高一数学必修一　函数的应用

一．选择题（共 **30** 小题）

1．已知函数$f(x)=x(x-\ln\frac{x^2}{a})$，关于 x 的方程 $f(x)=a$ 存在四个不同实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,1)\cup(1,e)$　　B．$(0,\frac{1}{e})$　　C．$(\frac{1}{e},1)$　　D．$(0,1)$

2．某码头有总重量为 13.5 吨的一批货箱，对于每个货箱重量都不超过 0.35 吨的任何情况，都要一次运走这批货箱，则至少需要准备载重 1.5 吨的卡车（　　）

A．12 辆　　B．11 辆　　C．10 辆　　D．9 辆

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, & x>0\\ -x^2+mx, & x\leqslant 0\end{cases}$ 和 $g(x)=a$（$a\in\mathbf{R}$ 且为常数）．有以下结论：

①当 $a=4$ 时，存在实数 m，使得关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有四个不同的实数根；

②存在 $m\in[3,4]$，使得关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有三个不同的实数根；

③当 $x>0$ 时，若函数 $h(x)=f^2(x)+bf(x)+c$ 恰有 3 个不同的零点 x_1，x_2，x_3，则 $x_1x_2x_3=1$；

④当 $m=-4$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有四个不同的实数根 x_1，x_2，x_3，x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，若 $f(x)$ 在$[x_3^2, x_4]$上的最大值为 $ln4$，则 $\sin(3x_1+3x_2+5x_3+4x_4)\pi=1$．

其中正确结论的个数是（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+2), & -2<x\leqslant 0\\ x^2-2x+1, & x>0\end{cases}$，若函数 $g(x)=[f(f(x))]^2-(a+1)\bullet f(f(x))+a$（$a\in\mathbf{R}$）恰有 8 个不同零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,1)$　　B．$[0,1]$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$[0,+\infty)$

5．已知$f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，方程$f(x)+2\sqrt{1-x^2}+|f(x)-2\sqrt{1-x^2}|-2ax-4=0$有三个实根 $x_1<x_2<x_3$，若 $x_3-x_2=2(x_2-x_1)$，则实数 $a=$（　　）

A．$a=\frac{\sqrt{17}+3}{2}$　　B．$a=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$　　C．$a=-1$　　D．$a=1$

6．已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ 2x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$，若方程 $f(x)=ax$ 有三个不同的实数根 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 x_1-x_2 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{1}{e}-e,\frac{e}{1-2e})$　B．$(\frac{2e^2}{1-2e},-\frac{3}{2})$　C．$(\frac{1}{2}-e,\frac{1-e}{2e-1})$　D．$(\frac{1}{2}-e,\frac{1}{e}-1)$

7．已知函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则方程 $f(2020^{-x})=f(\log_{2020}|x|)$ 的解至少有多少个（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

8．函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且函数 $f(x-1)$ 为偶函数，当 $x=[0,1]$时，$f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$，若 $g(x)=f(x)-x-b$ 有三个零点，则实数 b 的取值集合是（　　）

A．$(2k-\sqrt{2}+1, 2k+\sqrt{2}-1)$，$k\in\mathbf{Z}$　　B．$(2k-\frac{1}{4}, 4k+\frac{1}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $(4k-\sqrt{2}+1,\ 4k+\sqrt{2}-1)$，$k\in\mathbf{Z}$　　　　D. $(4k-\frac{1}{4},\ 4k+\frac{1}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$

9．已知函数$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ -\sqrt{-x^2+6x-8}, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-kx-1$ 恰有三个零点，则实数 k 的取值范围为（　　）

A. $[-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4}]$　B. $(-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4}]$　C. $(-\frac{4}{3},\ -\frac{1}{4})$　D. $(-\frac{4}{3},\ -\frac{1}{4}]$

10．已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{x^2+3}, & x\leqslant 0\\ x^3, & x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程$|f(x)-a|+|f(x)-a-1|=1$，有且仅有三个不同的整数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[-\frac{3}{2},\ -\frac{27}{19})$　B. $[0,\ 8]$　C. $[-\frac{4}{7},\ -\frac{18}{19})$　D. $(-\frac{1}{2},\ 0]$

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2e^{2x}-e^{x}, & x\leqslant a\\ x, & x>a\end{cases}$，$g(x)=f(x)-b$，$h(x)=f[f(x)]-b$，记函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的零点个数分别是 M，N，则（　　）

A．若 $M=1$，则 $N\leqslant 2$　B．若 $M=2$，则 $N\geqslant 2$　C．若 $M=3$，则 $N=4$　D．若 $N=3$，则 $M=2$

12．已知 $f(x)=a(e^{x}-e^{-x})-\sin\pi x$（$a>0$）存在唯一零点，则实数 a 的取值范围（　　）

A. $(\frac{\pi}{2},\ +\infty)$　B. $[\frac{\pi}{2},\ +\infty)$　C. $(\frac{1}{2},\ +\infty)$　D. $[\frac{1}{2},\ +\infty)$

13．若函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$，$a>0$，若 $f(x)$ 有两个零点，则 a 的取值范围为（　　）

A．$(0,1)$　B．$(0,1]$　C. $(\frac{1}{e},\ e]$　D. $[\frac{1}{e},\ e]$

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+\frac{17}{6}x+1, & -2\leqslant x<0,\\ \ln x, & 0<x\leqslant e,\end{cases}$ 函数 $g(x)=kx$．若关于 x 的方程 $f(x)-g(x)=0$ 有 3 个互异的实数根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $(\frac{1}{e},\ \frac{5}{6})$　B. $[\frac{1}{3},\ \frac{1}{e}]$　C. $[\frac{1}{3},\ \frac{5}{6}]$　D. $(0,\ \frac{1}{e})$

15．已知函数 $f(x)=min\{x|x-2a|,\ x^2-6ax+8a^2+4\}$（$a>1$），其中 $min(p,q)=\begin{cases}p, & p\leqslant q\\ q, & p>q\end{cases}$，若方程 $f(x)=\frac{9}{4}$恰好有 3 个不同解 x_1，x_2，x_3（$x_1<x_2<x_3$），则 x_1+x_2 与 x_3 的大小关系为（　　）

A．$x_1+x_2>x_3$　B．$x_1+x_2=x_3$　C．$x_1+x_2<x_3$　D．不能确定

16．关于 x 的方程 $\left|\frac{t}{x+\frac{1}{x}-4}\right|-\left|\frac{x}{t+\frac{1}{t}}\right|=0$有四个不同的实数根，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $(x_4-x_1)+(x_3-x_2)$ 的取值范围（　　）

A. $(2\sqrt{6},\ 4\sqrt{3})$　B. $(2\sqrt{6},\ 4+2\sqrt{2})$　C. $(4+2\sqrt{2},\ 4\sqrt{3})$　D. $[2\sqrt{6},\ 4\sqrt{3}]$

17．已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ f(x-1), & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=ax^3-f(x)$．若函数$g(x)$恰有两个非负零点，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\{\frac{4}{27}\}\cup(1,+\infty)$　B．$[\frac{1}{27},\frac{1}{8}]\cup\{\frac{4}{27}\}$

C．$[\frac{1}{27},\frac{1}{8}]\cup\{\frac{4}{27}\}\cup(1,+\infty)$　D．$[\frac{1}{27},\frac{1}{8}]\cup(1,+\infty)$

18．已知函数$f(x)=9(\ln x)^2+(a-3)\cdot x\ln x+3(3-a)x^2$有三个不同的零点$x_1$，$x_2$，$x_3$，且$x_1<1<x_2<x_3$，则$(3-\frac{\ln x_1}{x_1})^2(3-\frac{\ln x_2}{x_2})(3-\frac{\ln x_3}{x_3})$的值为（　　）

A．81　B．－81　C．－9　D．9

19．已知函数$f(x)=x^2+ax+b$（a，$b\in\mathbf{R}$）在区间[2，3]上有零点，则a^2+ab的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,4]$　B．$(-\infty,\frac{81}{8}]$　C．$[4,\frac{81}{8}]$　D．$[\frac{81}{8},+\infty)$

20．已知三次函数$f(x)=\frac{x^3}{3}+ax^2-3a^2x+b$（$a>0$）有两个零点，若方程$f'[f(x)]=0$有四个实数根，则实数$a$的范围为（　　）

A．$(0,\frac{\sqrt{6}}{8})$　B．$(0,\frac{3\sqrt{2}}{8})$　C．$(\frac{\sqrt{6}}{8},+\infty)$　D．$(\frac{\sqrt{6}}{8},\frac{3\sqrt{2}}{8})$

21．已知函数$f(x)=x^2-2x-1$，若函数$g(x)=f(|a^x-1|)+k|a^x-1|+4k$（其中$a>1$）有三个不同的零点，则实数$k$的取值范围为（　　）

A．$(\frac{1}{5},\frac{2}{5}]$　B．$(\frac{1}{5},\frac{2}{5})$　C．$(\frac{1}{4},\frac{2}{5}]$　D．$(\frac{1}{4},\frac{2}{5})$

22．已知方程$xe^x-a(e^{2x}-1)=0$只有一个实数根，则a的取值范围是（　　）

A．$a\leqslant 0$或$a\geqslant\frac{1}{2}$　B．$a\leqslant 0$或$a\geqslant\frac{1}{3}$　C．$a\leqslant 0$　D．$a\geqslant 0$或$a\leqslant -\frac{1}{3}$

23．已知函数$y=f(x)$（$x\in\mathbf{R}$）满足$f(x+2)=f(x)$，且$x\in[-1,1]$时，$f(x)=1-|x|$，又$g(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-\frac{1}{x+1}, & x\leqslant 1\\ \frac{e\ln x}{x}, & x>1\end{cases}$，则函数$F(x)=g(x)-f(x)$在区间$[-2017,2017]$上零点的个数为（　　）

A．2015　B．2016　C．2017　D．2018

24．已知函数$f(x)=\begin{cases}|\log_2x|, & x>0\\ x^2+4x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$，若函数$F(x)=f(x)-b$有四个不同的零点$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$（$x_1<x_2<x_3<x_4$），则$\frac{x_4}{x_3}-\frac{x_1x_3^2+x_2x_3^2}{4}$的取值范围是（　　）

A．$(2,+\infty)$　B．$[2,\frac{17}{4})$　C．$(2,\frac{17}{4}]$　D．$[2,+\infty)$

25．已知函数$f(x)=\ln x+(1-a)x+a$（$a>0$），若有且只有两个整数x_1，x_2使得$f(x_1)>0$，且$f(x_2)>0$，则a的取值范围是（　　）

A．$(0,\frac{3+\ln 3}{2})$　B．$(0,2+\ln 2)$　C．$[\frac{3+\ln 3}{2},2+\ln 2)$　D．$[\frac{2\ln 2+4}{3},\frac{3+\ln 3}{2})$

26．已知函数$f(x)=|x^2-4x|$，$x\in\mathbf{R}$，若关于x的方程$f(x)=m|x+1|-2$恰有4个互异的实数根，则实数m的取值范围为（　　）

A．$(0,\ 6-2\sqrt{3})$　　B．$(0,\ 6+2\sqrt{3})$　　C．$(2,\ 6-2\sqrt{3})$　　D．$(2,\ 6+2\sqrt{3})$

27．已知函数$f(x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ xe^{x}-x-1-\ln x, & x>0\end{cases}$，则函数$F(x)=f(f(x))-ef(x)$的零点个数为（　　）（$e$是自然对数的底数）．

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

28．已知关于x的方程为$\dfrac{(x^2-3)^2}{e^x}=3e^{x-2}+\dfrac{2}{e}(x^2-3)$，则其实根的个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

29．定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$满足$f(x-2)=f(x)$，且当$x\in[1,2]$时，$f(x)=-4x^2+18x-14$，若函数$g(x)=f(x)-mx$有三个零点，则正实数m的取值范围为（　　）

A．$(\dfrac{3}{2},\ 18-4\sqrt{14})$　　B．$(2,\ 18-4\sqrt{14})$　　C．$(2,\ 3)$　　D．$(\dfrac{3}{2},\ 3)$

30．已知函数$f(x)=|\log_2 x|$，$g(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1\\ |x-2|-\dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，则方程$|f(x)-g(x)|=1$的实根个数为（　　）

A．2个　　B．3个　　C．4个　　D．5个

二．填空题（共**5**小题）

31．已知关于x的方程$x\ln x-a(x^2-1)=0$在$(0,+\infty)$上有且只有一个实数根，则a的取值范围是_______．

32．已知函数$f(x)=a+3+\dfrac{4}{x}-|x+a|$有且仅有三个零点，并且这三个零点构成等差数列，则实数a的值为_______．

33．若函数$f(x)=\sqrt{9x^2+3x+1}-\sqrt{9x^2-3x+1}-a$存在零点，则实数$a$的取值范围是_______．

34．已知函数$f(x)=1+x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+\dfrac{x^{2013}}{2013}$，$g(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\cdots-\dfrac{x^{2013}}{2013}$，设$F(x)=f(x+3)g(x-4)$且$F(x)$的零点均在区间$[a,b]$（$a<b$，$a$，$b\in\mathbf{Z}$）内，则$b-a$的最小值是_______．

35．已知函数$f(x)=(\dfrac{1}{3})^x-\log_2 x$，正实数$a$、$b$、$c$成公差为正数的等差数列，且满足$f(a)f(b)f(c)<0$，若实数$d$是方程$f(x)=0$的一个解，那么下列四个判断：①$d<a$；②$d>b$；③$d<c$；④$d>c$中，有可能成立的个数为_______．

三．解答题（共**5**小题）

36．已知函数$f(x)=\ln x-ax$（$a>0$），设$g(x)=f(\dfrac{2}{a}-x)$．

（1）判断函数$h(x)=f(x)-g(x)$零点的个数，并给出证明；

（2）首项为m的数列$\{a_n\}$满足：①$a_{n+1}+a_n\neq\dfrac{2}{a}$；②$f(a_{n+1})=g(a_n)$．其中$0<m<\dfrac{1}{a}$，$n\in\mathbf{N}^*$．求证：对于任意的$i$，$j\in\mathbf{N}^*$，均有$a_i-a_j<\dfrac{1}{a}-m$．

37．已知$m>0$，函数$f(x)=e^x-mx$，直线l：$y=-m$．

（1）讨论$f(x)$的图象与直线l的交点个数；

（2）若函数$f(x)$的图象与直线l：$y=-m$相交于$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$两点（$x_1<x_2$），证明：$e^{x_1+x_2}<m^2$．

38．已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x-ae^{x}+1$ 有两个零点 x_1，x_2（$x_1<x_2$）．

（Ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）证明：$e^{x_1}+e^{x_2}>2$．

39．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<0\\ \dfrac{x}{e^x}+ax^2-2ax, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在（﹣∞，+∞）上是增函数．

（1）求实数 a 的值；

（2）若函数 $g(x)=f(x)-kx$ 有三个零点，求实数 k 的取值范围．

40．今年入秋以来，某市多有雾霾天气，空气污染较为严重．市环保研究所对近期每天的空气污染情况进行调查研究后发现，每一天中空气污染指数与 $f(x)$ 时刻 x（时）的函数关系为 $f(x)=|\log_{25}(x+1)-a|+2a+1$，$x\in[0,24]$，其中 a 为空气治理调节参数，且 $a\in(0,1)$．

（1）若 $a=\dfrac{1}{2}$，求一天中哪个时刻该市的空气污染指数最低；

（2）规定每天中 $f(x)$ 的最大值作为当天的空气污染指数，要使该市每天的空气污染指数不超过 3，则调节参数 a 应控制在什么范围内？

参考答案与试题解析

一．选择题（共 **30** 小题）

1．【解答】解：由题意，$a>0$，令 $t=\dfrac{x}{\sqrt{a}}$，则 $f(x)=a\Leftrightarrow x(x-\ln\dfrac{x^2}{a})=a\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{a}}\ln\dfrac{x^2}{a}=1\Leftrightarrow t^2-\dfrac{1}{\sqrt{a}}t\ln t^2=1\Leftrightarrow\ln t^2-\sqrt{a}(t-\dfrac{1}{t})=0$．记 $g(t)=\ln t^2-\sqrt{a}(t-\dfrac{1}{t})$．当 $t<0$ 时，$g(t)=2\ln(-t)-\sqrt{a}(t-\dfrac{1}{t})$ 单调递减，且 $g(-1)=0$，

又 $g(1)=0$，∴只需 $g(t)=0$ 在（0，+∞）上有两个不等于 1 的不等根．则 $\ln t^2-\sqrt{a}(t-\dfrac{1}{t})=0\Leftrightarrow\sqrt{a}=\dfrac{2t\ln t}{t^2-1}$，

记 $h(t)=\dfrac{2t\ln t}{t^2-1}$（$t>0$ 且 $t\neq1$），则 $h'(t)=\dfrac{(2\ln t+2)(t^2-1)-4t^2\ln t}{(t^2-1)^2}=\dfrac{2(t^2+1)(\frac{t^2-1}{t^2+1}-\ln t)}{(t^2-1)^2}$．

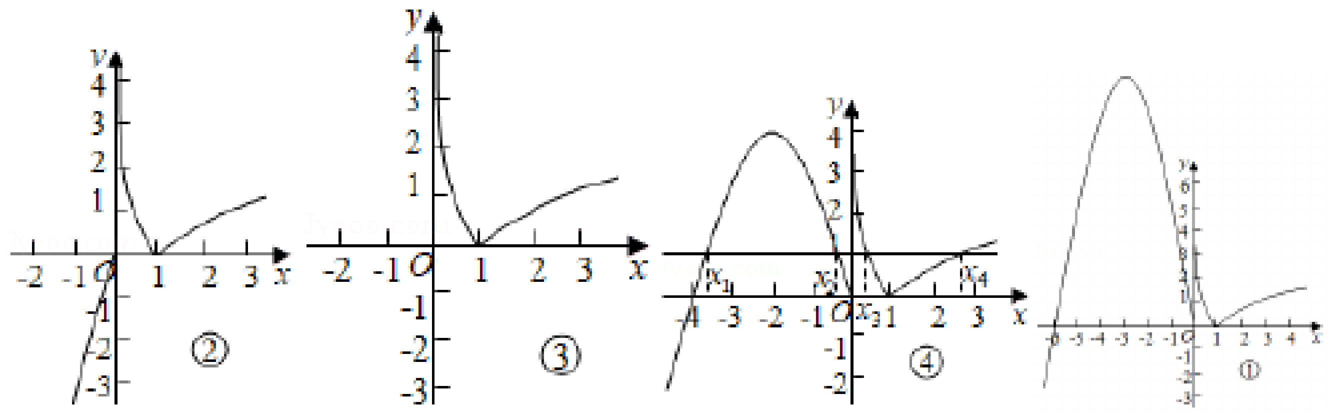
令 $\varphi(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}-\ln t$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{(t^2-1)^2}{t(t^2+1)^2}<0$．∵$\varphi(1)=0$，∴$\varphi(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}-\ln t$ 在（0，1）大于 0，在（1，+∞）上小于 0．∴$h'(t)$ 在（0，1）上大于 0，在（1，+∞）上小于 0，

则 $h(t)$ 在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减．由 $\lim\limits_{t\to1}\dfrac{2t\ln t}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{2\ln t+2}{2}=1$，可得 $\sqrt{a}<1$，即 $a<1$．∴实数 a 的取值范围是（0，1）．故选：D．

2．【解答】解：【解法 1】从第 1 辆卡车开始依次装上货物，每车一直装到再装一箱就超过 1.5 吨为止，把多出的这一箱先单独留出来不往后面装，因为 13.5÷（1.5+0.35）≈7.3，所以这样至少能装到第 7 辆卡车（包括单独留出）之后还有剩余；①如果装到第 7 辆卡车剩余的已经不足 1.5 吨，那么第 8 辆卡车可以把剩余的装走，此时前 7 辆卡车单独留出的 7 个货箱可以分成两组，一组 3 个，一组 4 个，每组不超过 0.35×4＝1.4 吨，这样再找 2 辆卡车就可以

拉完，一共最多需要 10 辆卡车；
②如果装到第 7 辆车剩余的货箱超过 1.5 吨，可以继续装第 8 辆卡车，此时 8 辆卡车上单独留出 8 个货箱可以分成两组，每组 4 个，每组都不超过 0.35×4＝1.4 吨，再找 2 辆卡车就可以拉走；上面 10 辆卡车一共装了超过 1.5×8＝12 吨货箱，所剩货箱不超过 13.5﹣12＝1.5 吨，最多还需要 1 辆卡车就可以拉走，所以一共最多需要 11 辆卡车；综上，要保证任何情况都能一次性拉走，则至少需要 11 辆卡车．
【解法二】由题意，将所有货箱任意排定顺序；首先将货箱依次装上第 1 辆卡车，并直到再装 1 个就超过载重量为止，并将这最后不能装上的货箱放在第 1 辆卡车之旁；然后按同样办法装第 2 辆、第 3 辆、…，直到第 8 辆车装完并在车旁放了 1 个货箱为止；显然前 8 辆车中每辆所装货箱及车旁所放 1 箱的重量和超过 1.5 吨；所以所余货箱的重量和不足 1.5 吨，可以全部装入第 9 辆卡车；然后把前 8 辆卡车旁所放的各 1 货箱分别装入后 2 辆卡车，每车 4 个货箱，显然不超载；这样装车就可用 8+1+2＝11 辆卡车 1 次把这批货箱运走．故选：B．

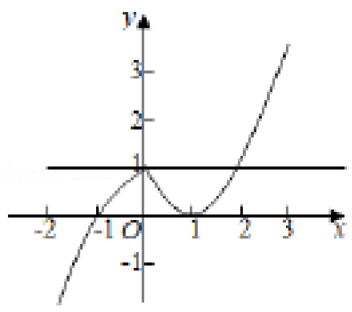
3．【解答】解：①当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2+mx=-(x^2-mx)=-(x-\frac{m}{2})^2+\frac{m^2}{4}$，当对称轴 $\frac{m}{2}<0$ 且 $\frac{m^2}{4}>4$，即 $m<0$ 且 $m^2>16$，即 $m<-4$ 时，$f(x)=g(x)=4$ 有四个不同的实数根，故①正确，②若 $m>0$，则函数的对称轴 $\frac{m}{2}>0$，此时当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 为增函数，且 $f(x)\leqslant 0$，此时当 $m\in[3,4]$，使得关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 不可能有三个不同的实数根，故②错误



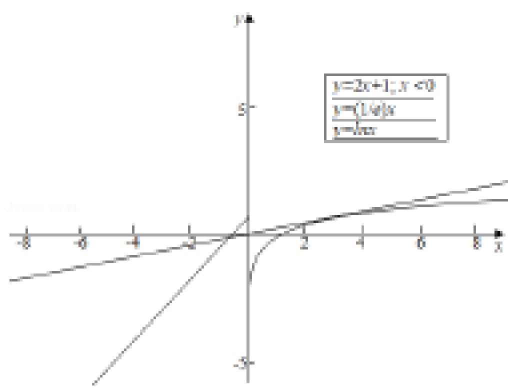
③当 $x>0$ 时，设 $t=f(x)=|\ln x|$，若 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有三个不同的根，则 $t^2+bt+c=0$ 有两个不同的实根，其中 $t_1=0$，$t_2>0$，当 $t_1=0$ 时，对应一个根 $x_1=1$，当 $t_2>0$ 时，对应两个根 x_2，x_3，且 $0<x_2<1<x_3$，则 $|\ln x_2|=|\ln x_3|$，即 $-\ln x_2=\ln x_3$，则 $\ln x_2+\ln x_3=0$，即 $\ln(x_2x_3)=0$，则 $x_2x_3=1$，即 $x_1x_2x_3=1$，故③正确，

④当 $m=-4$ 时，作出 $f(x)$ 的图象如图，由对数的性质知 $x_3x_4=1$，$x_3^2<\frac{1}{x_4^2}<x_3$，即 $f(x)$ 在 $[x_3^2, x_4]$ 上的最大值为 $f(x_3^2)=|\ln x_3^2|=2|\ln x_3|=-2\ln x_3=\ln 4=2\ln 2$，得 $\ln x_3=-\ln 2$，得 $x_3=\frac{1}{2}$，则 $x_4=2$，由对称性知 $\frac{x_1+x_2}{2}=-2$，即 $x_1+x_2=-4$，则 $\sin(3x_1+3x_2+5x_3+4x_4)\pi=\sin(-12+\frac{5}{2}+8)\pi=\sin(-4\pi+\frac{5}{2}\pi)=\sin\frac{5}{2}\pi=\sin\frac{\pi}{2}=1$，故④正确，故正确的是①③④，共 3 个，故选：$C$．

4．【解答】解：由 $g(x)=[f(f(x))]^2-(a+1)\cdot f(f(x))+a=0$ 得 $[f(f(x))-1][f(f(x))-a]=0$，则 $f(f(x))=1$ 或 $f(f(x))=a$，作出 $f(x)$ 的图象如图，则若 $f(x)=1$，则 $x=0$ 或 $x=2$，设 $t=f(x)$，由 $f(f(x))=1$ 得 $f(t)=1$，此时 $t=0$ 或 $t=2$，当 $t=0$ 时，$f(x)=t=0$，有两个根，当 $t=2$ 时，$f(x)=t=2$，有 1 个根，则必须有 $f(f(x))=a$，$(a\neq 1)$ 有 5 个根，设 $t=f(x)$，由 $f(f(x))=a$ 得 $f(t)=a$，若 $a=0$，由 $f(t)=a=0$ 得 $t=-1$，或 $t=1$，$f(x)=-1$ 有一个根，$f(-x)=1$ 有两个根，此时有 3 个根，不满足条件．若 $a>1$，由 $f(t)=a$ 得 $t>2$，$f(x)=t$ 有一个根，不满足条件．若 $a<0$，由 $f(t)=a$ 得 $-2<t<-1$，$f(x)=t$ 有一个根，不满足条件．若 $0<a<1$，由 $f(t)=a$ 得 $-1<t_1<0$，或 $0<t_2<1$ 或 $1<t_3<2$，当 $-1<t_1<0$ 时，$f(x)=t_1$，有一个根，当 $0<t_2<1$ 时，$f(x)=t_2$，有 3 个根，当 $1<t_3<2$ 时，$f(x)=t_3$，有一个根，此时有 1+3+1＝5 个根，满足条件．故 $0<a<1$，即实数 a 的取值范围是 $(0,1)$，故选：A．



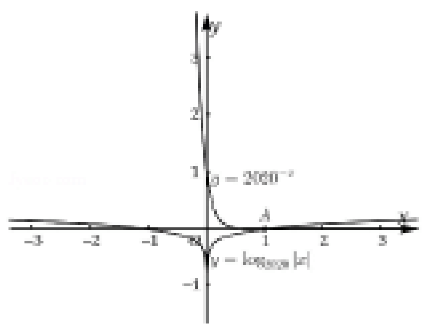
5.【解答】解：由 $1-x^2\geqslant0$ 得 $x^2\leqslant1$，则 $-1\leqslant x\leqslant1$， 当 $x<0$ 时，由 $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$，即 $-2x=2\sqrt{1-x^2}$．得 $1-x^2=x^2$，即 $2x^2=1$，$x^2=\frac{1}{2}$，则 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，①当 $-1\leqslant x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，有 $f(x)\geqslant2\sqrt{1-x^2}$，原方程可化为 $f(x)+2\sqrt{1-x^2}+f(x)-2\sqrt{1-x^2}-2ax-4=0$，即 $-4x-2ax-4=0$，得 $x=-\frac{2}{a+2}$，由 $-1\leqslant-\frac{2}{a+2}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$解得：$0\leqslant a\leqslant2\sqrt{2}-2$．②当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant1$ 时，$f(x)<2\sqrt{1-x^2}$，原方程可化为 $4\sqrt{1-x^2}-2ax-4=0$，化简得 $(a^2+4)x^2+4ax=0$，解得 $x=0$，或 $x=-\frac{4a}{a^2+4}$，又 $0\leqslant a\leqslant2\sqrt{2}-2$，∴ $-\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{4a}{a^2+4}<0$．∴$x_1=-\frac{2}{a+2}$，$x_2=-\frac{4a}{a^2+4}$，$x_3=0$．由 $x_3-x_2=2(x_2-x_1)$，得 $\frac{4a}{a^2+4}=2(\frac{4a}{a^2+4}+\frac{2}{a+2})$，解得 $a=-\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$（舍）或 $a=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$．因此，所求实数 $a=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$．故选：B．



6.【解答】解：当 $y=ax$ 与 $y=lnx$ 相切时，设切点为（x_0，lnx_0 ），$a=\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}$，

$\therefore x_0=e$，，$a=\frac{1}{e}$，由 $\frac{1}{e}x=2x+1$ 得再由图知方程 $f(x)=ax$ 的三个不同的实数根 x_1,x_2,x_3 满足$\frac{e}{1-2e}<x_1<-\frac{1}{2}$，$1<x_2<e<x_3$ 因此$\frac{e}{1-2e}-e<x_1-x_2<-\frac{1}{2}-1$，即 x_1-x_2 的取值范围是（$\frac{2e^2}{1-2e}$，$-\frac{3}{2}$）故选：B．

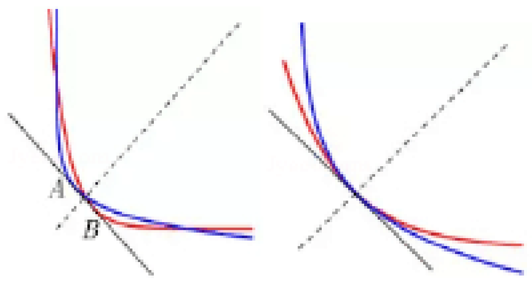
7.【解答】解：∵$f(x-1)$是 $f(x)$ 向右平移一个单位的图象，且函数 $y=f(x-1)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $f(x)$关于直线 $x=0$ 对称，即 $f(x)$为偶函数，因此当“$f(2020^{-x})=f(\log_{2020}|x|)$”是“$|2020^{-x}|=|f(\log_{2020}|x|)|$”充要条件时，此时方程 $f(2020^{-x})=f(\log_{2020}|x|)$的解的个数最少，接下来讨论方程$|2020^{-x}|=|\log_{2020}|x||$的解的个数，因为 $|2020^{-x}|=|\log_{2020}|x||$ 等价于 $\log_{2020}|x|=2020^{-x}$ 或 $\log_{2020}|x|+2020^{-x}=0$，①当 $\log_{2020}|x|=2020^{-x}$时，方程$\log_{2020}|x|=2020^{-x}$的解的个数即函数 $y=2020^{-x}$ 的图象和函数 $y=\log_{2020}|x|$的图象的交点个数，画出两函数图象如下图所示：



易知两函数在 $x\in(0,+\infty)$上存在一个交点，

故方程$\log_{2020}|x|=2020^{-x}$有 1 解；②当$\log_{2020}|x|+2020^{-x}=0$时，下面分两种情况进行讨论，若 $x<0$，$\log_{2020}|x|+2020^{-x}=0$等价于$\log_{2020}(-x)+2020^{-x}=0$，令 $g(x)=\log_{2020}(-x)+2020^{-x}(x<0)$，易得函数 $g(x)$ 在（﹣∞，0）上单调递减，又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-\infty$，由零点存在定理可得函数 $g(x)$ 在（﹣∞，0）上存在唯一零点，即方程$\log_{2020}|x|+2020^{-x}=0$在（﹣∞，0）上有且只有一个解；

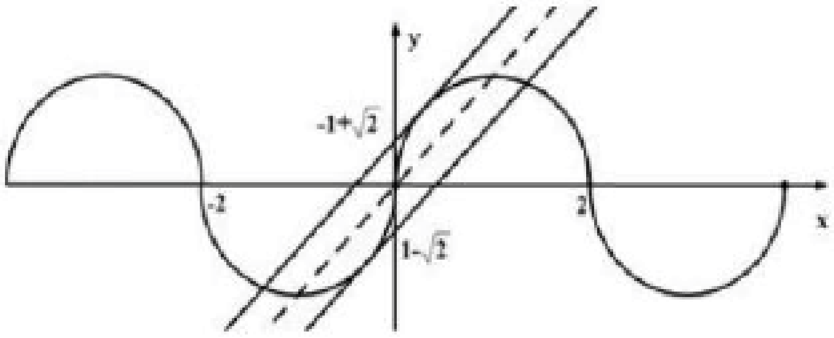
若 $x>0$ 时，$\log_{2020}|x|+2020^{-x}=0$等价于$\log_{\frac{1}{2020}}x=(\frac{1}{2020})^x$，下面我们证明当 $a\in(0,\frac{1}{e^e})$ 时，函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\log_a x$ 图象有三个交点，假设 A 点在指数函数 $y=a^x$ 上，且指数函数过该点的切线斜率为﹣1，B 点在对数函数 $y=\log_a x$ 上，且对数函数过该点的切线斜率也为﹣1，当 A、B 重合时，它们会有一个交点，此时就是一个界点．图象如下图所示，



指数函数为 $y=a^x$，求导 $y'=a^x\ln a$，即指数函数切线的斜率，$y_A'=a^x\ln a=-1$，$\therefore a^x=\frac{-1}{\ln a}=-\log_a e$，即$x_A=\log_a(-\log_a e)$，与指数函数 $y=a^x$ 对应的反函数，对数函数为 $y=\log_a x$，求导 $y'=\frac{1}{x}\log_a e$，即对数函数斜率，$y_B'=\frac{1}{x}\log_a e=-1$，$\therefore x_B=-\log_a e$，$A$，$B$ 重合，即 $x_A=x_B$，$\therefore \log_a(-\log_a e)=-\log_a e$，$\therefore -\log_a e=\frac{1}{e}$，即 $a^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}$，$\therefore a=\frac{1}{e^e}$，即 $\frac{1}{e^e}$ 是一个分界点，结合指数函数及对数函数的变化趋势可知，当$a\in(0,\frac{1}{e^e})$时，函数$y=a^x$与函数$y=\log_a x$图象有三个交点，又因为$2020>e>e^{\frac{1}{e}}$，所以$0<\frac{1}{2020}<e^{\frac{1}{e}}$，于是方程$\log_{\frac{1}{2020}}x=(\frac{1}{2020})^x$在（0，+∞）上有三个解，即方程$\log_{2020}|x|+2020^{-x}=0$在（0，+∞）上有三个解，综上所述方程$|2020^{-x}|=|\log_{2020}|x||$一共有 5 个解，于是方程 $f(2020^{-x})=f(\log_{2020}|x|)$的解至少 5 个，故选：$D$．

8.【解答】解：由已知得，$f(-x)=-f(x)$，$f(x-1)=f(-x-1)$，则$f(x+1)=-f(-x-1)=-f(x-1)=f(1-x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，关于原点对称，又 $f(x+2)=f((x+1)+1)=-f((x+1)-1)=-f(x)$，进而有 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以得函数 $f(x)$ 是以 4 为周期得周期函数，由 $g(x)=f(x)-x-b$ 有三个零点可知，函数 $f(x)$ 与函数 $y=x+b$ 得图象有三个交点，当直线 $y=x+b$ 与函数 $f(x)$ 图象在[0，1]上相切时，由$x+b=\sqrt{-x^2+2x}$，即 $2x^2+(2b-2)x+b^2=0$，故方程 $2x^2+(2b-2)x+b^2=0$ 有两个相等得实根，由△＝0⇒$(2b-2)^2-4\cdot2\cdot b^2=0$，解得 $b=-1\pm\sqrt{2}$，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$，作出函数 $f(x)$ 与函

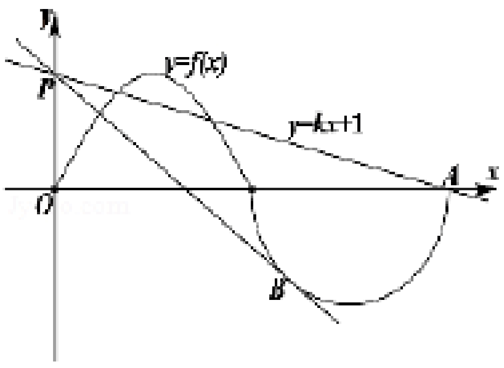
数 $y=x+b$ 的图象如图：



由图知当直线 $y=x+b$ 与函数 $f(x)$ 图象在[0，1]上相切时，$b=-1+\sqrt{2}$，数形结合可得 $g(x)$ 在[－2，2]上有三个零点时，实数 b 满足 $1-\sqrt{2}<b<-1+\sqrt{2}$，

再根据函数 $f(x)$ 的周期为 4，可得所求的实数 b 的范围为 $(4k-\sqrt{2}+1,\ 4k+\sqrt{2}-1)$，$k\in\mathbf{Z}$．故选：$C$．

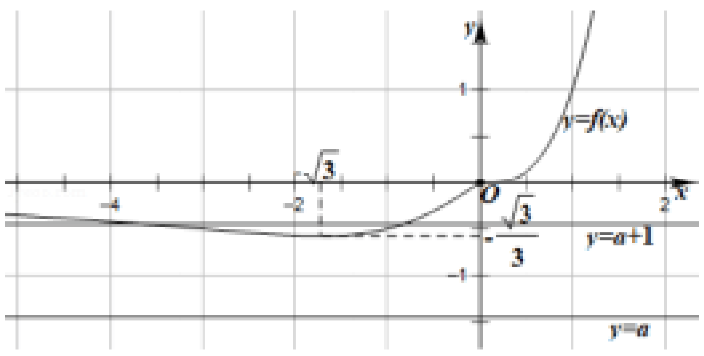
9．【解答】解：当 $2<x<4$ 时，$y=-\sqrt{-x^2+6x-8}$，则 $y\leqslant 0$，等式两边平方得 $y^2=-x^2+6x-8$，整理得 $(x-3)^2+y^2=1$，所以曲线 $y=-\sqrt{-x^2+6x-8}(2<x\leqslant 4)$ 表示圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 的下半圆，如下图所示，



由题意可知，函数 $y=g(x)$ 有三个不同的零点，等价于直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 的图象有三个不同交点，直线 $y=kx+1$ 过定点 $P(0,1)$，当直线 $y=kx+1$ 过点 $A(4,0)$ 时，则 $4k+1=0$，可得 $k=-\frac{1}{4}$；当直线 $y=kx+1$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 相切，且切点位于第三象限时，$k<0$，此时 $\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=-\frac{3}{4}$．

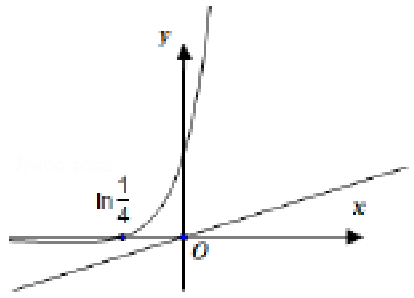
由图象可知，当 $-\frac{3}{4}<k\leqslant-\frac{1}{4}$ 时，直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 的图象有三个不同交点．因此，实数 k 取值范围是 $(-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4}]$．故选：$B$．

10．【解答】解：$\because |f(x)-a|+|f(x)-a-1|=\begin{cases}2a+1-2f(x), & f(x)<a\\ 1, & a\leqslant f(x)\leqslant a+1\\ 2f(x)-2a+1, & f(x)>a+1\end{cases}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 位于直线 $y=a$ 和 $y=a+1$ 的图象上有三个横坐标为整数的点，当 $x<0$ 时，$f(x)=\frac{2x}{x^2+3}=\frac{2}{x+\frac{3}{x}}$ 且 $f(x)<0$，由双勾函数的单调性可知，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ -\sqrt{3})$ 上单调递减，在区间 $(-\sqrt{3},\ 0)$ 上单调递增，于是当 $x<0$ 时，$f(x)_{min}=f(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\because f(-1)=-\frac{1}{2}$，$f(-2)=-\frac{4}{7}$，$f(-3)=-\frac{1}{2}$，$f(-4)=-\frac{8}{19}$，且 $f(-4)>f(-3)>f(-2)$，如下图所示，



要使得函数 $f(x)$ 位于直线 $y=a$ 和 $y=a+1$ 的图象上有三个横坐标为整数的点，则 $f(-3)\leqslant a+1<f(-4)$，即 $-\frac{1}{2}\leqslant a+1<-\frac{8}{19}$，解得 $-\frac{3}{2}\leqslant a<-\frac{27}{19}$．因此，实数 a 的取值范围是 $[-\frac{3}{2},-\frac{27}{19})$．故选：$A$．

11．【解答】解：若 $f(x)=2e^{2x}-e^{x}$ 时，令 $f'(x)=4e^{2x}-e^{x}=0$，解得 $x=ln\frac{1}{4}$，易知此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,ln\frac{1}{4})$ 上单调递减，在 $(ln\frac{1}{4},+\infty)$ 上单调递增；作出函数 $y=2e^{2x}-e^{x}$ 及函数 $y=x$ 的图象如下图所示，



由图象可知，函数 $f(x)$ 最多有两个零点 $x=0$ 或 $x=ln\frac{1}{4}$，不妨令 $b=0$，则①当 $a\leqslant ln\frac{1}{4}$ 时，此时函数 $g(x)$ 的零点为 $x=0$，则 $M=1$，此时函数 $h(x)$ 的零点满足 $f(x)=0$，或 $f(x)=ln\frac{1}{4}$，显然 $f(x)=0$ 有 1 个解，$f(x)=ln\frac{1}{4}$ 有 1 个解，则 $N=2$；②当 $ln\frac{1}{4}<a\leqslant 0$ 时，此时函数 $g(x)$ 的零点为 0，$ln\frac{1}{4}$，则 $M=2$，此时函数 $h(x)$ 的零点满足 $f(x)=0$，或 $f(x)=ln\frac{1}{4}$，显然 $f(x)=0$ 有两个解，$f(x)=ln\frac{1}{4}$ 无解，则 $N=2$；③当 $a>0$ 时，此时函数 $g(x)$ 的零点为 $ln\frac{1}{4}$，则 $M=1$，此时函数 $h(x)$ 的零点满足 $f(x)=0$，或 $f(x)=ln\frac{1}{4}$，显然 $f(x)=0$ 有 1 个解，$f(x)=ln\frac{1}{4}$ 无解，则 $N=1$；由以上分析可知，故选：A．

12．【解答】解：由题意知 $f(0)=0$，∵$f(x)=a(e^{x}-e^{-x})-\sin\pi x\ (a>0)$ 存在唯一零点，∴$f(x)$ 只有一个零点 0．∵$f(-x)=\sin\pi x+a(e^{-x}-e^{x})=-f(x)$，∴$f(x)$ 是奇函数，故只考虑当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 无零点即可．当 $x>0$ 时，有 $\pi x>\sin\pi x$，∴$f(x)=a(e^{x}-e^{-x}-\frac{1}{a}\sin\pi x)>a(e^{x}-e^{-x}-\frac{\pi x}{a})$．令 $g(x)=e^{x}-e^{-x}-\frac{\pi x}{a}$，$x>0$，则 $g(0)=0$，∵$g'(x)=e^{x}+e^{-x}-\frac{\pi}{a}$，$x>0$，$g''(x)=e^{x}-e^{-x}>0$，∴$g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∵$g(0)=0$，∴$g'(x)>g'(0)=2-\frac{\pi}{a}\geqslant 0$，解得 $a\geqslant\frac{\pi}{2}$．故选：B．

13．【解答】解：$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1=(2e^{x}+1)(ae^{x}-1)$．$a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 最多有一个零点，不满足题意，舍去．$a>0$ 时，$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1=(2e^{x}+1)(ae^{x}-1)$．令 $f'(x)=0$，∴$e^{x}=\frac{1}{a}$，解得 $x=-lna$．∴$x\in(-\infty,-lna)$ 时，$f'(x)<0$，∴函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-lna)$ 上单调递减；$x\in(-lna,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，∴函数 $f(x)$ 在 $(-lna,+\infty)$ 上单调递增．∴$x=-lna$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，∵$f(x)$ 有两个零点，∴$f(-lna)=a\times\frac{1}{a^{2}}+(a-2)\times\frac{1}{a}+lna=1-\frac{1}{a}+lna<0$，令 $u(a)=1-\frac{1}{a}+lna$，$u(1)=0$．$u'(a)=\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{a}>0$，∴函数 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，∴$0<a<1$．又 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$．∴满足函数 $f(x)$ 有两个零点．∴a 的取值范围为 $(0,1)$，故选：A．