

2023-2024 学年安徽省滁州市海亮外国语学校高三下学期一模考试数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $|z|=1$ ，则 $|z+2-i|$ 的最大值为（ ）

- A. $2+3$ B. $1+\sqrt{5}$ C. $2+\sqrt{5}$ D. 6

2. 点 $P(x, y)$ 为不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ y \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域上的动点，则 $\frac{y+2}{x-2}$ 的取值范围是（ ）

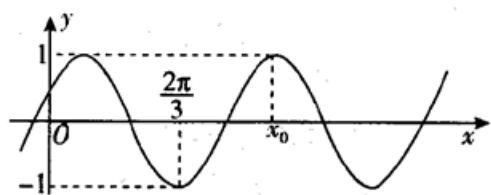
- A. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ C. $(-2, 1)$ D. $[-2, 1]$

3. 过抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点 F 作两条互相垂直的弦 AB, CD ，设 P 为抛物线上的一动点， $Q(1, 2)$ ，若

$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{1}{4}$ ，则 $|PF| + |PQ|$ 的最小值是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 已知函数 $f(x) = 2\cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + m$ ($m \in \mathbf{R}$) 的部分图象如图所示. 则 $x_0 =$ ()



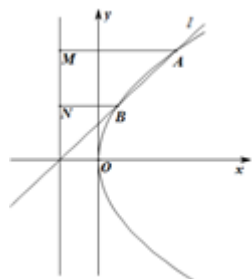
- A. $\frac{3\pi}{2}$ B. $\frac{5\pi}{6}$
C. $\frac{7\pi}{6}$ D. $-\frac{4\pi}{3}$

5. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) - 1$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的一个零点是 $\frac{\pi}{3}$ ，函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ ，则当 ω 取得最小值时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是（ ）

- A. $\left[3k\pi - \frac{\pi}{3}, 3k\pi - \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ B. $\left[3k\pi - \frac{5\pi}{3}, 3k\pi - \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$ D. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$

6. 如图, 已知直线 $l: y = k(x+1) (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, 且 A, B 两点在抛物线准线上的投影分别是 M, N , 若 $|AM| = 2|BN|$, 则 k 的值是 ()



A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $2\sqrt{2}$

7. 设集合 $M = \{x | 1 < x \leq 2\}$, $N = \{x | x < a\}$, 若 $M \cap N = M$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

8. 已知直三棱柱中 $ABC - A_1B_1C_1$, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 2$, $BC = CC_1 = 1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角的正弦值为 ().

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

9. 复数 $z = \frac{2+i}{1-i}$, i 是虚数单位, 则下列结论正确的是

A. $|z| = \sqrt{5}$ B. z 的共轭复数为 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
C. z 的实部与虚部之和为 1 D. z 在复平面内的对应点位于第一象限

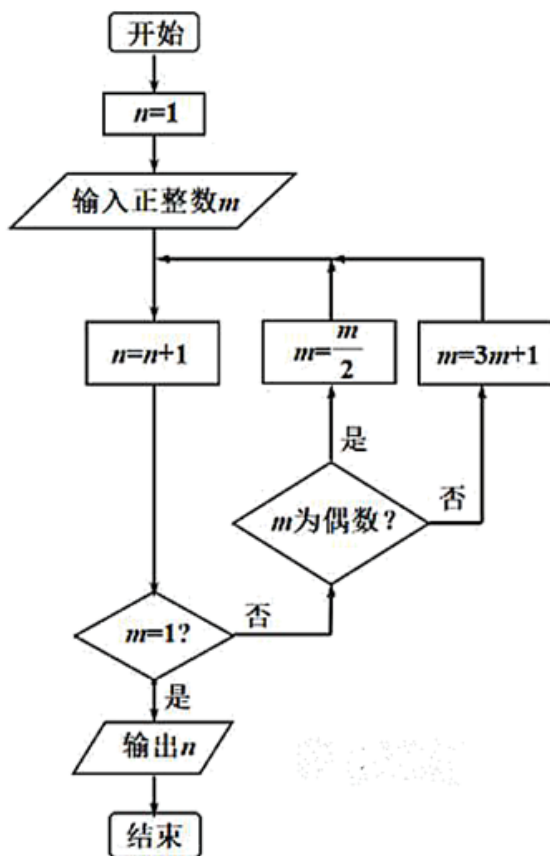
10. 将 4 名大学生分配到 3 个乡镇去当村官, 每个乡镇至少一名, 则不同的分配方案种数是 ()

A. 18 种 B. 36 种 C. 54 种 D. 72 种

11. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 抛物线上任意一点 P , 且 $PQ \perp y$ 轴交 y 轴于点 Q , 则 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 ()

A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

12. 20 世纪产生了著名的“ $3x+1$ ”猜想: 任给一个正整数 x , 如果 x 是偶数, 就将它减半; 如果 x 是奇数, 则将它乘 3 加 1, 不断重复这样的运算, 经过有限步后, 一定可以得到 1. 如图是验证“ $3x+1$ ”猜想的一个程序框图, 若输入正整数 m 的值为 40, 则输出的 n 的值是 ()



- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知一组数据 $-1, 1, 0, -2, x$ 的方差为 10，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 点 $(2,1)$ 到直线 $3x+4y=0$ 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$

15. 已知等边三角形 ABC 的边长为 1. $\overline{AM} = 2\overline{MB}$, 点 N 、 T 分别为线段 BC 、 CA 上的动点, 则 $\overline{AB} \cdot \overline{NT} + \overline{BC} \cdot \overline{TM} + \overline{CA} \cdot \overline{MN}$ 取值的集合为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 请列举用 0,1,2,3 这 4 个数字所组成的无重复数字且比 210 大的所有三位奇数: $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - 2 \ln x + 3x - 5$, $g(x) = \ln x + \frac{2x-a}{x} + \frac{a}{x^2}$.

(1) 求证: $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有且仅有一个零点 x_0 , 且 $x_0 \in \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$;

(2) 若当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $g(x) \geq 0$ 恒成立, 求证: $a < \frac{49}{4}$.

18. (12 分) 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 且斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 W 交于 A, B

两点,线段 AB 的中点为 M , O 为坐标原点.

(1) 证明:点 M 在 y 轴的右侧;

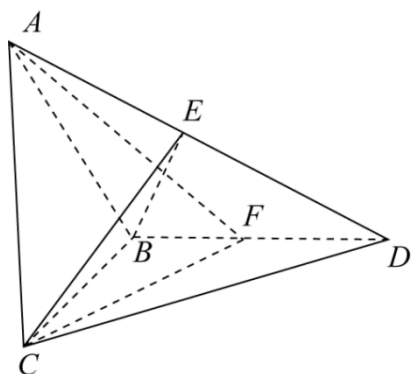
(2) 设线段 AB 的垂直平分线与 x 轴、 y 轴分别相交于点 C, D .若 $\triangle ODC$ 与 $\triangle VCMF$ 的面积相等,求直线 l 的斜率 k

19. (12 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以直角坐标系原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$, 点 P 为曲线 C 上的动点, 求点 P 到直线 l

距离的最大值.

20. (12 分) 如图所示, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = BC = BD = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$, $\angle CBA = \angle CBD = \frac{\pi}{2}$, 点 E 为 AD 中点.



(1) 求证: 平面 $ACD \perp$ 平面 BCE ;

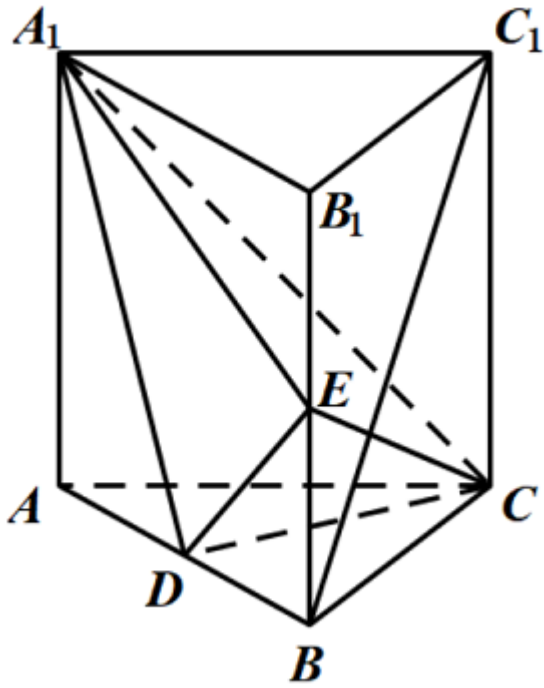
(2) 若点 F 为 BD 中点, 求平面 BCE 与平面 ACF 所成锐二面角的余弦值.

21. (12 分) 已知曲线 $C_1: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $C_2: \begin{cases} x = \sqrt{6} \cos \varphi \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数). 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 且两种坐标系中取相同的长度单位.

(1) 求曲线 C_1 的直角坐标方程和 C_2 的方程化为极坐标方程;

(2) 设 C_1 与 x, y 轴交于 M, N 两点, 且线段 MN 的中点为 P .若射线 OP 与 C_1, C_2 交于 P, Q 两点, 求 P, Q 两点间的距离.

22. (10 分) 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点, $AA_1 = AC = CB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \sqrt{2}$.



- (1) 证明: $BC_1 \perp$ 平面 A_1CD ;
- (2) 求二面角 $D-A_1C-E$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、 B

【解析】

设 $z = a + bi, a, b \in R$, $|z + 2 - i| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$, 利用复数几何意义计算.

【详解】

设 $z = a + bi, a, b \in R$, 由已知, $a^2 + b^2 = 1$, 所以点 (a, b) 在单位圆上,

而 $|z + 2 - i| = |(a+2) + (b-1)i| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$, $\sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$ 表示点 (a, b)

到 $(-2, 1)$ 的距离, 故 $|z + 2 - i| \leq \sqrt{(-2)^2 + 1^2} + 1 = 1 + \sqrt{5}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查求复数模的最大值，其实本题可以利用不等式 $|z+2-i| \leq |z| + |2-i|$ 来解决。

2、B

【解析】

作出不等式对应的平面区域，利用线性规划的知识，利用 z 的几何意义即可得到结论。

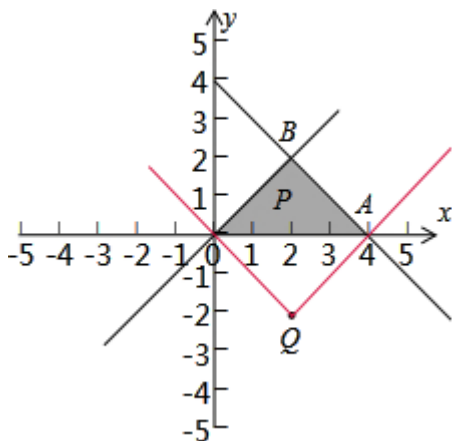
【详解】

不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ y \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$ 作出可行域如图： $A(4,0)$ ， $B(2,2)$ ， $O(0,0)$ ，

$z = \frac{y+2}{x-2}$ 的几何意义是动点 $P(x,y)$ 到 $Q(2,-2)$ 的斜率，由图象可知 QA 的斜率为1， QO 的斜率为：-1，

则 $\frac{y+2}{x-2}$ 的取值范围是： $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ 。

故选：B。



【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，根据目标函数的几何意义结合斜率公式是解决本题的关键。

3、C

【解析】

设直线 AB 的方程为 $y = kx + \frac{p}{2}$ ，代入 $x^2 = 2py$ 得： $x^2 - 2pkx - p^2 = 0$ ，由根与系数的关系得 $x_A + x_B = 2pk$ ，

$x_A x_B = -p^2$ ，从而得到 $|AB| = 2p(1+k^2)$ ，同理可得 $|CD| = 2p(1+\frac{1}{k^2})$ ，再利用 $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{1}{4}$ 求得 p 的值，

当 Q ， P ， M 三点共线时，即可得答案。

【详解】

根据题意，可知抛物线的焦点为 $(0, \frac{p}{2})$ ，则直线 AB 的斜率存在且不为0，

设直线 AB 的方程为 $y = kx + \frac{p}{2}$, 代入 $x^2 = 2py$ 得: $x^2 - 2pkx - p^2 = 0$.

由根与系数的关系得 $x_A + x_B = 2pk$, $x_A x_B = -p^2$,

所以 $|AB| = 2p(1 + k^2)$.

又直线 CD 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + \frac{p}{2}$, 同理 $|CD| = 2p(1 + \frac{1}{k^2})$,

$$\text{所以 } \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{1}{2p(1+k^2)} + \frac{1}{2p(1+\frac{1}{k^2})} = \frac{1}{2p} = \frac{1}{4},$$

所以 $2p = 4$. 故 $x^2 = 4y$. 过点 P 作 PM 垂直于准线, M 为垂足,

则由抛物线的定义可得 $|PF| = |PM|$.

所以 $|PF| + |PQ| = |PM| + |PQ| \geq |MQ| = 3$, 当 Q, P, M 三点共线时, 等号成立.

故选: C.

【点睛】

本题考查直线与抛物线的位置关系、焦半径公式的应用, 考查函数与方程思想、转化与化归思想, 考查逻辑推理能力和运算求解能力, 求解时注意取最值的条件.

4、C

【解析】

由图象可知 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$, 可解得 $m = -\frac{1}{2}$, 利用三角恒等变换化简解析式可得 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 令 $f(x) = 0$, 即可

求得 x_0 .

【详解】

依题意, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$, 即 $2\cos\frac{2\pi}{3} \cdot \sin\frac{5\pi}{6} + m = -1$,

解得 $m = -\frac{1}{2}$; 因为 $f(x) = 2\cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = 2\cos x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) - \frac{1}{2}$

$$= \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

所以 $2x_0 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 当 $k = 1$ 时, $x_0 = \frac{7\pi}{6}$.

故选: C.

【点睛】

本题主要考查了由三角函数的图象求解析式和已知函数值求自变量,考查三角恒等变换在三角函数化简中的应用,难度一般.

5、B

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的一个零点是 $x = \frac{\pi}{3}$, 得出 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, 再根据 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是对称轴, 得出

$-\frac{\pi}{6}\omega - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$, 求出 ω 的最小值与对应的 φ , 写出 $f(x)$ 即可求出其单调增区间.

【详解】

依题意得, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi\omega}{3} + \varphi\right) - 1 = 0$, 即 $\sin\left(\frac{\pi\omega}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}$,

解得 $\frac{\pi\omega}{3} + \varphi = 2k_1\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi\omega}{3} + \varphi = 2k_2\pi + \frac{5\pi}{6}$ (其中 $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$). ①

又 $\sin\left(-\frac{\pi\omega}{6} + \varphi\right) = \pm 1$,

即 $-\frac{\pi\omega}{6} + \varphi = k_3\pi + \frac{\pi}{2}$ (其中 $k_3 \in \mathbf{Z}$). ②

由 ① - ② 得 $\frac{\pi\omega}{2} = (2k_1 - k_3)\pi - \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi\omega}{2} = (2k_2 - k_3)\pi + \frac{\pi}{3}$,

即 $\omega = 2(2k_1 - k_3) - \frac{2}{3}$ 或 $\omega = 2(2k_2 - k_3) + \frac{2}{3}$ (其中 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$), 因此 ω 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

因为 $\sin\left(-\frac{\pi\omega}{6} + \varphi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{9} + \varphi\right) = \pm 1$, 所以 $-\frac{\pi}{9} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right) - 1 = 2\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{9}\right) - 1$,

令 $2k\pi - \pi \leq \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{9} \leq 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, 则 $3k\pi - \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 3k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbf{Z})$.

因此, 当 ω 取得最小值时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[3k\pi - \frac{5\pi}{3}, 3k\pi - \frac{\pi}{6}\right] \quad (k \in \mathbf{Z})$.

故选: B

【点睛】

此题考查三角函数的对称轴和对称点, 在对称轴处取得最值, 对称点处函数值为零, 属于较易题目.

6、C

【解析】

直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$ ，由此推导出 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$ ，由此能求出点 B 的坐标，从而能求出 k 的值。

【详解】

设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 $l: x = -1$ ，

直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$ ，

如图过 A 、 B 分别作 $AM \perp l$ 于 M ， $BN \perp l$ 于 N ，

由 $|AM| = 2|BN|$ ，则 $|FA| = 2|FB|$ ，

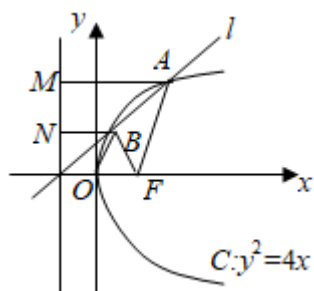
点 B 为 AP 的中点、连接 OB ，则 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$ ，

$\therefore |OB| = |BF|$ ，点 B 的横坐标为 $\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ ，把 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ 代入直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ ，

解得 $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

故选：C.



【点睛】

本题考查直线与圆锥曲线中参数的求法，考查抛物线的性质，是中档题，解题时要注意等价转化思想的合理运用，属于中档题。

7、C

【解析】

由 $M \cap N = M$ 得出 $M \subseteq N$ ，利用集合的包含关系可得出实数 a 的取值范围。

【详解】

Q $M = \{x | 1 < x \leq 2\}$ ， $N = \{x | x < a\}$ 且 $M \cap N = M$ ， $\therefore M \subseteq N$ ， $\therefore a > 2$ 。

因此，实数 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$ 。

故选：C.

【点睛】

本题考查利用集合的包含关系求参数，考查计算能力，属于基础题.

8、C

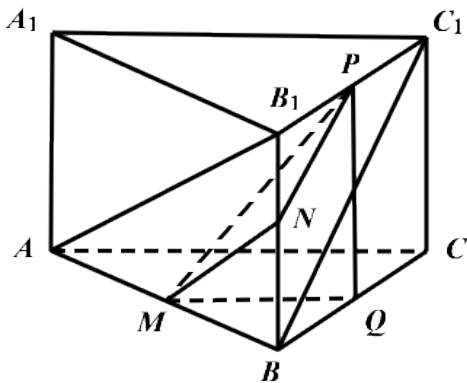
【解析】

设 M, N, P 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点，得出 $\angle APB_1$ 的夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角，根据中位线定理，

结合余弦定理求出 AC, MQ, MP 和 $\angle MNP$ 的余弦值再求其正弦值即可.

【详解】

根据题意画出图形：



设 M, N, P 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点，

则 $\angle APB_1$ 的夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角

可知 $MN = \frac{1}{2} AB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $NP = \frac{1}{2} BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

作 BC 中点 Q ，则 $VPQM$ 为直角三角形；

$QPQ = 1, MQ = \frac{1}{2} AC$

$\triangle VABC$ 中，由余弦定理得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/067115150164006063>