四川省雅安市神州天立学校2024届高三下学期高考冲刺热身（四）数学（理）试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$M=\{1,2,3\}$，$N=\{0,1,2,3,4,7\}$，若$M\subseteq A\subseteq N$，则满足集合A的个数为（　）

A．4　　B．6　　C．7　　D．8

2．若$zi+z=1+3i$，则$z\bar{z}=$（　）

A．2　　B．1　　C．$\sqrt{5}$　　D．5

3．在$\triangle ABC$中，$AB=4$，$AC=3$，且$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　）

A．16　　B．-16　　C．20　　D．-20

4．直线l_1，l_2的倾斜角分别为α，β，则“$\alpha=\beta$”是“$\tan\alpha=\tan\beta$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知$\alpha\in(0,\pi)$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{7}$，则$\sin\alpha=$（　）

A．$\frac{11}{14}$　　B．$\frac{13}{14}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{14}$　　D．$\frac{5\sqrt{3}}{14}$

6．已知抛物线$y^2=2px(p>0)$上一点M到其准线及对称轴的距离分别为3和$2\sqrt{2}$，则$p=$（　）

A．2　　B．2或4　　C．1或2　　D．1

7．设命题$p:\exists m\in\mathrm{R}$，使$f(x)=(m-1)x^{m^2-4m+3}$是幂函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减；命题$q:\forall x\in(2,+\infty),2^x>x^2$，则下列命题为真的是（　）

A．$p\wedge(\neg q)$　　B．$(\neg p)\wedge q$　　C．$p\wedge q$　　D．$(\neg p)\vee q$

8．已知数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}-2=a_n\cdot a_{n+1}$，且$a_1=3$，则$a_{2023}=$（　）

A．3　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．$\frac{4}{3}$

9．设函数$f(x)$为偶函数，且当$x\geq 0$时，$f(x)=e^x-\cos x$，则不等式$f(2x-1)-f(x-2)>0$的解集为（　）

A．$(-1,1)$　　B．$(-\infty,-3)$

C．$(-3,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)\cup(-\infty,-1)$

10．将椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$上所有点的横坐标伸长为原来的$m\left(m>1\right)$倍，纵坐标伸长为原来的$n\left(n>1\right)$倍得到椭圆$C_2$，设$C_1,C_2$的离心率分别为$e_1,e_2$，则下列说法正确的是（　）

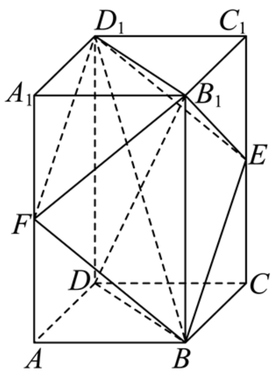
A．若$m<n$，则$e_2<e_1$　　B．若$m>n$，则$e_2>e_1$

C．若$e_2>e_1$，则$m>n$　　D．若$e_2=e_1$，则$m=n$

11．若实数x，y满足$4\ln x+2\ln y\geq x^2+4y-4$，则（　）

A．$xy=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$x+y=\sqrt{2}$　　C．$x+y=1+\sqrt{2}$　　D．$x^3y=1$

12．如图，已知在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3,AD=4,AA_1=5$，点E为棱CC_1上的一个动点，平面BED_1与棱AA_1交于F，则下列说法正确的是（　）



（1）三棱锥B_1-BED_1的体积为20

（2）直线B_1E与平面BB_1D_1D所成角正弦值的最大值为$\frac{3}{5}$

（3）存在唯一的点E，使得$B_1D\perp$平面BED_1，且$CE=5$

（4）存在唯一的点E，使截面四边形BED_1F的周长取得最小值$2\sqrt{74}$

A．（1）（2）（3）　B．（2）（3）（4）　C．（2）（3）　D．（2）（4）

二、填空题

13．从6男2女共8名学生中选出队长1人，副队长1人，普通队员1人组成3人服务队，要求服务队中至少有1名女生，共有________种不同的选法.（用数字作答）

14．设x、y满足不等式组$\begin{cases} x-y>-2 \\ 2x+5y\geq 10 \\ 6x+y\leq 30 \end{cases}$，则$z=\dfrac{y-2}{x+3}$的取值范围是________.

15．若函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+x+1$存在极值点，则实数$a$的取值范围为______.

16．已知$\triangle ABC$中，$BC=4$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，若$\triangle ABC$在平面内一点D满足$3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$，则$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$的最大值为_______

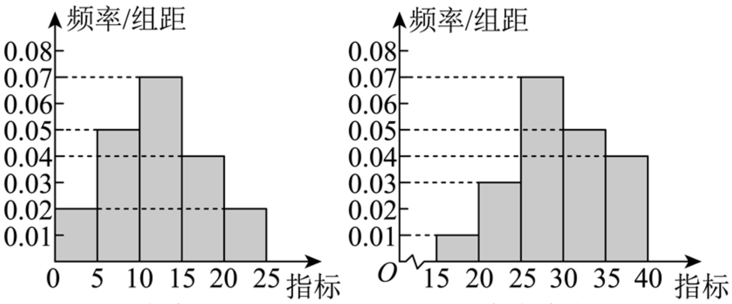
三、解答题

17．已知数列$\left\{a_n\right\}$、$\left\{b_n\right\}$满足$a_1a_2a_3\cdots a_n=3^{b_n}$，若数列$\left\{a_n\right\}$是等比数列，且$a_1=3$，$b_4=4+b_3$.

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$、$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

(2)令$c_n=\dfrac{2b_n}{\left(n+1\right)a_n}$，求$\{c_n\}$的前$n$项和为$S_n$.

18．2023年冬，甲型流感病毒来势汹汹．某科研小组经过研究发现，患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异．在某地的两类人群中各随机抽取20人的该项医学指标作为样本，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



患病者　　　　未患病者

利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值a，将该指标小于a的人判定为阳性，大于或等于a的人判定为阴性．此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为$p(a)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为$q(a)$．假设数据在组内均匀分布，用频率估计概率.

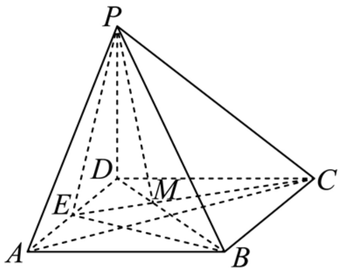
(1)当临界值$a=20$时，求漏诊率$p(a)$和误诊率$q(a)$；

(2)从指标在区间$[20,25]$样本中随机抽取2人，记随机变量X为未患病者的人数，求X的分布列和数学期望；

(3)在该地患病者占全部人口的5%的情况下，记$f(a)$

为该地诊断结果不符合真实情况的概率．当$a\in[20,25]$时，直接写出使得$f(a)$取最小值时的a的值．

19．如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的菱形，$\angle DAB=60^{\circ}$，$PA=PB=PC$．



(1)求证：$AC\perp PB$；

(2)若点E为AD的中点，BD与CE相交于点M，直线PM与底面$ABCD$所成的角为θ，且$\tan\theta=3\sqrt{3}$，求二面角$E-PB-C$的余弦值．

20．已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$A\left(2,1\right)$．

（1）求C的方程：

（2）点M，N在C上，且$AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D为垂足．证明：存在定点Q，使得$\left|DQ\right|$为定值．

21．已知函数$f\left(x\right)=x\left(ax+\ln x-2\right),g\left(x\right)=x\ln x-x-a$，

(1)若$f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$有相同的单调区间，求实数a的值；

(2)若方程$f\left(x\right)=3g\left(x\right)+x+3a-1$有两个不同的实根$x_1,x_2$，证明：$x_1x_2>\mathrm{e}^a$．

22．在直角坐标系xOy中，已知曲线C：$x^2+y^2=x+|y|$（其中$x>0$），曲线C上的点A、B满足$OA\perp OB$，以坐标原点O为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系．

(1)求曲线C的极坐标方程；

(2)求$\triangle OAB$面积的最大值．

23．设a，b，$c\in R$，$a+b+c=0$，$abc=1$．

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$\max\{a，b，c\}$表示a，b，c中的最大值，证明：$\max\{a，b，c\}\geq\sqrt[3]{4}$．

参考答案：

1．D

【分析】根据包含关系，写出所有满足条件的集合 A 即可得解.

【详解】因为 $M \subseteq A \subseteq N$，

所以 A 可以是

$\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,0\},\{1,2,3,7\},\{1,2,3,0,4\},\{1,2,3,0,7\},\{1,2,3,7,4\},\{1,2,3,0,4,7\}$，共 8 个，

故选：D

2．D

【分析】根据复数的四则运算得到 z，再计算 $z\overline{z}$ 即可.

【详解】因为 $z\mathrm{i}+z=1+3\mathrm{i}$，所以 $z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=2+\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=2-\mathrm{i}$，所以 $z\overline{z}=5$.

故选：D.

3．B

【分析】根据垂直，得到 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，从而利用 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$ 求出答案.

【详解】因为 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=0-4^2=-16$.

故选：B

4．B

【分析】根据倾斜角的范围，正切的性质判断"$\alpha=\beta$"与"$\tan\alpha=\tan\beta$"的逻辑关系即可.

【详解】因为直线 l_1，l_2 的倾斜角分别为 α，β，

所以 $\alpha\in[0,\pi),\beta\in[0,\pi)$，

若 $\tan\alpha=\tan\beta$，则 $\alpha=\beta$，

若 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\tan\alpha,\tan\beta$ 都不存在，

所以"$\alpha=\beta$"是"$\tan\alpha=\tan\beta$"的必要不充分条件，

故选：B.

5．A

【分析】确定角度范围得到$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，变换$\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$，展开计算得到答案.

【详解】因为$\alpha\in(0,\pi)$，则$\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，

可得$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

所以$\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{14}$.

故选：A.

6．B

【解析】由题意，得到$\begin{cases}|y_M|=2\sqrt{2}\\ x_M+\frac{p}{2}=3\end{cases}$，结合抛物线方程，即可求出结果.

【详解】因为抛物线$y^2=2px(p>0)$上一点M到其准线及对称轴的距离分别为3和$2\sqrt{2}$，

所以$\begin{cases}|y_M|=2\sqrt{2}\\ x_M+\frac{p}{2}=3\end{cases}$，即$\begin{cases}|y_M|=2\sqrt{2}\\ x_M=3-\frac{p}{2}\end{cases}$，代入抛物线方程可得$8=2p\left(3-\frac{p}{2}\right)$，

整理得$p^2-6p+8=0$，解得$p=2$或$p=4$.

故选：B.

7．A

【分析】根据特称命题与全称命题判断命题p,q的真假，从而可得“或”、“且”、“非”命题的真假得结论.

【详解】对于命题p，当$m=2$时，函数$f(x)=x^{-1}$，是幂函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减，故命题p为真命题；

对于命题q，当$x=3$时，$2^3<3^2$，不满足$\forall x\in(2,+\infty),2^x>x^2$，故命题$q$为假命题.

所以“$p\wedge(\neg q)$”为真命题，“$(\neg p)\wedge q$”为假命题，“$p\wedge q$”为假命题，“$(\neg p)\vee q$”为假命题.

故选：A.

8．B

【分析】由已知可得数列递推式$a_{n+1}=\frac{2}{2-a_n}$，求出其前面几项，可得数列的周期，由此可求得答案.

【详解】由题意数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}-2=a_n\cdot a_{n+1}$，则$a_{n+1}=\frac{2}{2-a_n}$，

故由$a_1=3$，得$a_2=\frac{2}{2-3}=-2,a_3=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2},a_4=\frac{2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3},a_5=\frac{2}{2-\frac{4}{3}}=3$，

由此可知数列$\{a_n\}$的周期为4，

故$a_{2023}=a_{4\times505+3}=a_3=\frac{1}{2}$，

故选：B

9．D

【解析】利用导数判断函数在$[0,+\infty)$的单调性，然后根据奇偶性判断$f(x)$在$(-\infty,0]$的单调性，再利用单调性与奇偶性结合求解不等式.

【详解】当$x\geq0$时，$f(x)=e^x-\cos x$，所以$f'(x)=e^x+\sin x$，因为$x\geq0$，所以$e^x\geq1$，即$f'(x)\geq1+\sin x\geq0$，所以函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，又因为函数$f(x)$为R上的偶函数，所以函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减，在$[0,+\infty)$上单调递增，则不等式

$f(2x-1)-f(x-2)>0$，等价于$|2x-1|>|x-2|$，所以$x<-1$或$x>1$.

故选：D.

【点睛】对于求值或范围的问题，一般先利用函数的奇偶性得出区间上的单调性，再利用其单调性脱去函数的符号“f”，转化为解不等式(组)的问题，若$f(x)$为偶函数，则

$f(-x)=f(x)=f(|x|)$.

10．B

【分析】由已知，可得$C_2:\frac{x^2}{a^2m^2}+\frac{y^2}{b^2n^2}=1(a>b>0)$，由$a$、$b$、$m$、$n$表示出$e_1,e_2$，即可判断.

【详解】由题意知，椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，上所有点的横坐标伸长为原来的$m(m>1)$倍，纵坐标伸长为原来的$n(n>1)$倍得到椭圆$C_2$，

则 $C_2:\frac{x^2}{a^2m^2}+\frac{y^2}{b^2n^2}=1\left(a>b>0\right)$，

若 $m>n,\left(m>1,n>1\right)$，则 $e_1=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},e_2=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2m^2-b^2n^2}}{ma}=\frac{\sqrt{a^2-\frac{n^2}{m^2}b^2}}{a}$，

则 $\frac{n^2}{m^2}<1$，所以 $a^2-\frac{n^2}{m^2}b^2>a^2-b^2$，则 $e_2>e_1$.

若 $m=n,\left(m>1,n>1\right)$，则 $e_2=e_1$；

若 $m<n,\left(m>1,n>1\right)$，则可能出现 $a^2m^2<b^2n^2$，即椭圆焦点在 y 轴上的情况，

此时 $e_2=e_1$，$e_2>e_1$，$e_2<e_1$ 均可能出现.

故选：B.

11．A

【分析】对不等式变形得到 $\ln\left(\frac{1}{2}x^2\cdot 2y\right)\geq\frac{1}{2}x^2+2y-2$，换元后得到 $\ln a-a+1+\left(\ln b-b+1\right)\geq 0$，构造 $g\left(x\right)=\ln x-x+1$，求导研究其单调性，极值最值情况，得到 $g\left(x\right)_{\max}=g\left(1\right)=0$，从而只有 $a=b=1$ 时，即 $g\left(a\right)=g\left(b\right)=0$ 时，满足要求，从而解出 $x=\sqrt{2},y=\frac{1}{2}$，依次判断四个选项.

【详解】因为 $4\ln x+2\ln y\geq x^2+4y-4$，

所以 $2\ln x+\ln y\geq\frac{1}{2}x^2+2y-2$，即 $\ln\left(x^2y\right)\geq\frac{1}{2}x^2+2y-2$，

所以 $\ln\left(\frac{1}{2}x^2\cdot 2y\right)\geq\frac{1}{2}x^2+2y-2$，

令 $\frac{1}{2}x^2=a,2y=b$，

则 $\ln\left(ab\right)\geq a+b-2$，即 $\ln a+\ln b\geq a+b-2$，

所以 $\ln a-a+1+\left(\ln b-b+1\right)\geq 0$，

令 $g\left(x\right)=\ln x-x+1$，则 $g'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$ 单调递增，

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$ 单调递减，

所以 $g\left(x\right)=\ln x-x+1$ 在 $x=1$ 处取得极大值，也是最大值，

$g(x)_{\max}=g(1)=\ln 1-1+1=0$，

要想使得$g(a)+g(b)=0$成立，只有$a=b=1$时，即$g(a)=g(b)=0$时，满足要求，

所以$\frac{1}{2}x^2=1,2y=1$，

由定义域可知：$x>0,y>0$，

解得：$x=\sqrt{2},y=\frac{1}{2}$，

$xy=\frac{\sqrt{2}}{2}$，A选项正确；

$x+y=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$，BC错误.

$x^3y=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}$，D错误；

故选：A.

【点睛】对不等式或方程变形后，利用同构来构造函数解决问题，

常见的同构型：（1）$f(x)=x\mathrm{e}^x\Rightarrow f(\ln x)=\ln x\mathrm{e}^x=x+\ln x$；

（2）$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\mathrm{e}^{x-\ln x}\Rightarrow f(\ln x)=\frac{\mathrm{e}^{\ln x}}{\ln x}=\frac{x}{\ln x}$；

（3）$f(x)=x+\ln x=\ln x\mathrm{e}^x\Rightarrow f(\mathrm{e}^x)=x+\mathrm{e}^x$；

（4）$f(x)=x-\ln x=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{x}\Rightarrow f(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x-x$，

本题难点在于$4\ln x+2\ln y\geq x^2+4y-4$变形为$\ln\left(\frac{1}{2}x^2\cdot 2y\right)\geq\frac{1}{2}x^2+2y-2$，换元后得到

$\ln a-a+1+(\ln b-b+1)\geq 0$，从而构造$g(x)=\ln x-x+1$解决问题.

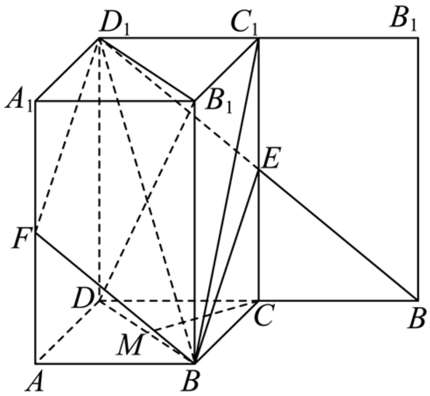
12．D

【分析】对（1），根据三棱锥等体积转换可得$V_{B_1-BED_1}=V_{E-BB_1D_1}$求解判断；对（2），点$E$到平面$BB_1D_1D$的距离等于点$C$到平面$BB_1D_1D$的距离，当$B_1E$最小时即当点$E$与点$C_1$重合时，此时直线$B_1E$与平面$BB_1D_1D$所成角正弦值的最大，求解判断；对（3），若（3）正确，可知点E与点C_1重合，已找出矛盾；对（4），四边形BED_1F为平行四边形，周长取得最小值即$BE+ED_1$最小时，将平面BCC_1B_1与将平面DCC_1D_1放在同一平面内，求得结果.

【详解】对于（1），如图过点C作BD垂线，垂足为M，易知$|MC|=\frac{12}{5}$，

在长方体中，$BB_1 \perp$平面$ABCD$，$CM \subset$平面$ABCD$，所以$BB_1 \perp CM$，又$CM \perp BD$，

$BD \cap BB_1 = B$，$BD, BB_1 \subset$平面BDD_1B_1，所以$MC \perp$平面BDD_1B_1，



$CC_1 // BB_1$，$CC_1 \not\subset$平面BDD_1B_1，$BB_1 \subset$平面BDD_1B_1，

所以$CC_1 //$平面BDD_1B_1，

所以点E到平面平面BDD_1B_1的距离等于点C到平面BDD_1B_1的距离，即为$|MC|$，

三棱锥$B_1 - BED_1$的体积为$V_{B_1-BED_1} = V_{E-BB_1D_1} = \frac{1}{3}S_{\triangle BB_1D_1} \cdot |MC| = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \frac{12}{5} = 10$，

故（1）错误；

对于（2），$\because CC_1 //$平面BB_1D_1D，所以点E到平面BB_1D_1D的距离等于点C到平面BB_1D_1D的距离，距离为$|MC| = \frac{12}{5}$，

所以当B_1E最小时即当点E与点C_1重合时，

此时直线B_1E与平面BB_1D_1D所成角的正弦值最大，最大值为$\frac{\frac{12}{5}}{4} = \frac{3}{5}$，故（2）正确；

对于（3），若$CE = 5$，可知点E与点C_1重合，又因为$DC // D_1C_1$，易知B_1D与DC不垂直，

故B_1D与D_1C_1不垂直，B_1D与平面BED_1不垂直，故（3）错误；

对于（4），四边形BED_1F的周长$= 2(BE + ED_1)$，周长取得最小值即$(BE + ED_1)$最小，

将平面BCC_1B_1与将平面DCC_1D_1放在同一平面内，可知$(BE + ED_1)$最小值为$\sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$，

所以截面四边形BED_1F的周长取得最小值$2\sqrt{74}$，故（4）正确.

综上，说法正确的有（2）（4）.

故选：D.

【点睛】思路点睛：对（1）利用三棱锥等体积转换求解判断，对（2）根据$CC_1//$平面BB_1D_1D，所以点E到平面BB_1D_1D的距离等于点C到平面BB_1D_1D的距离，当B_1E最小时，直线B_1E与平面BB_1D_1D所成角正弦值的最大，判断求解，对（3）利用反证法判断，对（4）四边形BED_1F的周长最小即$BE+ED_1$最小时，将平面BCC_1B_1与将平面DCC_1D_1放在同一平面内，求解即可.

13．216

【分析】根据题意，分为 1 女 2 男和 2 女 1 男，再利用排列、组合求解每类的种数，结合计数原理，即可求解.

【详解】第一类，选 1 女 2 男，有$\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_6^2=30$种，

这 3 人选 2 人作为队长和副队有$A_3^2=6$种，故有$30\times6=180$种；

第二类，选 2 女 1 男，有$\mathrm{C}_2^2\cdot\mathrm{C}_6^1=6$种，这 3 人选 2 人作为队长和副队有$A_3^2=6$种，

故有$6\times6=36$种，根据分类计数原理共有$180+36=216$种，

故答案为：216

14．$\left[-\frac{1}{4},\frac{4}{7}\right)$

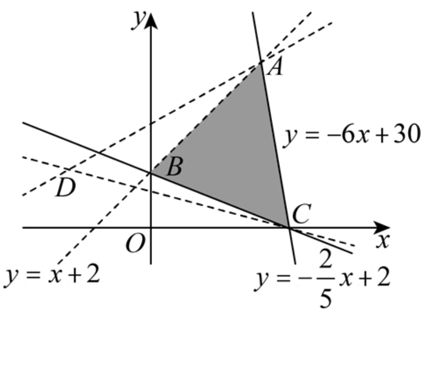
【分析】根据已知的不等式组画出满足不等式组的可行域，分析$z=\frac{y-2}{x+3}$的取值表示的几何意义，结合图象即可得解.

【详解】满足不等式组的(x,y)，在三条直线围成的$\triangle ABC$区域，

其中$y=x+2$与$y=-\frac{2}{5}x+2$交点为$B(0,2)$，

$y=x+2$与$y=-6x+30$的交点为$A(4,6)$，

$y=-\frac{2}{5}x+2$与$y=-6x+30$的交点为$C(5,0)$，如下图示：



$z=\frac{y-2}{x+3}$即三角形区域内的点与$D(-3,2)$形成直线的斜率，

最小值为k_{DC},最大值为k_{DA}，又因为A点处取不到，

故$-\frac{1}{4}=\frac{0-2}{5+3}\le z<\frac{6-2}{4+3}=\frac{4}{7}$.

故答案为：$\left[-\frac{1}{4},\frac{4}{7}\right)$.

15．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

【分析】求导，根据题意知方程$f'(x)=0$有两个不等的实根，可得出$\Delta>0$，从而得解.

【详解】因为$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x+1$，可得$f'(x)=x^2-2ax+1$，

因为函数$f(x)$存在极值点，所以$f'(x)=0$有两不等实根，

则$\Delta=4a^2-4>0$，解得$a<-1$或$a>1$，

所以a的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

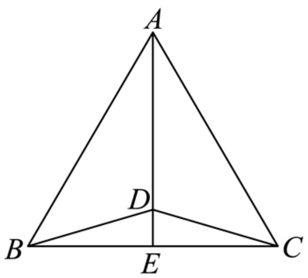
16．$-\frac{184}{49}$

【分析】设BC的中点为E，则根据题意知D为BC边上的中线AE的靠近E的7等分点，

化简得$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\frac{|\overrightarrow{AE}|}{7}\right)^2-4$，利用余弦定理得$AB^2+AC^2=16+AB\cdot AC$，利用基本不等式

可得$AB\cdot AC\le16$，再利用$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，两边平方，化简即可得到答案.

【详解】如图，设BC的中点为E，



因为$3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$，所以$\overrightarrow{DA}=-3(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})=-6\overrightarrow{DE}$，

所以D为BC边上的中线AE的靠近E的7等分点，

所以$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB})\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC})=(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB})\cdot(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{EB})$