

1. 本试题卷共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟.
2. 答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号.
3. 所有【答 案】必须写在答题卷上，写在试卷上无效.
4. 考试结束后，只需上交答题卷.

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

- 【答案】C

高级中学名校试卷

【解析】因为随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, $P(X \leq 0) = 0.15$,

所以 $P(X \leq 0) = P(X \geq 4)$,

$$\text{所以 } P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1 - 2P(X \leq 0)}{2} = \frac{1 - 2 \times 0.15}{2} = 0.35.$$

故选:C.

4. 2022 年北京冬奥会的顺利召开, 激发了大家对冰雪运动的兴趣. 若甲, 乙, 丙三人在自由式滑雪、花样滑冰、冰壶和跳台滑雪这四项运动中任选一项进行体验, 则不同的选法共有 ()

A. 12 种

B. 24 种

C. 64 种

D. 81 种

【答案】C

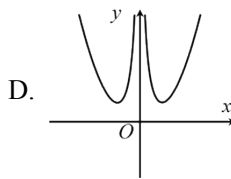
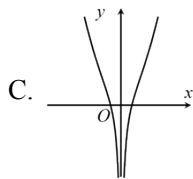
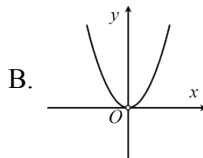
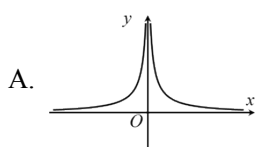
【解析】由题意, 可知每一人都可在四项运动中选一项, 即每人都有四种选法, 可分三步完成,

根据分步乘法原理, 不同的选法共有 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 种.

故选: C.

5. 我国著名数学家华罗庚先生曾说“数缺形时少直观, 形缺数时难入微, 数形结合百般好, 隔离分家万事休.”在数学的学习和研究中, 常用函数的图像来研究函数的性质, 也常用函数的

【解析】式来琢磨函数图像的特征, 如函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{|x|}$ ($a \in R$) 的图像不可能是 ()



【答案】A

【解析】由题意, 函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{|x|}$ ($a \in R$) 的定义域为 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 关于原点对称,

且 $f(-x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 图象关于原点对称,

当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x) = x^2$ 且 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 图象如选项 B 中的图象;

当 $a < 0$ 时, 若 $x > 0$ 时, 函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$, 可得 $f'(x) = \frac{2x^3 - a}{x^2} > 0$,

高级中学名校试卷

函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增, 此时选项 C 符合题意;

当 $a > 0$ 时, 若 $x > 0$ 时, 可得 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$, 则 $f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = \frac{2x^3 - a}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$,

当 $x \in (0, \sqrt[3]{\frac{a}{2}})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\sqrt[3]{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以选项 D 符合题意.

故选: A.

6. 在 $(1+x)^4(1+y)^6$ 的展开式中, 记 $x^m y^n$ 项的系数为 $P(m, n)$, 则 $P(2, 1) + P(1, 2) =$
()

A. 45

B. 60

C. 72

D. 96

【答案】D

【解析】由于 $(1+x)^4$ 的展开式为 $T_{r+1} = C_4^r \cdot x^r$, 且 $(1+y)^6$ 的展开式 $T_{k+1} = C_6^k \cdot y^k$,

记 $x^m y^n$ 项的系数为 $P(m, n)$, 所以 $P(2, 1) = C_4^2 \cdot C_6^1 = 36$, $P(1, 2) = C_4^1 \cdot C_6^2 = 60$,

故 $P(2, 1) + P(1, 2) = 96$. 故选: D

7. 为了提升全民身体素质, 学校十分重视学生体育锻炼, 某校篮球运动员进行投篮练习. 如果他前一球投进则后一球投进的概率为 $\frac{3}{4}$; 如果他前一球投不进则后一球投进的概率为 $\frac{1}{4}$.

若他第1球投进的概率为 $\frac{3}{4}$, 则他第2球投进的概率为 ()

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{7}{16}$

D. $\frac{9}{16}$

【答案】B

【解析】记事件 A 为“第1球投进”, 事件 B 为“第2球投进”,

$$P(B|A) = \frac{3}{4}, \quad P(B|\bar{A}) = \frac{1}{4}, \quad P(A) = \frac{3}{4},$$

$$\text{由全概率公式可得 } P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

高级中学名校试卷

故选：B.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x) = 2f(x-1)$, 且 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x^2 - x$. 若

$\forall x \in (-\infty, a]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{3}{4}$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

B. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$

C. $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$

D. $\left(-\infty, \frac{11}{4}\right]$

【答案】B

【解析】当 $1 < x \leq 2$ 时, $0 < x-1 \leq 1$,

因为 $f(x) = 2f(x-1)$, 且 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x^2 - x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$,

所以 $f(x) = 2f(x-1) = 2[(x-1)^2 - (x-1)] = 2x^2 - 6x + 4 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$;

当 $2 < x \leq 3$ 时, $1 < x-1 \leq 2$,

所以 $f(x) = 2f(x-1) = 2[2(x-1)^2 - 6(x-1) + 4] = 4x^2 - 20x + 24 \in [-1, 0]$;

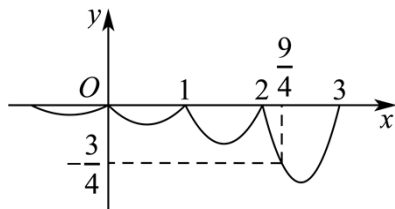
因为 $f(x) = 2f(x-1) \Rightarrow f(x+1) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}f(x+1)$,

当 $-1 < x \leq 0$ 时, $0 < x+1 \leq 1$,

所以 $f(x) = \frac{1}{2}f(x+1) = \frac{1}{2}[(x+1)^2 - (x+1)] = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \in \left[-\frac{1}{8}, 0\right]$;

所以 $f(x) = 2f(x-1) \Rightarrow f(x+1) = 2f(x)$, 得 $f(x+t) = 2^t f(x) (t \in \mathbf{Z})$,

由此做出函数图像得:



当 $2 < x \leq 3$ 时, $4x^2 - 20x + 24 = -\frac{3}{4}$, 解得 $x = \frac{9}{4}$ 或 $x = \frac{11}{4}$,

结合图像得 $4x^2 - 20x + 24 \geq -\frac{3}{4}$ 的解为: $x \leq \frac{9}{4}$ 或 $x \geq \frac{11}{4}$,

因为 $\forall x \in (-\infty, a]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{3}{4}$,

高级中学名校试卷

所以 $a \in \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$.

故选:B.

二、选择题 ((本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分))

9. 设 M 、 N 是两个随机事件, 则下列等式一定成立的是 ()

A. $P(M \cup N) = P(M) + P(N)$

B. $P(MN) = 1 - P(\overline{MN})$

C. $P(MN) = P(M)P(N|M)$

D. $P(M|N) = \frac{P(N|M)P(M)}{P(N)}$

【答案】CD

【解析】对 A, 当 M, N 不互斥时, $P(M \cup N) = P(M) + P(N)$ 不成立, 故 A 错误;

对 B, 当 M, N 为对立事件时, $P(MN) = P(\overline{MN}) = 0$, 则 $P(MN) = 1 - P(\overline{MN})$ 不成立, 故 B 错误;

对 C, 当 $P(M) = 0$ 时, $P(MN) = P(M)P(N|M) = 0$ 成立, 当 $P(M) \neq 0$ 时, 根据条件

概率的公式 $P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)}$ 可得 $P(MN) = P(M)P(N|M)$ 成立, 故 C 正确;

对 D, 根据条件概率的公式, 结合 C 选项可得 $P(M|N) = \frac{P(MN)}{P(N)} = \frac{P(N|M)P(M)}{P(N)}$ 成

立, 故 D 正确;

故选: CD

10. 已知随机变量 $X \sim N(1, 2^2)$, $Y \sim B(10, 0.4)$, 则 () (附: 随机变量 ξ 服从正态分

布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$)

A. $D(X) = 2$

B. $E(Y) = 0.4$

C. $D(Y) = 2.4$

D. $P(X < 3) = 0.84135$

【答案】CD

【解析】因为 $X \sim N(1, 2^2)$, 所以 $\mu = 1$, $\sigma^2 = 2^2$, 则 $D(X) = 2^2 = 4$, 故 A 错误;

$P(X < 3) = 0.5 + \frac{1}{2}P(1 - 2 < X < 1 + 2) = 0.5 + \frac{1}{2} \times 0.6827 = 0.84135$, 故 D 正确;

因为 $Y \sim B(10, 0.4)$, 所以 $n = 10$, $p = 0.4$, 所以 $E(Y) = 10 \times 0.4 = 4$, 故 B 错误;

$D(Y) = 10 \times 0.4 \times 0.6 = 2.4$, 故 C 正确;

高级中学名校试卷

故选：CD.

11. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(f(a)) = 1$, 则实数 a 的值可以为 ()

A. $1-e$

B. 0

C. 1

D. e^e

【答案】ACD

【解析】因为 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x) = 1$, 则 $\ln x = 1$ 或 $1-x = 1$,

解得 $x = e$ 或 $x = 0$,

因为 $f(f(a)) = 1$, 所以 $f(a) = e$ 或 $f(a) = 0$,

所以 $\ln a = e$ 或 $\ln a = 0$ 或 $1-a = 0$ 或 $1-a = e$, 解得 $a = e^e$ 或 $a = 1$ 或 $a = 1-e$.

故选：ACD

12. 已知 $a > 0, b > 0, a+b=1$, 则 ()

A. $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2}$

B. $\log_2 a + \log_2 b \leq -2$

C. $\ln a - \ln b \leq 2(a-b)$

D. $\cos a + \cos b \leq 2\cos \frac{1}{2}$

【答案】ABD

【解析】对于 A: $\mathbf{Q} a > 0, b > 0, a+b=1, \therefore 2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} = 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $2^a = 2^b$, 即 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取“=”, 故 A 正确,

对于 B: $\mathbf{Q} a > 0, b > 0, a+b=1, \therefore \log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) \leq \log_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取“=”, 故 B 正确,

对于 C: $\mathbf{Q} a > 0, b > 0, a+b=1$, 当 $a = \frac{9}{10}, b = \frac{1}{10}$, 此时

$\ln a - \ln b = \ln 9 = \ln 3^2 > \ln e^2 = 2$,

而 $2(a-b) = 2\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}\right) = 1.6$, 此时 $\ln a - \ln b > 2(a-b)$, 故 C 错误,

对于 D: $\mathbf{Q} a > 0, b > 0, a+b=1$,

$\therefore a = 1-b, \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} - b \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \therefore \cos \frac{a-b}{2} \in \left(\cos \frac{1}{2}, 1\right]$,

$\mathbf{Q} \cos a + \cos b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = 2\cos \frac{1}{2} \cos \frac{a-b}{2} \leq 2\cos \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$

高级中学名校试卷

时取等号，故 D 正确.

故选：ABD.

非选择题部分

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若 $2^a = 5^b = 100$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $Q 2^a = 5^b = 100, \therefore a = \log_2 100, b = \log_5 100, \therefore \frac{1}{a} = \log_{100} 2, \frac{1}{b} = \log_{100} 5.$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{100} 2 + \log_{100} 5 = \log_{100} 10 = \log_{10^2} 10 = \frac{1}{2}.$$

故【答案】为： $\frac{1}{2}$

14. 已知随机变量 X 的分布列如表：

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	m	n

若 $E(X) = 0$, 则 $D(3X-1) =$ _____.

【答案】 12

【解析】 $Q E(X) = 0, \therefore E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times m + 2 \times n = -\frac{1}{2} + m + 2n = 0 \text{ ①},$

又 $Q \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + n + m = 1 \text{ ②},$

$$\text{联立①②得} \begin{cases} m = \frac{1}{6} \\ n = \frac{1}{6} \end{cases},$$

$$\text{所以 } D(X) = (-1-0)^2 \times \frac{1}{2} + (0-0)^2 \times \frac{1}{6} + (1-0)^2 \times \frac{1}{6} + (2-0)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3},$$

则 $D(3X-1) = 3^2 \times D(X) = 12$. 故【答案】为： 12.

15. A, B, C, D, E, F , 6 名同学站成一排参加文艺汇演, 若 A 不站在两端, B 和 C 必须相邻, 则不同的排列方式共有 _____ 种.

【答案】 144

【解析】 根据题意, 由于 B 和 C 相邻, 把 B 和 C 看成一个元素, 与其他 4 个人全排列, 有 $A_2^2 A_5^5 = 240$ 种排法,

高级中学名校试卷

其中 A 站在两端的排法有 $A_2^1 A_4^4 A_2^2 = 96$ 种,

则有 $240 - 96 = 144$ 种符合题意的排法. 故【答案】为: 144.

16. 函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x} - a\right)(x - b)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 则 ab 的取值范围为

_____.

【答案】 $(-1, +\infty)$

【解析】 设 $g(x) = x - \frac{1}{x} - a$, $h(x) = x - b$,

则 $g(x) = x - \frac{1}{x} - a$, $h(x) = x - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $h(b) = 0$,

由于当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 0$,

若 $b \leq 0$, 则 $h(x) > 0$, $g(x) = x - \frac{1}{x} - a \geq 0$, 即 $a \leq x - \frac{1}{x}$ 恒成立, 显然不可能;

所以 $b > 0$, 则当 $x > b$ 时, $g(x) \geq 0$, 当 $0 < x < b$ 时, $g(x) \leq 0$,

所以 $g(b) = b - \frac{1}{b} - a = 0$, 则 $a = b - \frac{1}{b}$,

所以 $ab = \left(b - \frac{1}{b}\right)b = b^2 - 1 > -1$. 故【答案】为: $(-1, +\infty)$.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 已知函数 $f(x) = 4x^2 + (m - 2)x + 1, m \in \mathbf{R}$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集为空集, 求 m 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

解: (1) 因为函数 $f(x) = 4x^2 + (m - 2)x + 1, m \in \mathbf{R}$.

若不等式 $f(x) < 0$ 的解集为空集, 则 $\Delta = (m - 2)^2 - 4 \times 4 \times 1 \leq 0$,

解得 $-2 \leq m \leq 6$, 所以 m 的取值范围是 $[-2, 6]$;

(2) 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$,

即 $4(-x)^2 + (m - 2)(-x) + 1 = 4x^2 + (m - 2)x + 1$,

即 $2(m - 2)x = 0$,

则 $2(m - 2) = 0$,

解得 $m = 2$, 所以 $f(x) = 4x^2 + 1$, 对称轴为 $x = 0$, 开口向上,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0]$, 单调递增区间为 $[0, +\infty)$.

18. 已知在 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中, 前 3 项的系数分别为 a_1, a_2, a_3 , 且满足

$$2a_2 = a_1 + a_3.$$

(1) 求展开式中各项的二项式系数的和;

(2) 求展开式中系数最大的项;

(3) 求展开式中所有有理项.

解: (1) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式通项公式为 $T_{r+1} = C_n^r (\sqrt{x})^{n-r} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r = \frac{1}{2^r} C_n^r x^{\frac{3n-5r}{6}}$, $r = 0,$

$1, 2, \dots, n, (n \geq 2),$

$$\text{则 } a_1 = \frac{1}{2^0} C_n^0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2^1} C_n^1 = \frac{1}{2} n, \quad a_3 = \frac{1}{2^2} C_n^2 = \frac{n(n-1)}{8},$$

因为 $2a_2 = a_1 + a_3$, 即 $2 \times \frac{1}{2} n = 1 + \frac{n(n-1)}{8}$, 解得 $n = 8$ 或 $n = 1$ (舍去),

所以二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 展开式中各项的二项式系数的和为 $2^8 = 256$;

(2) 二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式通项公式为 $T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{x})^{8-r} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r = \frac{1}{2^r} C_8^r x^{\frac{24-5r}{6}}$

($0 \leq r \leq 8$ 且 $r \in \mathbb{N}$),

记第 k 项系数最大, 则有 $T_k \geq T_{k+1}$, 且 $T_k \geq T_{k-1}$,

$$\text{即 } \begin{cases} C_8^{k-1} 2^{-k+1} \geq C_8^k 2^{-k} \\ C_8^{k-1} 2^{-k+1} \geq C_8^{k-2} 2^{-k+2} \end{cases}, \text{ 解得 } 3 \leq k \leq 4, \text{ 又 } k \in \mathbb{N},$$

所以 $k = 3$ 或 $k = 4$,

所以系数最大项为第 3 项 $T_3 = 7x^{\frac{7}{3}}$ 和第 4 项 $T_4 = 7x^{\frac{3}{2}}$;

(3) 因为二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式通项公式为 $T_{r+1} = \frac{1}{2^r} C_8^r x^{\frac{24-5r}{6}}$ ($0 \leq r \leq 8$ 且 $r \in \mathbb{N}$),

令 $\frac{24-5r}{6} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq 8$ 且 $r \in \mathbb{N}$, 则 $r = 0$ 或 $r = 6$,

所以展开式中有理项为 $T_1 = x^4$ 和 $T_7 = \frac{7}{16x}$.

19. 为了铭记建党历史、缅怀革命先烈、增强爱国主义情怀, 某校组织了党史知识竞赛活动. 在最后一轮晋级比赛中, 甲、乙、丙三名同学回答一道有关红色革命根据地建立时间的问题, 已知甲回答正确这道题的概率为 $\frac{3}{4}$, 甲、丙都回答正确这道题的概率是 $\frac{3}{5}$

高级中学名校试卷

，乙、丙都回答正确这道题的概率是 $\frac{2}{3}$ 。若每位同学回答这道题是否正确是互不影响的。

(1) 若规定三名同学都需要回答这个问题，求甲、乙、丙中至少 1 名同学回答正确的概率。

(2) 若规定三名同学需要抢答这道题，已知甲抢到答题机会的概率为 $\frac{1}{3}$ ，乙抢到的概率为 $\frac{1}{4}$ ，

丙抢到的概率为 $\frac{5}{12}$ ，求这个问题回答正确的概率。

解：(1) 记甲，乙，丙三人独自答对这道题分别为事件 A, B, C ，则甲，乙，丙三人答对这道题的概率为 $P(A), P(B), P(C)$ ，

由于每人回答问题正确与否是相互独立的，因此事件 A, B, C 是相互独立事件，

由题意可得， $P(A) = \frac{3}{4}$ ， $P(AC) = P(A)P(C) = \frac{3}{4}P(C) = \frac{3}{5}$ ，则 $P(C) = \frac{4}{5}$ ，

且 $P(BC) = P(B)P(C) = P(B) \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$ ，则 $P(B) = \frac{5}{6}$ ，

则甲、乙、丙中至少 1 名同学回答正确的概率为

$$1 - \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{119}{120}.$$

(2) 由题意可得，这个问题回答正确的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{5} = \frac{19}{24}$ 。

20. 已知函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ ($a > 0$)。当点 $P(x, y)$ 在函数 $y = g(x)$ 图像上运动时，对应的点 $P_0(4x, 2y)$ 在函数 $y = f(x)$ 图像上运动，则称函数 $y = g(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的“伴随”函数。

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) < -1$ ；

(2) 对任意的 $x \in (0, 2)$ ， $f(x)$ 的图像总在其“伴随”函数图像的下方，求 a 的取值范围；

(3) 设函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ ， $x \in (0, 2)$ 。当 $a = 1$ 时，求 $|F(x)|$ 的最大值。

解：(1) 依题意得 $\begin{cases} x+a > 0 \\ \log_2(x+a) < 1 \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} x+a > 0 \\ x+a < 2 \end{cases}$ ，所以 $-a < x < 2-a$ ，

所以原不等式的解集为 $\{x | -a < x < 2-a\}$ 。

(2) 由题意得 $2y = \log_2(4x+a)$ ，所以 $y = \frac{1}{2} \log_2(4x+a)$ ，所以 $f(x)$ 的“伴随”函数为

$g(x) = \frac{1}{2} \log_2(4x+a)$ 。依题意，对任意的 $x \in (0, 2)$ ， $f(x)$ 的图像总在其“伴随”

函数图像的下方, 即当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) - g(x) = \log_2(x+a) - \frac{1}{2} \log_2(4x+a) < 0$ 恒成

①.

由 $\begin{cases} x+a > 0 \\ 4x+a > 0 \end{cases}$, 对任意的 $x \in (0, 2)$ 总成立, 结合题设条件有 $a > 0$,

在此条件下, ①等价于当 $x \in (0, 2)$ 时, $\log_2(x+a)^2 < \log_2(4x+a)$ 恒成立,

即 $(x+a)^2 < 4x+a$, 即 $x^2 + (2a-4)x + a^2 - a < 0$.

设 $h(x) = x^2 + (2a-4)x + a^2 - a$, 要使当 $x \in (0, 2)$ 时, $h(x) < 0$ 恒成立,

只需 $\begin{cases} h(0) \leq 0 \\ h(2) \leq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a^2 - a \leq 0 \\ a^2 + 3a - 4 \leq 0 \end{cases}$ 成立,

解得 $\begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ -4 \leq a \leq 1 \end{cases}$, 即 $0 \leq a \leq 1$, 且 $a > 0$,

即 a 的取值范围是 $(0, 1]$.

(3) 由 (2) 可得当 $a=1$ 时, 在区间 $(0, 2)$ 上, $f(x) < g(x)$,

即 $|F(x)| = g(x) - f(x) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{4x+1}{(x+1)^2}$.

设 $t = \frac{4x+1}{(x+1)^2} (t > 0)$, 则 $\frac{1}{t} = \frac{(x+1)^2}{4x+1}$.

令 $4x+1 = u (1 < u < 9)$, 则 $x = \frac{u-1}{4}$,

所以 $\frac{1}{t} = \frac{\left(\frac{u+3}{4}\right)^2}{u} = \frac{1}{16} \left(u + \frac{9}{u} + 6\right)$,

因为 $u + \frac{9}{u} \geq 6$ (当且仅当 $u=3$ 时, 等号成立),

可得 $\frac{1}{t} \geq \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

满足 $x \in (0, 2)$, 则 t 的最大值为 $\frac{4}{3}$,

所以 $|F(x)|$ 的最大值是 $\frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{3} = 1 - \frac{1}{2} \log_2 3$.

21. 孔子曰: 温故而知新, 可以为师矣. 数学学科的学习也是如此, 为了调查“数学成绩是

高级中学名校试卷

否优秀”与“是否及时复习”之间的关系，某校志愿者从高二年级的所有学生中随机抽取 60

高级中学名校试卷

名学生进行问卷调查，得到如下样本数据：

	数学成绩优秀（人数）	数学成绩不优秀（人数）
及时复习（人数）	24	6
不及时复习（人数）	8	22

（1）试根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，能否认为“数学成绩优秀”与“及时复习”有关系？

（2）在该样本中，用分层抽样的方法从数学成绩优秀的学生中抽取 8 人，再从这 8 人中随机抽取 3 人，设抽取 3 人中及时复习的人数为 X ，求 X 的分布列与数学期望。

临界值参考表：

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

（参考公式 $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ ）

解：（1）设 H_0 表示数学成绩优秀与及时复习没有关联，

$$\text{根据数据计算 } \chi^2 = \frac{60 \times (24 \times 22 - 8 \times 6)^2}{30 \times 30 \times 32 \times 28} = \frac{120}{7} \approx 17.143 > 10.828,$$

依据 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，可以推断 H_0 不成立，

即认为“数学成绩优秀”与“及时复习”有关，该推断犯错误的概率不超过 0.001。

（2）根据分层抽样可得，选取的 8 人中，及时复习 $\frac{24}{24+8} \times 8 = 6$ 人，不及时复习

$\frac{8}{24+8} \times 8 = 2$ 人， X 的可能取值为 1, 2, 3，

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{C_6^1 \cdot C_2^2}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}, \quad P(X=2) = \frac{C_6^2 \cdot C_2^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^3 \cdot C_2^0}{C_8^3} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14},$$

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

所以 X 的期望 $E(X) = 1 \times \frac{3}{28} + 2 \times \frac{15}{28} + 3 \times \frac{5}{14} = \frac{9}{4}$.

22. “函数 $H(x)$ 的图象关于点 (m, n) 对称”的充要条件是“对于函数 $H(x)$ 定义域内的任意 x , 都有 $H(x) + H(2m - x) = 2n$ ”. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^2 - (a-1)x + a$.

(1) 求 $f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)$ 的值;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{2x}{3-x}$.

(i) 证明函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(3, -2)$ 对称;

(ii) 若对任意 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_2 \in [-3, 2]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 所以 $f(x) + f(2-x) = 4$,

当 $x=0$ 时, 可得 $f(0) + f(2) = 4$;

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 可得 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$;

当 $x=1$ 时, 可得 $f(1) + f(1) = 4$, 即 $f(1) = 2$,

则 $f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) = 4 + 4 + 2 = 10$.

(2) (i) 由函数 $g(x) = \frac{2x}{3-x} = \frac{-2 \cdot (3-x) + 6}{3-x} = -2 + \frac{6}{3-x} = -2 - \frac{6}{x-3}$,

可得 $g(x) + g(6-x) = -2 - \frac{6}{x-3} - 2 - \frac{6}{6-x-3} = -4 - \frac{6}{x-3} - \frac{6}{3-x} = -4$,

即 $g(x) + g(6-x) = -4$, 所以函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(3, -2)$ 对称;

(ii) 当 $x \in [-3, 2]$ 时, $g(x) = -2 - \frac{6}{x-3}$ 为单调递增函数, 可得 $g(x) \in [-1, 4]$,

函数 $y = f(x), x \in [0, 2]$ 的值域为 A ,

若对任意 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_2 \in [-3, 2]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 等价于 $A \subseteq [-1, 4]$,

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^2 - (a-1)x + a$,

①当 $\frac{a-1}{2} \leq 0$ 时, 即 $a \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

由对称性知 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 则函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/068004024111006101>