第8章　相量法

● 重点：

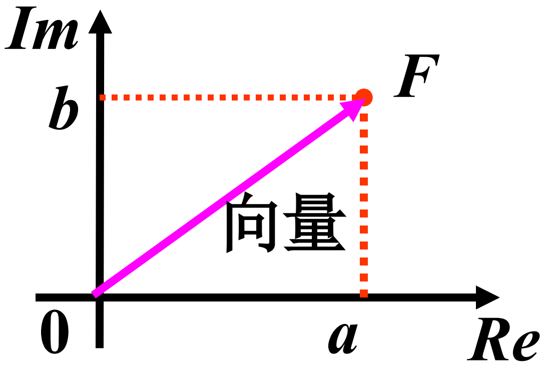
1. 复数的运算
2. 正弦量的表示、相位差
3. 正弦量的相量表示
4. 电路定律的相量形式

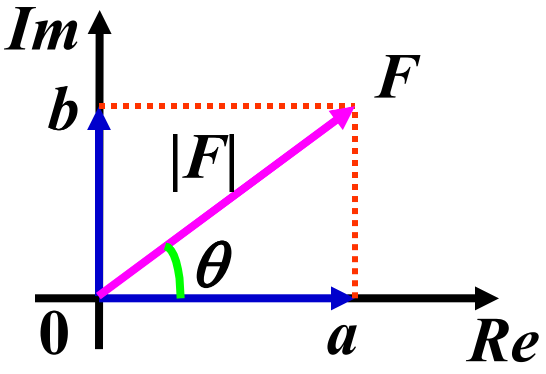
8.1 复数

1. 复数的表示形式

$$F=a+\mathrm{j}b$$

（$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 为虚单位）





①代数形式 $\mathbf{F}=a+jb$

②三角形式 $\mathbf{F}=|\mathbf{F}|(\cos\theta+j\sin\theta)$

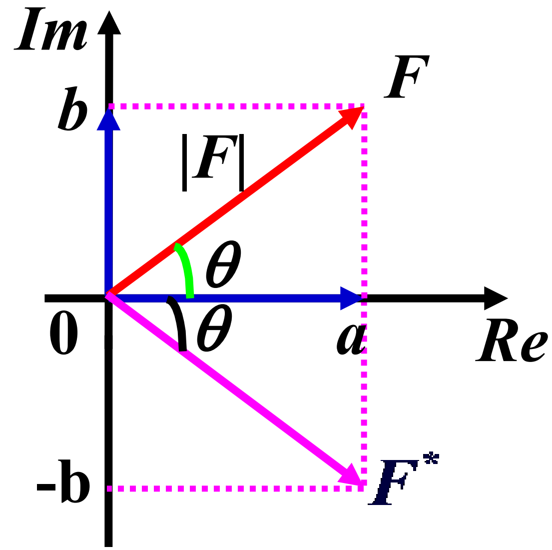
③指数形式 $\mathbf{F}=|\mathbf{F}|e^{j\theta}$

④极坐标形式 $\mathbf{F}=|\mathbf{F}|\angle\theta$

两种表示法的关系

$\mathbf{F} = a + jb \qquad \mathbf{F} = |\mathbf{F}|\angle\theta$

$$\begin{cases} |\mathbf{F}| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = |\mathbf{F}|\cos\theta \\ b = |\mathbf{F}|\sin\theta \end{cases}$$



几个常用概念

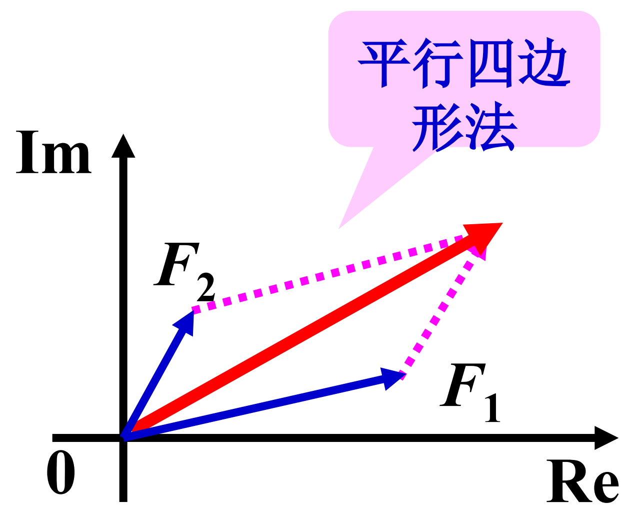
$\mathrm{Re}[\mathbf{F}] = a \qquad \mathrm{Im}[\mathbf{F}] = b \qquad \mathbf{F}^* = a - jb = |\mathbf{F}|\angle -\theta$

2. 复数运算

①加减运算——必须采用**代数形式**

若 $F_1 = a_1 + jb_1$， $F_2 = a_2 + jb_2$

则 $F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$



② 乘除运算——宜采用**极坐标形式**

$$\mathbf{F}_1 = |\mathbf{F}_1| \angle \theta_1 \qquad \mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_2| \angle \theta_2$$

则：$F_1 \cdot F_2 = |F_1| e^{j\theta_1} \cdot |F_2| e^{j\theta_2} = |F_1||F_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$$= |F_1||F_2| \angle \theta_1 + \theta_2$$

乘法：模相乘，角相加

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1| e^{j\theta_1}}{|F_2| e^{j\theta_2}} = \frac{|F_1|}{|F_2|} e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|F_1|}{|F_2|} \angle \theta_1 - \theta_2$$

除法：模相除，角相减

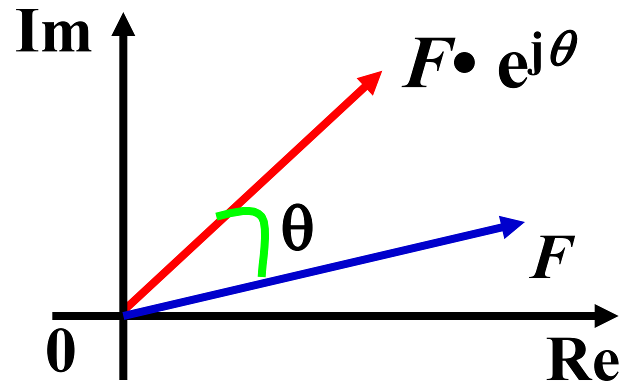
例1. $5\angle 47^\circ + 10\angle -25^\circ = ?$

解 $= (3.41 + j3.657) + (9.063 - j4.226)$

$= 12.47 - j0.569 \quad = 12.48 \angle -2.61^\circ$

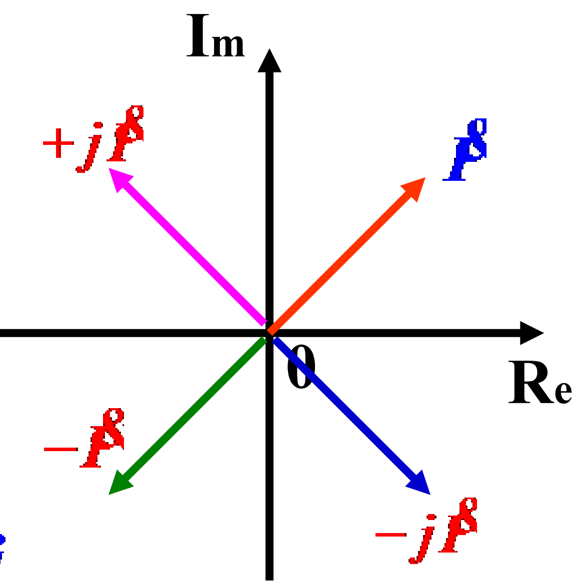
③ 旋转因子

复数 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta=1\angle\theta$



$F\bullet e^{j\theta}$ 相当于F逆时针旋转一个角度θ，而模不变。故把 $e^{j\theta}$ 称为旋转因子。

几种不同θ值时的旋转因子



$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad e^{j\frac{\pi}{2}}=\cos\dfrac{\pi}{2}+j\sin\dfrac{\pi}{2}=+j$

$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ $\quad e^{j-\frac{\pi}{2}}=\cos(-\dfrac{\pi}{2})+j\sin(-\dfrac{\pi}{2})=-j$

$\theta=\pm\pi$ $\quad e^{j\pm\pi}=\cos(\pm\pi)+j\sin(\pm\pi)=-1$

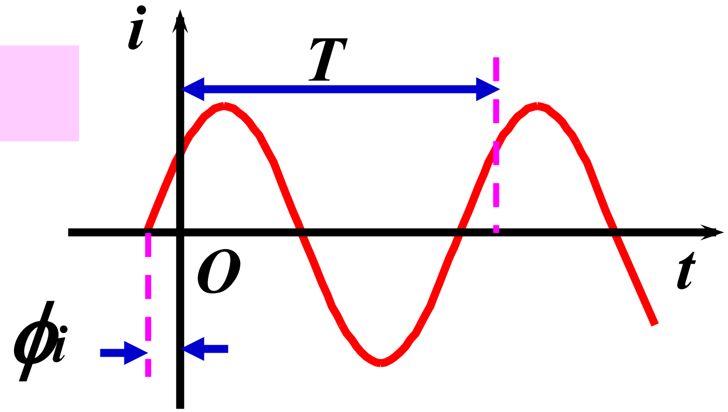
8.2 正弦量

1. 正弦量 电路中按正弦规律变化的电压或电流

瞬时值表达式：

$$i(t)=I_m\cos(w\,t+\phi_i)$$

波形：



周期T (*period*)和频率f (*frequency*)：

$$f=\frac{1}{T}$$

周期T：重复变化一次所需的时间。单位：s，秒

频率f：每秒重复变化的次数。单位：Hz，赫兹

2. 正弦量的三要素

$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi_i)$

(1) 幅值 (amplitude) (振幅、 最大值)I_m

→ 反映正弦量变化幅度的大小。 峰峰值=$2I_m$

(2) 角频率(angular frequency)ω

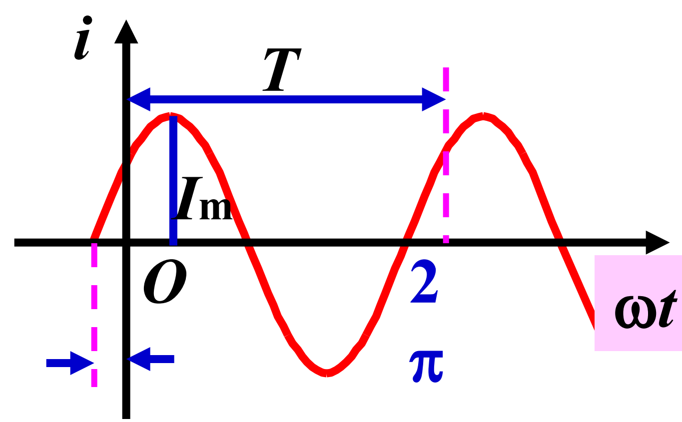
→ 相位随时间变化的角速度。相位：$\omega t+\phi_i$

$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ 单位：rad/s，弧度/秒

(3) 初相位(initial phase angle)

$\xrightarrow{\phi_i}$ t=0时的相位，

$|\phi_i| \le 180^\circ$



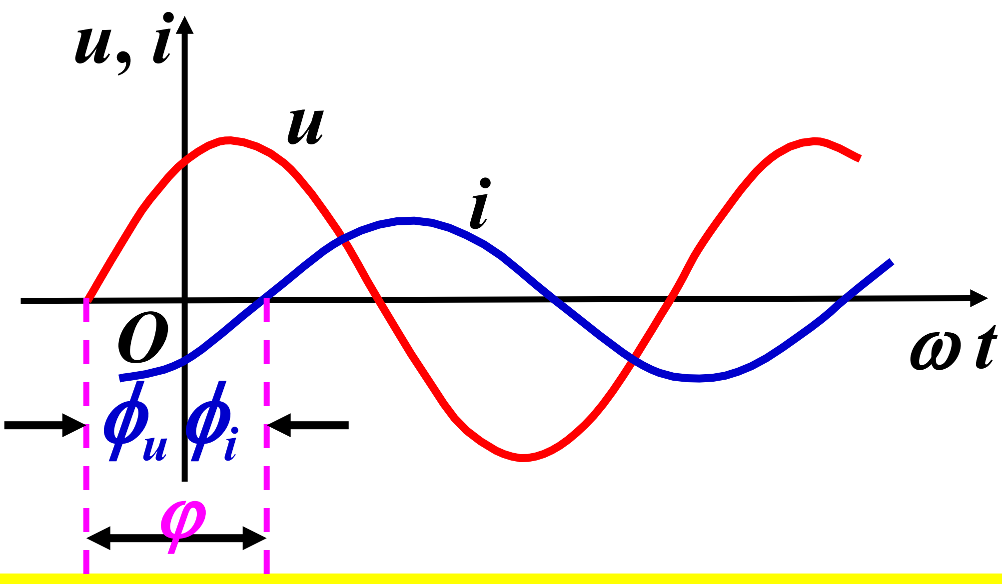
3. 同频率正弦量的相位差（phase difference）

设 $u(t)=U_m\cos(wt+\phi_u)$，$i(t)=I_m\cos(wt+\phi_i)$

则 相位差： $\varphi = (wt+\phi_u) - (wt+\phi_i) = \phi_u - \phi_i$

等于初相位之差　　规定：$|\varphi| \le \pi$ (180°)

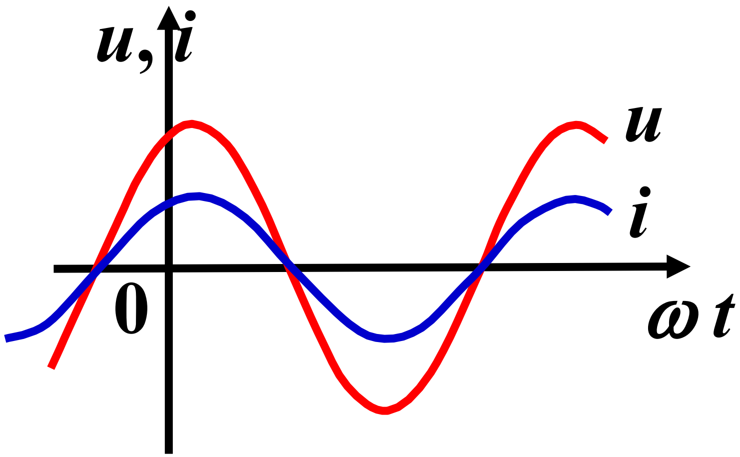
- $\varphi>0$， u超前i，或i 落后u ， u 比i先到达最大值。



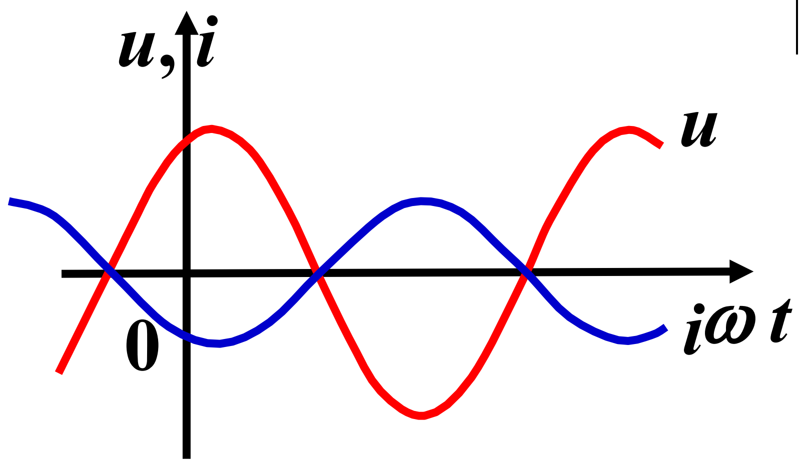
- $\varphi<0$， i 超前 u，或u 滞后 i ， i 比 u 先到达最大值。

特殊相位关系：

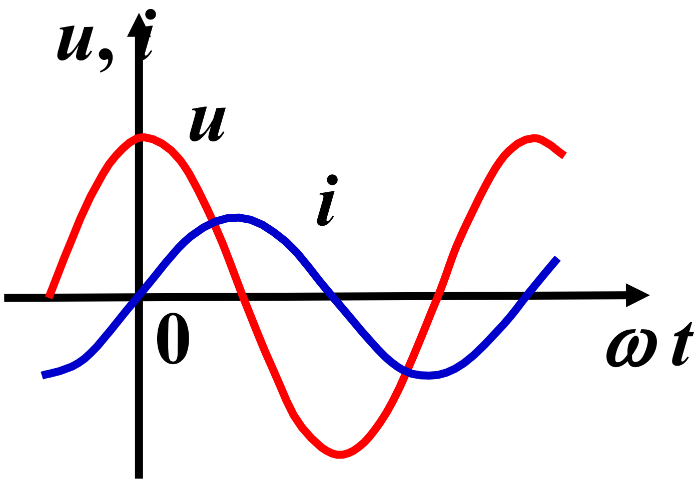
①$\varphi = 0$，同相



②$\varphi = \pm\pi$（$\pm 180^{o}$），反相



③$\varphi = \pm\pi/2$，正交



同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

例　计算下列两正弦量的相位差。

(1) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+3\pi/4)$

$i_2(t)=10\cos(100\pi t-\pi/2)$

$\varphi=3\pi/4-(-\pi/2)=5\pi/4>0$

$\varphi=2\pi-5\pi/4=3\pi/4$

(2) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+30^0)$

$i_2(t)=10\sin(100\pi t-15^0)$

$i_2(t)=10\cos(100\pi t-105^0)$

$\varphi=30^0-(-105^0)=135^0$

(3) $u_1(t)=10\cos(100\pi t+30^0)$

$u_2(t)=10\cos(200\pi t+45^0)$

$\omega_1\neq\omega_2$

不能比较相位差

(4) $i_1(t)=5\cos(100\pi t-30^0)$

$i_2(t)=-3\cos(100\pi t+30^0)$

$i_2(t)=3\cos(100\pi t-150^0)$

$\varphi=-30^0-(-150^0)=120^0$

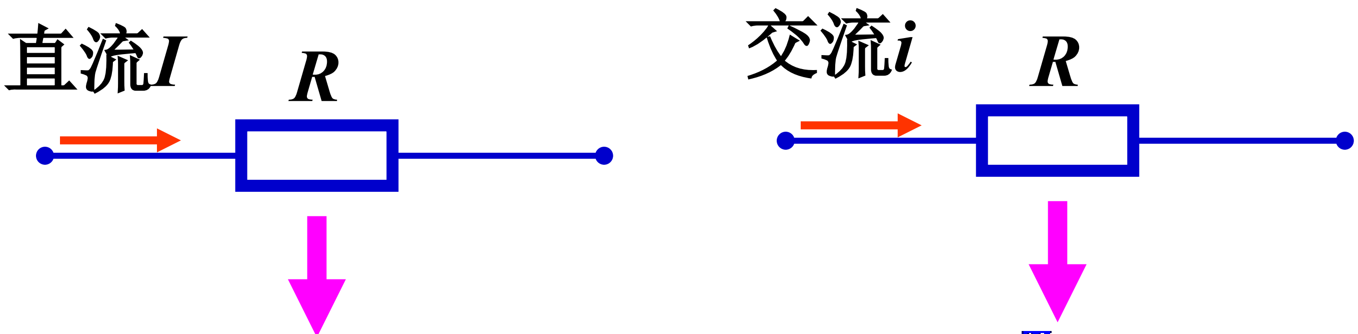
两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

4. 周期性电流、电压的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效果工程上采用有效值来表示。

● 周期电流、电压有效值(*effective value*)定义

物理意义



$$W = RI^2T \quad = \quad W = \int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$$

电流有效值定义为

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

有效值也称均方根值(*root-mean-square*)

同样，可定义电压有效值：$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$

● 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\phi)\,\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^T \frac{1+\cos 2(\omega t+\phi)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t\Big|_0^T=\frac{1}{2}T$$

$$\therefore I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m \rightarrow I_m=\sqrt{2}I$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}} \qquad \text{或} \qquad U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U$$

若一交流电压有效值为U=220V，则其最大值为$U_{\mathrm{m}}\approx$311V；

注 （1）工程上说的正弦电压、电流一般指**有效值**，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。

但**绝缘水平、** …… 考虑

电器设备的耐压 ……

（2）测量中，**交流** …… 数一

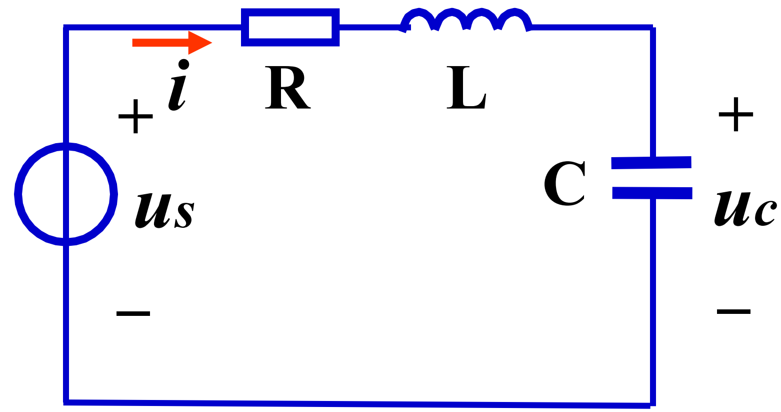
般为有效值。

$$i\,,I_m\,,I$$

（3）区分电压、电流的**瞬时值**、**最大值**、**有效值**的符号。

8.3 相量法的基础

1. 问题的提出：



电路方程是微分方程：

$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u_s$$

当 u_s 为正弦量时，如何避免繁琐的求解过程?

思路一：稳态响应

非齐次线性微分方程 u_C = 特解 +通解

t→∞，
通解→0

特解：与激励形式相同

- 直流：直流
- 正弦量：同频率正弦量

注意

线性非时变电路中，若激励是正弦量，则电路中各支路的u和i的稳态响应是同频率的正弦量。