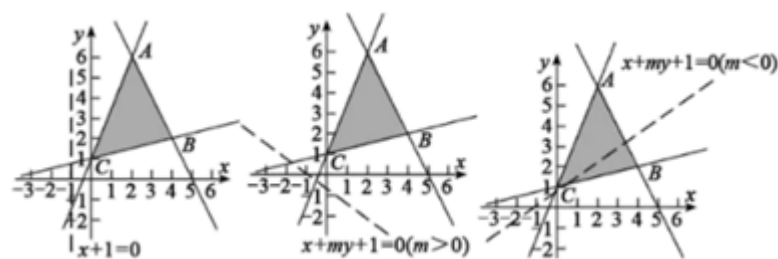
8、B

【解析】

依据线性约束条件画出可行域，目标函数 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$ 恒过 $D(-1, 0)$ ，再分别讨论 m 的正负进一步确定目标函数与可行域的基本关系，即可求解

【详解】

作出不等式对应的平面区域，如图所示：



其中 $A(2, 6)$ ，直线 $x + my + 1 = 0$ 过定点 $D(-1, 0)$ ，

当 $m = 0$ 时，不等式 $x + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + 1 = 0$ 及其左边的区域，不满足题意；

当 $m > 0$ 时，直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} < 0$ ，

不等式 $x + my + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + my + 1 = 0$ 下方的区域，不满足题意；

当 $m < 0$ 时，直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} > 0$ ，

不等式 $x + my + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + my + 1 = 0$ 上方的区域，

要使不等式组所表示的平面区域内存在点 (x_0, y_0) ，

使不等式 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$ 成立，只需直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} \leq k_{AD} = 2$ ，解得 $m \leq -\frac{1}{2}$.

综上可得实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$,

故选: B.

【点睛】

本题考查由目标函数有解求解参数取值范围问题, 分类讨论与数形结合思想, 属于中档题

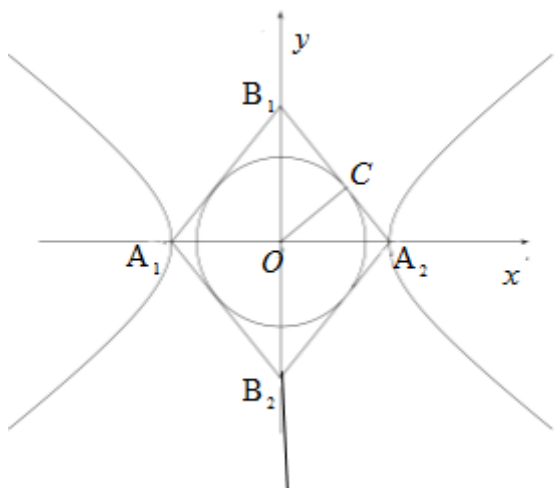
9、D

【解析】

根据题意画出几何关系, 由四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积求得半径, 结合四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 面积关系求得 c 与 ab 等量关系, 再根据基本不等式求得 c 的取值范围, 即可确定双曲线焦距的最小值.

【详解】

根据题意, 画出几何关系如下图所示:



设四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆半径为 r , 双曲线半焦距为 c ,

则 $|OA_2| = a, |OB_1| = b$,

所以 $|A_2B_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$,

四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π ,

则 $18\pi = \pi r^2$, 解得 $|OC| = r = 3\sqrt{2}$,

则 $S_{\text{四边形}A_1B_1A_2B_2} = \frac{1}{2} \cdot |A_1A_2| \cdot |B_1B_2| = 4 \times \frac{1}{2} \cdot |A_2B_1| \cdot |OC|$,

即 $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 4 \times \frac{1}{2} \cdot c \cdot 3\sqrt{2}$

故由基本不等式可得 $c = \frac{ab}{3\sqrt{2}} \leq \frac{\frac{a^2 + b^2}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{c^2}{6\sqrt{2}}$, 即 $c \geq 6\sqrt{2}$,

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

故焦距的最小值为 $12\sqrt{2}$.

故选: D

【点睛】

本题考查了双曲线的定义及其性质的简单应用, 圆锥曲线与基本不等式综合应用, 属于中档题.

10、B

【解析】

对复数 z 进行化简计算, 得到答案.

【详解】

$$z = \frac{(i-1)^2 + 4}{i+1} = \frac{4-2i}{1+i} = \frac{(4-2i)(1-i)}{2} = 1-3i$$

所以 z 的虚部为 -3

故选 B 项.

【点睛】

本题考查复数的计算, 虚部的概念, 属于简单题.

11、C

【解析】

由三视图知, 该几何体是一个圆锥, 其母线长是 5 cm , 底面直径是 6 cm , 据此可计算出答案.

【详解】

由三视图知, 该几何体是一个圆锥, 其母线长是 5 cm , 底面直径是 6 cm ,

$\therefore$ 该几何体的表面积 $S = \pi \times 3^2 + \pi \times 3 \times 5 = 24\pi$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查了三视图的知识, 几何体的表面积的计算. 由三视图正确恢复几何体是解题的关键.

12、B

【解析】

先找到与平面 A_1C_1B 平行的平面, 利用面面平行的定义即可得到.

【详解】

考虑与平面 A_1C_1B 平行的平面 $P_1P_4P_8$, 平面 $P_{10}P_{11}P_6$, 平面 $P_9P_5P_2P_3P_7P_{12}$,

共有 $C_3^2 + C_3^2 + C_6^2 = 21$,

故选: B.

【点睛】

本题考查线面平行的判定定理以及面面平行的定义, 涉及到了简单的组合问题, 是一中档题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13、40

【解析】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 根据 $a_3 - a_2 = 5$, 可得 $a_1 = \frac{5}{q(q-1)}$, 因为

$$a_4 + 8a_2 = a_1 q^3 + 8a_1 q = \frac{5(q^2 + 8)}{q-1} = 5 \left(q-1 + \frac{9}{q-1} + 2 \right), \text{ 根据均值不等式, 即可求得答案.}$$

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{Q } a_3 - a_2 = 5,$$

$$\therefore a_1 = \frac{5}{q(q-1)},$$

Q 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项为正数,

$$\therefore q > 1,$$

$$\begin{aligned} \therefore a_4 + 8a_2 &= a_1 q (q^2 + 8) = \frac{5(q^2 + 8)}{q-1} \\ &= 5 \left(q-1 + \frac{9}{q-1} + 2 \right) \geq 40, \text{ 当且仅当 } q-1=3, \end{aligned}$$

即 $q=4$ 时, $a_4 + 8a_2$ 取得最小值 40.

故答案为: 40.

【点睛】

本题主要考查了求数列值的最值问题, 解题关键是掌握等比数列通项公式和灵活使用均值不等式, 考查了分析能力和计算能力, 属于中档题.

14、0.22.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/067046125044006142>