

哈三中 2023—2024 学年度下学期

高三学年第四次模拟考试数学试卷

考试说明：(1) 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分。

考试时间为 120 分钟；

(2) 第 I 卷，第 II 卷试题答案均答在答题卡上，交卷时只交答题卡

第 I 卷（选择题，共 58 分）

一、选择题（共 58 分）

(一) 单项选择题（共 8 小题，每小题 5 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ， $“a^2 = b^2”$ 是 $“a^2 + b^2 = 2ab”$ 的（ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

2. 已知 $A = \left\{ x \mid \frac{mx+1}{mx-1} \leq 0 \right\}$ ，若 $2 \in A$ ，则 m 的取值范围是（ ）

A. $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

C. $m \leq -\frac{1}{2}$ 或 $m > \frac{1}{2}$

D. $m \leq -\frac{1}{2}$ 或 $m \geq \frac{1}{2}$

3. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $2a \sin B = b \tan A$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，则 $bc =$ （ ）

A. $2\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. 2

D. 4

4. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ ($n \geq 3$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$)，则 a_{2024} 的值为（ ）

A. 3

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

5. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, \vec{b} = (3, 0), |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$ ，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为（ ）

A. $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

D. $(1, 0)$

6. 2025 年第 9 届亚冬会将在哈尔滨举办，某校的五位同学准备前往哈尔滨冰雪文化博物馆、群力音乐公园、哈尔滨极地公园三个著名景点进行打卡，已知每个景点至少有一位同学前往，并且每位同学只能选择其中一个景点，若学生甲和学生乙必须选同一个景点，则不同的选法种数是（ ）

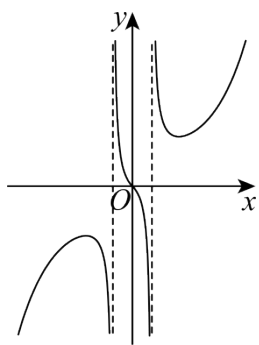
A. 18

B. 36

C. 54

D. 72

7. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()



A. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3|x| - 2}$

B. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2 - 3|x|}$

C. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{3|x| - 2}$

D. $f(x) = \frac{2x}{|x| - 1}$

8. 过椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的任意一点 M (不与顶点重合) 作椭圆的切线交 x 轴于点 N , O 为坐标原点,

过 N 作直线 OM 的垂线交直线 OM 于点 P , 则 $|OM| \cdot |OP|$ ()

A. 既没最大值也没最小值

B. 有最小值没有最大值

C. 有最大值没有最小值

D. 为定值

(二) 多项选择题 (共 3 小题, 每小题 6 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 已知 i 是虚数单位, 下列说法正确的是 ()

A. 复数 z_1, z_2 满足 $\overline{z_1} = z_2$, 则 $|z_1| = |\overline{z_2}|$

B. 已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 若 $a > c, b > d$, 则 $a + bi > c + di$

C. 复数 z 满足 $|z - i| = 2|z + i|$, 则 z 在复平面内对应的点的轨迹为一条直线

D. 复数 z 满足 $-2iz = |1 - \sqrt{3}i|$, 则 $z^1 + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

10. 已知圆锥 SO (O 是底面圆的圆心, S 是圆锥的顶点) 的母线长为 $\sqrt{5}$, 高为 1. 若 P, Q 为底面圆周上任意两点, 则下列结论正确的是 ()

A. 三角形 SPQ 面积的最大值为 2

B. 三棱锥 $O - SPQ$ 体积的最大值 $\frac{2}{3}$

C. 四面体 $SOPQ$ 外接球表面积的最小值为 $\frac{19}{3}\pi$

D. 直线 SP 与平面 SOQ 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2}\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 且满足 $f(0) = 1$,

则下列结论中正确的是 ()

A. $\varphi = \frac{\pi}{4}$

B. 函数 $g(x) = f(x) + f'(x)$ 的图象不可能关于 y 轴对称

C. 若 $f(x)$ 最小正周期为 2π , 且 $f(\alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha = -\frac{16}{25}$

D. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上恰有一个最大值点和一个最小值点, 则实数 ω 的取值范围是 $(3, 5]$

第 II 卷 (非选择题, 共 92 分)

二、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分. 将答案填在答题卡相应的位置上)

12. 已知空间中有三点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, -1, 1)$, $B(1, 1, 0)$, 则点 O 到直线 AB 的距离为_____.

13. 在 $\left(2x - \frac{1}{x} + 1\right)^5$ 的展开式中常数项为_____.

14. 牛顿迭代法又称牛顿——拉夫逊方法, 它是牛顿在 17 世纪提出的一种在实数集上近似求解方程根的一种方法. 具体步骤如下图示: 设 r 是函数 $y = f(x)$ 的一个零点, 任意选取 x_0 作为 r 的初始近似值, 在点

$(x_0, f(x_0))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线 l_1 , 设与 l_1 轴 x 交点的横坐标为 x_1 , 并称 x_1 为 r 的 1 次近似值; 在点

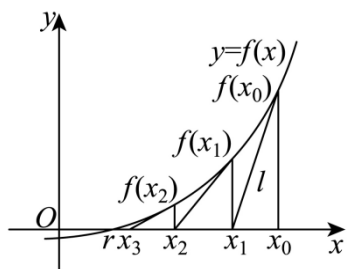
$(x_1, f(x_1))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线 l_2 , 设与 l_2 轴 x 交点的横坐标为 x_2 , 称 x_2 为 r 的 2 次近似值. 一般地,

在点 $(x_n, f(x_n))$ ($n \in \mathbb{N}$) 作曲线 $y = f(x)$ 的切线 l_{n+1} , 记 l_{n+1} 与 x 轴交点的横坐标为 x_{n+1} , 并称 x_{n+1} 为

r 的 $n+1$ 次近似值. 设 $f(x) = x^3 + x - 3$ ($x \geq 0$) 的零点为 r , 取 $x_0 = 0$, 则 r 的 1 次近似值为_____;

若 x_n 为 r 的 n 次近似值, 设 $a_n = \frac{3x_n^3 + x_n}{2x_n^3 + 3}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n . 若任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n > \lambda$ 恒成

立, 则整数 λ 的最大值为_____.



三、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

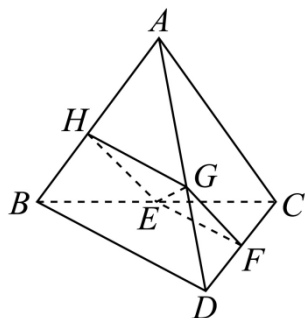
15. 如图，边长为 4 的两个正三角形 ABC ， BCD 所在平面互相垂直， E ， F 分别为 BC ， CD 的中点，点 G 在棱 AD 上， $AG = 2GD$ ，直线 AB 与平面 EFG 相交于点 H .

(1) 从下面两个结论中选一个证明：

① $BD \parallel GH$ ；② 直线 HE ， GF ， AC 相交于一点；

注：若两个问题均作答，则按第一个计分.

(2) 求点 A 到平面 EGH 的距离.

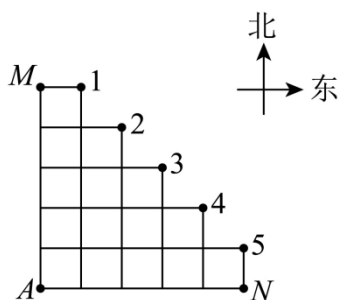


16. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_n S_n = 2^n (2^{n+1} - 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，求 T_{2n} .

17. 2023 年以来，哈尔滨掀起了一波旅游热潮.太阳岛某游乐园的一个迷宫如图，票价为每人 10 元，游客从 A 处进入，沿图中实线游玩且规定只能向北或向东走（且除 M ， N 外其他每个路口选择向北和向东的概率均为 $\frac{1}{2}$ ），直到从 n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) 号出口走出，且从 n 号出口走出后，会得到一份奖金 $2n$ 元.



(1) 随机调查了进游乐园的 50 名游客，统计出喜欢走迷宫的人数如表：

	男 性	女 性	总 计
喜欢走迷宫	14	16	30
不喜欢走迷 宫	16	4	20
总计	30	20	50

根据小概率值 $\alpha = 0.025$ 的独立性检验，能否认为喜欢走迷宫与性别有关？如果有关，请解释它们之间如何相互影响：

$$\text{附 } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
χ_{α}	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(2) 设某位游客获得奖金 X 元，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

(3) 若每天走迷宫的游客大约为 100 人，则迷宫项目每天收入约为多少？

18. 已知 $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 平面内动点 P 满足 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{NP}|$.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2) 动直线 l 交 C 于 A 、 B 两点， O 为坐标原点，直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β ，若

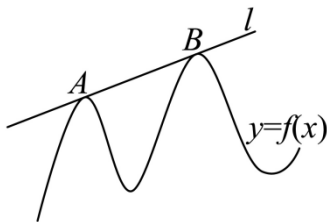
$\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ ，求证直线 l 过定点，并求出该定点坐标；

(3) 设 (2) 中定点为 Q ，记 $\triangle OQA$ 与 $\triangle OQB$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 ，求 $S_1 \cdot S_2$ 的取值范围.

19. 若函数 $y = f(x)$ 的图象上的若干个不同点处的切线互相重合，则称该切线为函数 $y = f(x)$ 的图象的

“自公切线”，称这若干个为函数 $y = f(x)$ 的图象的一组“同切点”例如，如图，直线 l 为函数 $y = f(x)$

的图象的“自公切线”， A ， B 为函数 $y = f(x)$ 的图象的一组“同切点”.



(1) 已知函数 $f(x) = x \cos x$ 在 $x = 0$ 处的切线为它的一条“自公切线”，求该自公切线方程；

(2) 若 $a \in \mathbb{R}$ ，求证：函数 $g(x) = x - \tan x + a$ ， $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 有唯一零点，且该函数的图象不存在“自公切线”；

(3) 设 $n \in \mathbb{N}^*$ ，函数 $h_n(x) = \frac{x}{n} - \tan x - \pi$ ， $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ 的零点为 q_n ，求证：

$A_n(q_{2n}, f(q_{2n}))$ 为函数 $f(x) = x \cos x$ 的一组同切点.

哈三中 2023—2024 学年度下学期

高三学年第四次模拟考试数学试卷

考试说明：(1) 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分.

考试时间为 120 分钟；

(2) 第 I 卷，第 II 卷试题答案均答在答题卡上，交卷时只交答题卡

第 I 卷（选择题，共 58 分）

一、选择题（共 58 分）

(一) 单项选择题（共 8 小题，每小题 5 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，“ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + b^2 = 2ab$ ”的（ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据充分、必要性定义判断条件的推出关系，即可得答案.

【详解】由 $a^2 = b^2$ ，则 $a = \pm b$ ，当 $a = -b \neq 0$ 时 $a^2 + b^2 = 2ab$ 不成立，充分性不成立；

由 $a^2 + b^2 = 2ab$ ，则 $(a-b)^2 = 0$ ，即 $a = b$ ，显然 $a^2 = b^2$ 成立，必要性成立；

所以 $a^2 = b^2$ 是 $a^2 + b^2 = 2ab$ 的必要不充分条件.

故选：B

2. 已知 $A = \left\{ x \mid \frac{mx+1}{mx-1} \leq 0 \right\}$ ，若 $2 \in A$ ，则 m 的取值范围是 ()

A. $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

C. $m \leq -\frac{1}{2}$ 或 $m > \frac{1}{2}$

D. $m \leq -\frac{1}{2}$ 或 $m \geq \frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】将 $x=2$ 代入 $\frac{mx+1}{mx-1} \leq 0$ ，然后转化为一元二次不等式求解可得.

【详解】因为 $2 \in A$ ，所以 $\frac{2m+1}{2m-1} \leq 0$ ，等价于 $\begin{cases} (2m+1)(2m-1) \leq 0 \\ 2m-1 \neq 0 \end{cases}$ ，

解得 $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2}$.

故选：A

3. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $2a \sin B = b \tan A$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，则 $bc =$ ()

A. $2\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. 2

D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】由 $2a \sin B = b \tan A$ ，利用边化角，求解 A ，由面积为 $\sqrt{3}$ ，求解 bc ，判断选项.

【详解】由 $2a \sin B = b \tan A$ ，则 $2 \sin A \sin B = \sin B \tan A (\sin B > 0)$ ，故 $\cos A = \frac{1}{2}$ ，

又 $0 < A < \pi$ ，所以 $A = \frac{\pi}{3}$ ，

由 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$, 即 $bc = 4$.

故选: D

4. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ ($n \geq 3$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$), 则 a_{2024} 的值为 ()

A. 3

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用递推数列的性质, 找到数列的周期, 求出即可.

【详解】因为 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ ($n \geq 3$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$),

所以 $a_3 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{2}{3}, a_7 = \frac{a_6}{a_5} = 2, a_8 = \frac{a_7}{a_6} = 3, \dots$,

所以数列 $\{a_n\}$ 具有周期性, 且 $T = 6$, 所以 $a_{2024} = a_{337 \times 6 + 2} = a_2 = 3$.

故选: A.

5. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, \vec{b} = (3, 0), |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 ()

A. $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

D. $(1, 0)$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意可知: $|\vec{b}| = 3$, 根据模长关系结合数量积的运算律可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$, 进而可求投影向量.

【详解】由题意可知: $|\vec{b}| = 3$,

因为 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$,

即 $10 = 4 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9$, 可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$,

所以向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right) \vec{b} = \frac{1}{6} \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

故选: C.

届亚冬会将在哈尔滨举办，某校的五位同学准备前往哈尔滨冰雪文化博物馆、群力音乐公园、哈尔滨极地公园三个著名景点进行打卡，已知每个景点至少有一位同学前往，并且每位同学只能选择其中一个景点，若学生甲和学生乙必须选同一个景点，则不同的选法种数是（ ）

A. 18

B. 36

C. 54

D. 72

【答案】B

【解析】

【分析】先根据甲乙选的景点其他人是否选分成两类情况，①无人再选，按照1,2,2分组计算方法数；②还有人选，按照1,1,3部分平均分组成计算方法数，最后用分类加法原理计算总的方法数即可.

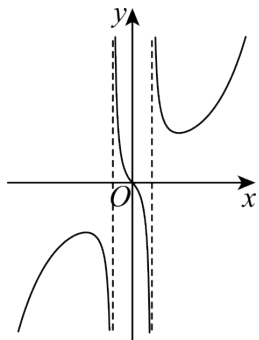
【详解】若甲、乙选的景点没有其他人选，则分组方式为：1,2,2的选法总数为： $C_3^2 A_3^3 = 18$,

若甲、乙选的景点还有其他人选择，则分组方式为：1,1,3的选法总数为： $\frac{C_3^1 C_2^1}{A_2^2} A_3^3 = 18$,

所以不同的选法总数为： $18+18=36$.

故选：B.

7. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（ ）



A. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3|x| - 2}$

B. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2 - 3|x|}$

C. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{3|x| - 2}$

D. $f(x) = \frac{2x}{|x| - 1}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 上的值排除 B，利用奇偶性排除排除 C，利用 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性排除 D，从而判断选项.

【详解】对于 B，当 $x > \frac{2}{3}$ 时， $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2 - 3x}$ ， $e^x - e^{-x} > 0$ ， $2 - 3x < 0$ ，则 $f(x) < 0$

, 不满足图象, 故 B 错误;

对于 C, $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{3|x| - 2}$, 定义域为 $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, 而

$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{3|x| - 2} = f(x)$, 关于 y 轴对称, 故 C 错误;

对于 D, 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$, 由反比例函数的性质可知 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 故 D 错误;

利用排除法可以得到, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3|x| - 2}$ 在满足题意, A 正确.

故选: A

8. 过椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的任意一点 M (不与顶点重合) 作椭圆的切线交 x 轴于点 N , O 为坐标原点,

过 N 作直线 OM 的垂线交直线 OM 于点 P , 则 $|OM| \cdot |OP|$ ()

A. 既没最大值也没最小值

B. 有最小值没有最大值

C. 有最大值没有最小值

D. 为定值

【答案】D

【解析】

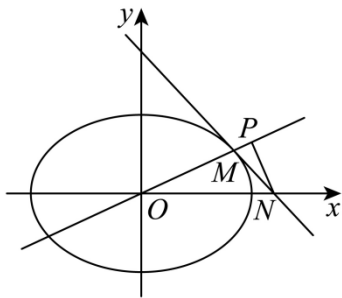
【分析】利用导数求得切线斜率以及 MN 方程, 从而求得点 N 坐标, 再结合点到直线的距离公式以及两点之间的距离公式求得 $|OM|, |OP|$, 再求乘积即可.

【详解】设 $M(x_0, y_0)$, 对 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 求导可得: $\frac{2}{9}x + \frac{y}{2}y' = 0$, 解得 $y' = -\frac{4x}{9y}$, 故 MN 方程为:

$$y - y_0 = -\frac{4x_0}{9y_0}(x - x_0),$$

即 $9y_0y - 9y_0^2 = -4x_0x + 4x_0^2$, $4x_0x + 9y_0y = 4x_0^2 + 9y_0^2$, 又 $4x_0^2 + 9y_0^2 = 36$, 故 MN 方程为:

$$4x_0x + 9y_0y = 36;$$



令 $y=0$ ，解得 $x=\frac{9}{x_0}$ ，故 $N\left(\frac{9}{x_0}, 0\right)$ ；又 OM 方程为 $y=\frac{y_0}{x_0}x$ ，故

$$|NP| = \frac{\left|\frac{9y_0}{x_0^2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 + 1}} = \frac{\left|\frac{9y_0}{x_0^2}\right|}{\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{|x_0|}} = \frac{9\left|\frac{y_0}{x_0}\right|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$$\text{则 } |OP| = \sqrt{|ON|^2 - |NP|^2} = \sqrt{\frac{81}{x_0^2} - \frac{81y_0^2}{x_0^2(x_0^2 + y_0^2)}} = \sqrt{\frac{81x_0^2}{x_0^2(x_0^2 + y_0^2)}} = \sqrt{\frac{81}{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{9}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

$$\text{又 } |OM| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \text{ 故 } |OM||OP| = \frac{9}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 9.$$

故选：D.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是利用函数求导求得过点 M 的切线方程，事实上，也可在选填中根据二级结论直接写出 MN 方程.

(二) 多项选择题 (共 3 小题，每小题 6 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分)

9. 已知 i 是虚数单位，下列说法正确的是 ()

A. 复数 z_1, z_2 满足 $\overline{z_1} = z_2$ ，则 $|z_1| = |z_2|$

B. 已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，若 $a > c, b > d$ ，则 $a + bi > c + di$

C. 复数 z 满足 $|z - i| = 2|z + i|$ ，则 z 在复平面内对应的点的轨迹为一条直线

D. 复数 z 满足 $-2iz = |1 - \sqrt{3}i|$ ，则 $z^1 + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据共轭复数以及模长公式即可求解 A，根据虚数的性质即可求解 B，根据复数模长即可根据圆的方程求解 C，根据 i 的周期性即可求解 D.

【详解】对于 A，由于 $\overline{z_1} = z_2$ ，则 $z_1 = \overline{z_2}$ ，故 $|z_1| = |\overline{z_2}|$ ，故 A 正确；

对于 B，若 $a+bi, c+di$ 为虚数，由于虚数不可以比较大小，故 B 错误，

对于 C，设 $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ ，则 $|z-i| = 2|z+i| \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ ，

化简可得 $x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ ，则 z 在复平面内对应中的轨迹为圆，故 C 错误，

对于 D，由 $-2iz = |1 - \sqrt{3}i|$ 得 $-2iz = 2$ ，则 $z = i$ ，

故 $z^1 + z^2 + z^3 + z^4 = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$ ，故 D 正确，

故选：AD.

10. 已知圆锥 SO (O 是底面圆的圆心， S 是圆锥的顶点) 的母线长为 $\sqrt{5}$ ，高为 1. 若 P, Q 为底面圆周上任意两点，则下列结论正确的是 ()

A. 三角形 SPQ 面积的最大值为 2

B. 三棱锥 $O-SPQ$ 体积的最大值 $\frac{2}{3}$

C. 四面体 $SOPQ$ 外接球表面积的最小值为 $\frac{19}{3}\pi$

D. 直线 SP 与平面 SOQ 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】BD

【解析】

【分析】对于 A，判断 $\angle PSC$ 为钝角，确保 $\angle PSQ$ 取得到 $\frac{\pi}{2}$ ，然后由面积公式求解可判断 A；对于 B，根据 $S_{\text{锥}} = \frac{1}{2} OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ$ 可判断 B；对于 C，利用正弦定理求 $\triangle OPQ$ 的外接圆半径 $r = \frac{1}{\sin \theta}$ ，然后可得外接球半径，根据 θ 范围可判断 C；对于 D，作 $PD \perp OQ$ ，然后证明 $PD \perp$ 平面 SOQ ，可得

$\sin \theta = \frac{PD}{SP} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin \angle POQ$ ，可判断 D.

【详解】对于 A，延长 PO 交底面圆于点 C ，因为 $SP = \sqrt{5}, SO = 1$ ，

所以 $PC = 2\sqrt{SP^2 - SO^2} = 4$ ，

在 $\triangle SPC$ 中，由余弦定理得 $\cos \angle PSC = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 4^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = -\frac{3}{5}$ ，所以 $\angle PSC$ 为钝角，

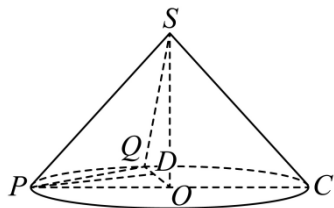
所以 $S_{\triangle SPQ} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sin \angle PSQ \leq \frac{5}{2}$, 当且仅当 $\angle PSQ = \frac{\pi}{2}$ 时等号成立,

所以三角形 SPQ 面积的最大值为 $\frac{5}{2}$, A 错误;

对于 B, 因为 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ = 2 \sin \angle POQ$,

所以三棱锥 $O-SPQ$ 体积为 $\frac{1}{3} S_{\triangle OPQ} \cdot SO = \frac{2}{3} \sin \angle POQ$,

当 $\sin \angle POQ = \frac{\pi}{2}$ 时取得最大值 $\frac{2}{3}$, B 正确;



对于 C, 记四面体 $SOPQ$ 外接球半径为 R , $\triangle OPQ$ 的外接圆半径为 r , $\angle OPQ = \theta$,

因为 $OP = OQ$, $\triangle OPQ$ 为等腰三角形, 所以 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

因为球心到 S, O 的距离相等, 所以球心在 SO 的中垂面上, 故球心到平面 OPQ 的距离为 $\frac{1}{2}$,

由正弦定理得 $r = \frac{OQ}{2 \sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$, 所以 $R^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta}$,

因为 $0 < \sin^2 \theta < 1$, 所以 $\frac{1}{\sin^2 \theta} > 1$, $R^2 > \frac{5}{4}$,

所以四面体 $SOPQ$ 外接球表面积 $S = 4\pi R^2 > 5\pi$, 无最小值, C 错误;

对于 D, 作 $PD \perp OQ$, 垂足为 D ,

因为 $SO \perp$ 平面 OPQ , $SO \subset$ 平面 SOQ , 所以平面 $SOQ \perp$ 平面 OPQ ,

又平面 $SOQ \cap$ 平面 $OPQ = OQ$, $PD \subset$ 平面 OPQ , 所以 $PD \perp$ 平面 SOQ ,

记直线 SP 与平面 SOQ 所成角为 α , 则 $\sin \alpha = \frac{PD}{SP} = \frac{\sqrt{5}}{5} PD$,

又 $PD = OP \sin \angle POQ = 2 \sin \angle POQ$, 所以 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin \angle POQ$,

当 $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin \alpha$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, D 正确.

故选: BD

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/068016113047006075>