第四章 力学量用算符表达与表象变换

4.1）设 A 与 B 为厄米算符，则 $\frac{1}{2}\left(AB+BA\right)$ 和 $\frac{1}{2i}\left(AB-BA\right)$ 也是厄米算符。由此证明，任何一个算符 F 均可分解为 $F=F_{+}+iF_{-}$，F_{+} 与 F_{-} 均为厄米算符，且

$$F_{+}=\frac{1}{2}\left(F+F^{+}\right),\qquad F=\frac{1}{2i}\left(F-F^{+}\right)$$

证：ｉ）$\left[\frac{1}{2}\left(AB+BA\right)\right]^{+}=\frac{1}{2}\left(B^{+}A^{+}+A^{+}B^{+}\right)=\frac{1}{2}\left(BA+AB\right)=\frac{1}{2}\left(AB+BA\right)$

$\therefore\quad \frac{1}{2}\left(AB+BA\right)$ 为厄米算符。

ⅱ）$\left[\frac{1}{2i}\left(AB-BA\right)\right]^{+}=\frac{1}{-2i}\left(B^{+}A^{+}-A^{+}B^{+}\right)=-\frac{1}{2i}\left(BA-AB\right)=\frac{1}{2i}\left(AB-BA\right)$

$\therefore\quad \frac{1}{2i}\left(AB-BA\right)$ 也为厄米算符。

ⅲ）令 $F=AB$，则 $F^{+}=\left(AB\right)^{+}=B^{+}A^{+}=BA$，

且定义 $$F_{+}=\frac{1}{2}\left(F+F^{+}\right),\qquad F=\frac{1}{2i}\left(F-F^{+}\right)\qquad (1)$$

由ｉ），ⅱ）得 $F_{+}^{+}=F_{+}$，$F_{-}^{+}=F_{-}$，即 F_{+} 和 F_{-} 皆为厄米算符。

则由（1）式，不难解得 $F=F_{+}+iF_{-}$

4.2）设 $F(x,p)$ 是 x,p 的整函数，证明

$$\left[p,F\right]=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{F},\qquad \left[x,F\right]=i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{F}$$

整函数是指 $F(x,p)$ 可以展开成 $F(x,p)=\sum_{m,n=0}^{\infty}C_{mn}x^{m}p^{n}$。

证：（1）先证 $\left[p,x^{m}\right]=-mi\hbar x^{m-1}$，$\left[x,p^{n}\right]=ni\hbar p^{n-1}$。

$$\begin{aligned}\left[p,x^{m}\right]&=x^{m-1}\left[p,x\right]+\left[p,x^{m-1}\right]x\\&=-i\hbar x^{m-1}+x^{m-2}\left[p,x\right]x+\left[p,x^{m-2}\right]x^{2}\\&=-2i\hbar x^{m-1}+x^{m-3}\left[p,x\right]x^{2}+\left[p,x^{m-3}\right]x^{3}\\&=-3i\hbar x^{m-1}+\left[p,x^{m-3}\right]x^{3}=\cdots\\&=-\left(m-1\right)i\hbar x^{m-1}+\left[p,x^{m-(m-1)}\right]x^{m-1}\\&=-\left(m-1\right)i\hbar x^{m-1}-i\hbar x^{m-1}=-mi\hbar x^{m-1}\end{aligned}$$

同理，

$$
\begin{aligned}
\left[x, p^{n}\right] &= p^{n-1}[x, p]+\left[x, p^{n-1}\right] p \\
&= i\hbar p^{n-1}+p^{n-2}[x, p] p+\left[x, p^{n-2}\right] p^{2} \\
&= 2 i\hbar p^{n-1}+\left[x, p^{n-2}\right] p^{2}=\cdots \\
&= n i\hbar p^{n-1}
\end{aligned}
$$

现在，

$$
\begin{aligned}
[p, F] &= \left[p, \sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m} p^{n}\right]=\sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn}\left[p, x^{m}\right] p^{n} \\
&= \sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn}\left(-m i\hbar x^{m-1}\right) p^{n}
\end{aligned}
$$

而 $$-i\hbar \frac{\partial F}{\partial x}=\sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn}\left(-m i\hbar x^{m-1}\right) p^{n} 。$$

$$\therefore \qquad [p, F]=-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{F}$$

又

$$
\begin{aligned}
[x, F] &= \left[x, \sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m} p^{n}\right]=\sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m}\left[x, p^{n}\right] \\
&= \sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m}\left(n i\hbar p^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

而 $$i\hbar \frac{\partial F}{\partial p}=\sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m}\left(n i\hbar p^{n-1}\right)$$

$$\therefore \qquad [x, F]=i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \mathrm{F}$$

4.3）定义反对易式 $[A, B]_{+}=AB+BA$，证明

$$
\begin{aligned}
& [AB, C]=A[B, C]_{+}-[A, C]_{+} B \\
& [A, BC]=[A, B]_{+} C-B[A, C]_{+}
\end{aligned}
$$

证：

$$
\begin{aligned}
[AB, C] &= A[B, C]-[A, C] B \\
&= ABC-ACB+ACB-CAB=A(BC+CB)-(AC+CA) B \\
&= A[B, C]_{+}-[A, C]_{+} B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[A, BC] &= [A, B] C+B[A, C]=ABC-BAC+BAC-BCA \\
&= (AB+BA) C-B(AC+CA)=[A, B]_{+} C-B[A, C]_{+}
\end{aligned}
$$

4.4）设 $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ 为矢量算符，$\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的标积和矢积定义为

$$\vec{A} \cdot \vec{B}=\sum_{\alpha} A_{\alpha} B_{\alpha}, \qquad (\vec{A} \times \vec{B})=\sum_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha} B_{\beta}$$

$\alpha, \beta, \gamma=x, y, z$，$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 为 Levi-civita 符号，试验证

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta C_\gamma \qquad (1)$$

$$\left[\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]=\vec{A}\cdot\left(B_\alpha\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)C_\alpha \qquad (2)$$

$$\left[\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}\right]_\alpha=\vec{A}\cdot\left(B_\alpha\vec{C}\right)-\overrightarrow{A_\alpha}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right) \qquad (3)$$

证：

（1）式左端$=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=A_x\left(B_yC_z-B_yC_z\right)+A_y\left(B_zC_x-B_xC_z\right)+A_z\left(B_xC_y-B_yC_x\right)$

$$=\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta C_\gamma$$

（1）式右端也可以化成 $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta C_\gamma$。 （1）式得证。

（2）式左端$=\left[\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]_\alpha=A_\beta\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)_\gamma-A_\gamma\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)_\beta$ （$\alpha=1,\beta=2,\gamma=3$）

$=A_\beta\left(B_\alpha C_\beta-B_\beta C_\alpha\right)-A_\gamma\left(B_\gamma C_\alpha-B_\alpha C_\gamma\right)=A_\beta B_\alpha C_\beta+A_\gamma B_\alpha C_\gamma-\left(A_\beta B_\beta+A_\gamma B_\gamma\right)C_\alpha$（2）式右端$=\vec{A}\cdot\left(B_\alpha\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)C_\alpha$

$$=A_\alpha B_\alpha C_\alpha+A_\beta B_\alpha C_\beta+A_\gamma B_\alpha C_\gamma-A_\alpha B_\alpha C_\alpha-A_\beta B_\beta C_\alpha-A_\gamma B_\gamma C_\alpha$$
$$=A_\beta B_\alpha C_\beta+A_\gamma B_\alpha C_\gamma-\left(A_\beta B_\beta+A_\gamma B_\gamma\right)C_\alpha$$

故（2）式成立。

（3）式验证可仿（2）式。

4.5）设$\vec{A}$与$\vec{B}$为矢量算符，F为标量算符，证明

$$\left[F,\vec{A}\cdot\vec{B}\right]=\left[F,\vec{A}\right]\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\left[F,\vec{B}\right] \qquad (1)$$

$$\left[F,\vec{A}\times\vec{B}\right]=\left[F,\vec{A}\right]\times\vec{B}+\vec{A}\times\left[F,\vec{B}\right] \qquad (2)$$

证：（1）式右端$=\left(F\vec{A}-\vec{A}F\right)\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\left(F\vec{B}-\vec{B}F\right)$

$$=F\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{A}F\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot F\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{B}F$$

$=F\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{B}F=\left[F,\vec{A}\cdot\vec{B}\right]=$（1）式左端

（2）式右端 $=\left(F\vec{A}-\vec{A}F\right)\times\vec{B}+\vec{A}\times\left(F\vec{B}-\vec{B}F\right)$

$$=F\vec{A}\times\vec{B}-\vec{A}F\times\vec{B}+\vec{A}\times F\vec{B}-\vec{A}\times\vec{B}F$$

$=F\vec{A}\times\vec{B}-\vec{A}\times\vec{B}F=\left[F,\vec{A}\times\vec{B}\right]=$（2）式左端

4.6）设F是由$\vec{r}$，$\vec{p}$构成的标量算符，证明

$$\left[\vec{L},F\right]=i\hbar\frac{\partial F}{\partial p}\times\vec{p}-i\hbar\vec{r}\times\frac{\partial F}{\partial\vec{r}} \qquad (1)$$

证：$\left[\vec{L},F\right]=\left[L_x,F\right]\vec{i}+\left[L_y,F\right]\vec{j}+\left[L_z,F\right]\vec{k}$ （2）

$$\begin{aligned}\left[Lx,F\right]&=\left[ypz-zpy,F\right]=y\left[p_z,F\right]+\left[y,F\right]p_z-z\left[p_y,F\right]-\left[z,F\right]p_y\\ &\overset{(4.2题)}{=}-i\hbar y\frac{\partial F}{\partial z}+i\hbar\frac{\partial F}{\partial y}p_z+i\hbar z\frac{\partial F}{\partial y}-i\hbar\frac{\partial F}{\partial p_z}p_y\\ &=i\hbar\left(\frac{\partial F}{\partial p_y}p_z-\frac{\partial F}{\partial p_z}p_y\right)-i\hbar\left(y\frac{\partial F}{\partial z}-z\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\ &=i\hbar\left(\frac{\partial F}{\partial\vec{p}}\times\vec{p}\right)_x-i\hbar\left(\vec{r}\times\frac{\partial F}{\partial\vec{r}}\right)_x \qquad (3)\end{aligned}$$

同理可证，$\left[L_y,F\right]=i\hbar\left(\frac{\partial F}{\partial\vec{p}}\times\vec{p}\right)_y-i\hbar\left(\vec{r}\times\frac{\partial F}{\partial\vec{r}}\right)_y$ （4）

$$\left[L_z,F\right]=i\hbar\left(\frac{\partial F}{\partial\vec{p}}\times\vec{p}\right)_z-i\hbar\left(\vec{r}\times\frac{\partial F}{\partial\vec{r}}\right)_z \qquad (5)$$

将式（3）、（4）、（5）代入式（2），于是（1）式得证。

4.7）证明 $\vec{p}\times\vec{L}+\vec{L}\times\vec{p}=2i\hbar\vec{p}$

$$i\hbar\left(\vec{p}\times\vec{L}-\vec{L}\times\vec{p}\right)=\left[L^2,\vec{p}\right]$$ 。

证：$\left(\vec{p}\times\vec{L}+\vec{L}\times\vec{p}\right)_x=p_yL_z-p_zL_y+L_yp_z-L_zp_y=\left[p_y,L_z\right]+\left[L_y,p_z\right]$

利用基本对易式 $\left[L_\alpha,p_\beta\right]=\left[p_\alpha,L_\beta\right]=i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma$

即得 $\left(\vec{p}\times\vec{L}+\vec{L}\times\vec{p}\right)_x=2i\hbar p_x$ 。

因此 $\vec{p}\times\vec{L}+\vec{L}\times\vec{p}=2i\hbar\vec{p}$

其次，由于 p_x 和 L_x 对易，所以

$$\begin{aligned}\left[L^2,p_x\right]&=\left[L_y{}^2,p_x\right]+\left[L_Z{}^2,p_x\right]=\left[L_y,p_x\right]L_y+L_y\left[L_y,p_x\right]+\left[L_z,p_x\right]L_z+L_z\left[L_z,p_x\right]\\ &=i\hbar\left(-p_zL_y-L_yp_z+p_yL_z+L_zp_y\right)\\ &=i\hbar\left[\left(p_yL_z-p_zL_y\right)-\left(L_yp_z-L_zp_y\right)\right]\\ &=i\hbar\left(\vec{p}\times\vec{L}-\vec{L}\times\vec{p}\right)_x\end{aligned}$$

因此，$i\hbar\left(\vec{p}\times\vec{L}-\vec{L}\times\vec{p}\right)=\left[L^2,\vec{p}\right]$

4.8）证明 $L^2=r^2p^2-\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right)+i\hbar\vec{r}\cdot\vec{p}$ （1）

$$\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)^2=\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)^2=-\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)=L^2p^2 \qquad (2)$$

$$-\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)\cdot\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)=L^2p^2+4\hbar^2p^2 \qquad (3)$$

$$\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\times\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)=-i\hbar\vec{L}p^2 \qquad (4)$$

证: （1）利用公式 ，$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$，有

$$L^2=-\left(\vec{p}\times\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)=-\left[\left(\vec{p}\times\vec{r}\right)\times\vec{r}\right]\cdot\vec{p}=\left[\vec{p}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)-\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}\right]\vec{p}$$
$$=\left(\overrightarrow{p\,r^2}\right)\cdot\vec{P}-\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right)$$

其中 $\overrightarrow{p\,r^2}=r^2\vec{p}-i\hbar\left(\nabla r^2\right)=r^2\vec{p}-2i\hbar\vec{r}$

$$\vec{p}\times\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}-i\hbar\left(\nabla\cdot\vec{r}\right)=\vec{r}\cdot\vec{p}-3i\hbar$$

因此 $L^2=r^2\cdot\vec{p}^{\,2}-\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right)^2+i\hbar\vec{r}\cdot\vec{p}$

（2）利用公式，$\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{p}=\vec{L}\cdot\left(\vec{p}\times\vec{p}\right)=0$ （Δ）

可得 $-\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)=-\left[\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\times\vec{p}\right]\cdot\vec{L}$

$$=\left[\vec{L}\left(\vec{p}\cdot\vec{p}\right)-\left(\vec{L}\cdot\vec{p}\right)\vec{p}\right]\cdot\vec{L}=\left(\vec{L}p^2-0\right)\cdot\vec{L}=L^2p^2 \qquad \left(\left[\vec{L},P^2\right]=0\right) \qquad ①$$

$$\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)^2=\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)=\vec{L}\cdot\left[\vec{p}\times\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\right]$$

$$=\vec{L}\cdot\left[p^2\vec{L}-\left(\vec{p}\cdot\vec{L}\right)\vec{p}\right]=L^2p^2 \qquad \left(\left[\vec{L},P^2\right]=0\right) \qquad ②$$

$$\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)^2=\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)\cdot\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)=\left[\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)\times\vec{p}\right]\cdot\vec{L}$$

$$=\left[\vec{L}p^2-\vec{p}\left(\vec{L}\cdot\vec{p}\right)\right]\cdot\overleftarrow{L}=L^2p^2 \qquad ③$$

由①②③，则（2）得证。

（3）$-\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)\cdot\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\overset{4.7)\ (1)}{=\!=\!=}\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)\cdot\left(\vec{p}\times\vec{L}-2i\hbar\vec{p}\right)$

$$=\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)^2-2i\hbar\left(\vec{p}\times\vec{L}\right)\cdot\vec{p}$$
$$\overset{4.7)\ (1)}{=\!=\!=}L^2p^2-2i\hbar\left(2i\hbar\vec{p}-\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{p}\overset{(\Delta)}{=\!=}L^2p^2+4\hbar^2p^2$$

（4）就此式的一个分量加以证明，由 4.4)（2），

$$\left[\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]_\alpha=\vec{A}\cdot\left(B_\alpha\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)C_\alpha$$

$$\left[\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\times\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\right]_x=\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\left(L_x\vec{p}\right)-\left[\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{L}\right]p_x \quad ,$$

其中 $L_x\vec{p}=\vec{p}L_x+i\hbar\left(p_z\overrightarrow{e_z}-p_y\overrightarrow{e_y}\right)$

（即 $\left[L_x,p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}\right]=0+i\hbar p_z\vec{j}-i\hbar p_y\vec{k}$ ）

$$\left[\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\times\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\right]_x=\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{p}L_x+i\hbar\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\left(p_z\vec{e_z}-p_y\vec{e_y}\right)-\left[\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{L}\right]p_z$$
$$=i\hbar\left[\left(\vec{L}\times\vec{p}\right)\times\vec{p}\right]_x=i\hbar\left[\left(\vec{L}\cdot\vec{p}\right)\vec{p}-\vec{L}\left(\vec{p}\cdot\vec{p}\right)\right]_x$$
$$=\left(-i\hbar\vec{L}p^2\right)_x=-i\hbar L_x p^2$$

类似地。可以得到 y 分量和 z 分量的公式，故（4）题得证。

4.9）定义径向动量算符 $p_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\vec{r}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{1}{r}\right)$

证明：(a) $\quad p_r^{+}=p_r$， $\quad(b)$ $\quad p_r=-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)$，

(c) $\quad[r,p_r]=i\hbar$，

(d) $\quad p_r^{2}=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)=-\hbar^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}$，

(e) $\quad p^2=\frac{1}{r^2}L^2+p_r^{2}$

证：(a) $\quad\because\quad (\mathrm{ABC})^{+}=C^{+}B^{+}A^{+}$，

$$\therefore\quad p_r^{+}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\vec{r}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{1}{r}\right)^{+}=\frac{1}{2}\left[\vec{p}^{+}\cdot\vec{r}^{+}\left(\frac{1}{r}\right)^{+}+\left(\frac{1}{r}\right)^{+}\vec{r}^{+}\cdot\vec{p}^{+}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\vec{r}\cdot\vec{p}\right)=p_{\mathrm{r}}$$

即 p_{r} 为厄米算符。

$$(b)\quad p_{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\vec{r}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{p}\right)+\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{p}\right)+\left(-i\hbar\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)\right]$$
$$=\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{p}-\frac{i\hbar}{2}\left(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)=-i\hbar\frac{\vec{r}}{r}\cdot\nabla-\frac{i\hbar}{2}\left[\frac{1}{r}\nabla\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right]$$
$$=-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{3}{r}-\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{3}{r}-\frac{1}{r}\right)$$
$$=-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)$$

$$(c)\quad[r,p_r]=-i\hbar\left[r,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right]=-i\hbar\left[r,\frac{\partial}{\partial r}\right]=-i\hbar\left(r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial r}r\right)$$
$$=-i\hbar\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1-r\frac{\partial}{\partial r}\right)=i\hbar$$

$(d)\quad p_r^{\,2} \overset{(b)}{=} -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)$

$$= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right) = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$= -\hbar^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}$$

(e)据 4.8）（1），$L^2 = r^2\cdot p^2-\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right)^2+i\hbar\,\vec{r}\cdot\vec{p}$。

其中 $\quad \vec{r}\cdot\vec{p} = -i\hbar\,\vec{r}\cdot\nabla = -i\hbar\, r\frac{\partial}{\partial r}$，

因而 $\quad L^2 = r^2p^2+\hbar^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\hbar^2 r\frac{\partial}{\partial r}$

$$= r^2p^2+\hbar^2\left(r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2r\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

以 r^{-2} 左乘上式各项，即得

$$p^2 = \frac{1}{r^2}L^2-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \overset{4.9)(d)}{=} \frac{1}{r^2}L^2+p_r^{\,2}$$

4.10)利用测不准关系估算谐振子的基态能量。

解：一维谐振子能量 $\quad E_x = \frac{p_x^{\,2}}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$。

又 $\overline{x} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\alpha^2x^2}dx = 0$ 奇，$\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$，$\overline{p_x} = 0$，

（由(3.8)、(3.9)题可知 $\overline{x} = 0, \overline{p_x} = 0$）

$\therefore\quad \Delta x = x-\overline{x} = x$，$\Delta p_x = p_x-\overline{p_x} = p_x$，

由测不准关系，$\Delta x\Delta p_x = \hbar/2$，得 $p_x = \hbar/2x$。

$$\therefore\quad E_x = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2x}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\hbar^2}{8m}\left(-\frac{2}{x^3}\right)+m\omega^2x = 0\text{，得}\quad x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$E_{0x} = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

同理有 $E_{0y} = \frac{1}{2}\hbar\omega$，$E_{0z} = \frac{1}{2}\hbar\omega$。

$\therefore$ 谐振子（三维）基态能量 $E_0 = E_{0x} + E_{0y} + E_{0z} = \frac{3}{2}\hbar\omega$。

4.11) 利用测不准关系估算类氢原子中电子的基态能量。

解: 类氢原子中有关电子的讨论与氢原子的讨论十分相似，只是把氢原子中有关公式中的核电荷数 $+e$ 换成 $+ze$（z 为氢原子系数）而 u 理解为相应的约化质量。故玻尔轨迹半径 $a_0 = \hbar^2 / ue^2$，在类氢原子中变为 $a = a_0 / z$。

类氢原子基态波函数 $\psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} e^{-r/a}$，仅是 r 的函数。

而 $\nabla = \vec{e}_r \frac{d}{dr} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{d\varphi}$，故只考虑径向测不准关系 $\Delta p_r \Delta r \sim \hbar$，类氢原子径向能量为：

$E = \frac{p_r^{\ 2}}{2u} - \frac{ze^2}{r}$。

而 $H = \frac{p^2}{2u} - \frac{ze^2}{r}$，如果只考虑基态，它可写为

$$H = \frac{p_r^{\ 2}}{2u} - \frac{ze^2}{r}, \quad p_r = -i\hbar\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)$$

p_r 与 r 共轭，于是 $\Delta p_r \Delta r \sim \hbar$，$\Delta r \sim \bar{r}$，

$$E = \frac{\overline{p_r^{\ 2}}}{2u} - \frac{\overline{ze^2}}{r} \sim \frac{\hbar^2}{2m\bar{r}^2} - \frac{ze^2}{\bar{r}} \qquad (1)$$

求极值 $$0 = \frac{\partial E}{\partial \bar{r}} = \frac{-\hbar^2}{m\bar{r}^3} + \frac{ze^2}{\bar{r}}$$

由此得 $\bar{r} = \hbar^2 / mze^2 = a_0 / z = a$（$a_0$：玻尔半径；$a$：类氢原子中的电子基态“轨迹”半径）。代入（1）式，得

基态能量，$E \sim -mz^2e^4 / 2\hbar^2 = -ze^2 / 2a$

运算中做了一些不严格的代换，如 $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \sim 1 / \langle r \rangle$，作为估算是允许的。

4.12)证明在分立的能量本征态下动量平均值为 0。

证：设定态波函数的空间部分为 $|\psi\rangle$，则有 $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

为求 $\vec{p}$ 的平均值，我们注意到坐标算符 x_i 与 H 的对易关系：

$$[x_i, H] = \left[x_i, \sum_j p_j p_j / 2u + V(\vec{x})\right] = i\hbar p_i / u \text{。}$$

这里已用到最基本的对易关系 $[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$，由此

$$\begin{aligned}
\overline{p_i} &= \left\langle \Psi \middle| \hat{p}_i \middle| \Psi \right\rangle = \frac{u}{i\hbar} \langle \Psi | [x_i, H] | \Psi \rangle \\
&= \frac{u}{i\hbar} \left(\langle \Psi | x_i H | \Psi \rangle - \langle \Psi | H x_i | \Psi \rangle \right) \\
&= \frac{u}{i\hbar} \left(\langle \Psi | x_i E | \Psi \rangle - \langle \Psi | E x_i | \Psi \rangle \right) = 0
\end{aligned}$$

这里用到了 H 的厄米性。

这一结果可作一般结果推广。如果厄米算符 $\hat{C}$ 可以表示为两个厄米算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的对易子 $\hat{C} = i\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$，则在 $\hat{A}$ 或 $\hat{B}$ 的本征态中，$\hat{C}$ 的平均值必为 0。

4.13）证明在的本征态下，$\overline{L_x} = \overline{L_y} = 0$。

（提示：利用 $L_y L_z - L_z L_y = i\hbar L_x$，求平均。）

证：设 $|\psi\rangle$ 是 L_z 的本征态，本征值为 $m\hbar$，即 $L_z|\psi\rangle = m\hbar|\psi\rangle$

$\because$ $$[\mathrm{L_y}, \mathrm{L_z}] = \mathrm{L_y L_z} - \mathrm{L_z L_y} = i\hbar L_x,$$

$$[\mathrm{L_z}, \mathrm{L_x}] = \mathrm{L_z L_x} - \mathrm{L_x L_z} = i\hbar L_y,$$

$\therefore$ $$\begin{aligned}
\overline{L_x} &= \frac{1}{i\hbar} \left(\langle \Psi | L_y L_z | \Psi \rangle - \langle \Psi | L_z L_y | \Psi \rangle \right) \\
&= \frac{1}{i\hbar} \left(\langle \Psi | L_y L_z | \Psi \rangle - \langle \Psi | L_z L_y | \Psi \rangle \right) \\
&= \frac{1}{i\hbar} \left(m\hbar \langle \Psi | L_y | \Psi \rangle - m\hbar \langle \Psi | L_y | \Psi \rangle \right) = 0
\end{aligned}$$

同理有：$\overline{L_y} = 0$。

4.14) 设粒子处于 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 状态下，求 $\overline{(\Delta L_x)^2}$ 和 $\overline{(\Delta L_y)^2}$

解：记本征态 Y_{lm} 为 $|lm\rangle$，满足本征方程

$$L^2|lm\rangle = l(l+1)\hbar^2|lm\rangle，\quad L_z|lm\rangle = m\hbar|lm\rangle，\quad \langle lm|L_z = m\hbar|lm\rangle，$$

利用基本对易式 $\quad \vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}$，