专题45 随机事件、频率与概率

【考点预测】

知识点1、随机试验

我们把对随机现象的实现和对它的观察称为随机试验，简称试验，常用字母E表示.

我们感兴趣的是具有以下特点的随机试验：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但事先不能确定出现哪一个结果.

知识点2、样本空间

我们把随机试验E的每个可能的基本结果称为样本点，全体样本点的集合称为试验E的样本空间，一般地，用．Ω．表示样本空间，用ω表示样本点，如果一个随机试验有n个可能结果ω_1，ω_2，…，ω_n，则称样本空间$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$为有限样本空间.

知识点3、随机事件、确定事件

（1）一般地，随机试验中的每个随机事件都可以用这个试验的样本空间的子集来表示，为了叙述方便，我们将样本空间Ω的子集称为随机事件，简称事件，并把只包含一个样本点的事件称为基本事件．当且仅当A中某个样本点出现时，称为事件A发生.

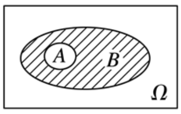
（2）Ω作为自身的子集，包含了所有的样本点，在每次试验中总有一个样本点发生，所以Ω总会发生，我们称Ω为必然事件.

（3）空集$\varnothing$不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，我们称为$\varnothing$为不可能事件.

（4）确定事件：必然事件和不可能事件统称为相对随机事件的确定事件.

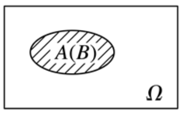
知识点4、事件的关系与运算

①包含关系：一般地，对于事件A和事件B，如果事件A发生，则事件B一定发生，这时称事件B包含事件A（或者称事件A包含于事件B），记作$B\supseteq A$或者$A\subseteq B$．与两个集合的包含关系类比，可用下图表示：



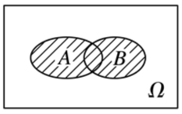
不可能事件记作$\varnothing$，任何事件都包含不可能事件.

②相等关系：一般地，若$B\supseteq A$且$A\supseteq B$，称事件A与事件B相等．与两个集合的并集类比，可用下图表示：

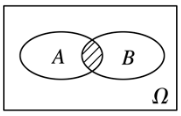


③并事件（和事件）：若某事件发生当且仅当事件A发生或事件B发生，则称此事件为事件A与事件B

的并事件（或和事件），记作 $A\cup B$（或 $A+B$）．与两个集合的并集类比，可用下图表示：

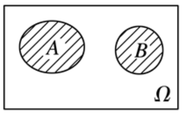


④交事件（积事件）：若某事件发生当且仅当事件 A 发生且事件 B 发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的交事件（或积事件），记作 $A\cap B$（或 AB）．与两个集合的交集类比，可用下图表示：



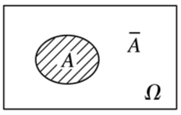
知识点 5、互斥事件与对立事件

（1）互斥事件：在一次试验中，事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互斥，可用下图表示：



如果 A_1，A_2，…，A_n 中任何两个都不可能同时发生，那么就说事件 A_1，．A_2．，…，A_n 彼此互斥．

（2）对立事件：若事件 A 和事件 B 在任何一次实验中有且只有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$ 不发生，$A\cap B=\varnothing$ 则称事件 A 和事件 B 互为对立事件，事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$．



（3）互斥事件与对立事件的关系

①互斥事件是不可能同时发生的两个事件，而对立事件除要求这两个事件不同时发生外，还要求二者之一必须有一个发生．

②对立事件是互斥事件的特殊情况，而互斥事件未必是对立事件，即“互斥”是“对立”的必要不充分条件，而“对立”则是“互斥”的充分不必要条件．

知识点 6、概率与频率

（1）频率：在 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数 k 称为事件 A 发生的频数，频数 k 与总次数 n 的比值 $\dfrac{k}{n}$，叫做事件 A 发生的频率．

（2）概率：在大量重复尽心同一试验时，事件 A 发生的频率 $\dfrac{k}{n}$ 总是接近于某个常数，并且在它附近摆动，这时，就把这个常数叫做事件 A 的概率，记作 $P(A)$．

（3）概率与频率的关系：对于给定的随机事件 A，由于事件 A 发生的频率 $\dfrac{k}{n}$ 随着试验次数的增加稳定于概率 $P(A)$，因此可以用频率 $\dfrac{k}{n}$ 来估计概率 $P(A)$．

【题型归纳目录】

题型一：随机事件的关系与运算

题型二：频率与概率

题型三：生活中的概率

题型四：互斥事件与对立事件

题型五：利用互斥事件与对立事件计算概率

【典型例题】

题型一：随机事件的关系与运算

例 1．（2023·浙江省桐庐中学高三阶段练习）抛掷一枚质地均匀的正方体骰子，若事件 $A=$“向上的点数为 3”，$B=$“向上的点数为 6”，$C=$“向上的点数为 3 或 6”，则有（　　）

A．$A\subseteq B$　　　　B．$C\subseteq B$　　　　C．$A\cap B=C$　　　　D．$A\cup B=C$

例 2．（2023·全国·高三专题练习（文））一批产品共有 100 件，其中 5 件是次品，95 件是合格品.从这批产品中任意抽取 5 件，现给出以下四个事件：

事件 A：恰有一件次品；

事件 B：至少有两件次品；

事件 C：至少有一件次品；

事件 D：至多有一件次品.

并给出以下结论：

①$A\cup B=C$；②$B\cup D$ 是必然事件；③$A\cap B=C$；④$A\cap D=C$.

其中正确结论的序号是（　　）

A．①②　　　　B．③④　　　　C．①③　　　　D．②③

例 3．（多选题）（2023·全国·高三专题练习）一批产品共有 100 件，其中 5 件是次品，95 件是合格品．从这批产品中任意抽取 5 件，给出以下四个事件：

事件 A：恰有一件次品；

事件 B：至少有两件次品；

事件 C：至少有一件次品；

事件 D：至多有一件次品．

下列选项正确的是（　　）

A．$A\cup B=C$　　　　B．$B\cup D$ 是必然事件

C．$A\cap B=C$　　　　D．$A\cap D=C$

变式 1．（多选题）（2023·全国·高三专题练习）对空中飞行的飞机连续射击两次，每次发射一枚炮弹，设 A

＝“两次都击中飞机”，B＝“两次都没击中飞机”，C＝“恰有一枚炮弹击中飞机”，D＝“至少有一枚炮弹击中飞机”，下列关系正确的是（　）

A．$A\subseteq D$　　　　B．$B\cap D=\varnothing$

C．$A\cup C=D$　　　　D．$A\cup B=B\cup D$

变式 2．（2023·全国·高三专题练习）利用如图所示的两个转盘玩配色游戏两个转盘各转一次，观察指针所指区域的颜色（不考虑指针落在分界线上的情况）．事件 A 表示“转盘①指针所指区域是黄色”，事件 B 表示“转盘②指针所指区域是绿色”，用样本点表示 $A\cap B$，$A\cup B$．

题型二：频率与概率

例 4．（多选题）（2023·全国·高三专题练习）支气管炎患者会咳嗽失眠，给患者日常生活带来严重的影响.某医院老年患者治愈率为 20%，中年患者治愈率为 30%，青年患者治愈率为 40%.该医院共有 600 名老年患者，500 名中年患者，400 名青年患者，则（　）

A．若从该医院所有患者中抽取容量为 30 的样本，老年患者应抽取 12 人

B．该医院青年患者所占的频率为 $\frac{4}{15}$

C．该医院的平均治愈率为 28.7%

D．该医院的平均治愈率为 31.3%

例 5．（2023·全国·高三专题练习）将容量为 100 的样本数据，由小到大排列，分成 8 个小组，如下表所示：

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
频数	10	13	14	14	15	13	12	9

第 3 组的频率和累积频率分别为（　）

A．0.14，0.37　　B．$\frac{1}{14}$，$\frac{1}{27}$　　C．0.03，0.06　　D．$\frac{3}{14}$，$\frac{6}{37}$

例 6．（2023·全国·高三专题练习）甲、乙两所学校举行了某次联考，甲校成绩的优秀率为 30 %，乙校成绩的优秀率为 35%，现将两所学校的成绩放到一起，已知甲校参加考试的人数占总数的 40%，乙校参加考试的人数占总数的 60%，现从中任取一个学生成绩，则取到优秀成绩的概率为（　）

A．0.165　　B．0.16　　C．0.32　　D．0.33

变式 3．（2023·全国·高三专题练习）甲、乙两人相约在某健身房锻炼身体，他们分别在两个网站查看这家健身房的评价．甲在网站 A 查到共有 840 人参与评价，其中好评率为95%，乙在网站 B 查到共有 1260 人参与评价，其中好评率为85%．综合考虑这两个网站的信息，则这家健身房的总好评率为（　）

A．88%　　B．89%　　C．91%　　D．92%

变式 4．（2023·全国·高三专题练习）我国古代数学名著《九章算术》有"米谷粒分"题: 粮仓开仓收粮，有人送来米 1423 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 268 粒内夹谷 32 粒.则这批米内夹谷约为（　）

A．157 石　　B．164 石　　C．170 石　　D．280 石

变式 5．（2023·全国·高三专题练习）在一个不透明的布袋中，红色、黑色、白色的玻璃球共有 40 个，除颜色外其他完全相同，小明通过多次摸球试验后发现其中摸到红色球、黑色球的频率分别稳定在 15%和 45%，则布袋中白色球的个数可能是（　）个.

A．15　　B．16　　C．17　　D．18

变式 6．（2023·全国·高三专题练习）掷一枚硬币的试验中，下列对"伯努利大数定律"的理解正确的是（　）

A．大量的试验中，出现正面的频率为 0.5

B．不管试验多少次，出现正面的概率始终为 0.5

C．试验次数增大，出现正面的经验概率为 0.5

D．以上说法均不正确

变式 7．（2023·全国·高三专题练习）在一次抛硬币的试验中，某同学用一枚质地均匀的硬币做了 100 次试验，发现正面朝上出现了 48 次，那么出现正面朝上的频率和概率分别为（　）

A．0.48，0.48　　B．0.5，0.5　　C．0.48，0 .5　　D．0.5，0.48

变式 8．（2023·全国·高三课时练习）有以下说法:

①一年按 365 天计算,两名学生的生日相同的概率是$\frac{1}{365}$;②买彩票中奖的概率为 0.001,那么买 1 000 张彩票就一定能中奖;③乒乓球赛前,决定谁先发球,抽签方法是从 1~10 共 10 个数字中各抽取 1 个,再比较大小,这种抽签方法是公平的;④昨天没有下雨,则说明"昨天气象局的天气预报降水概率是 90%"是错误的.

根据我们所学的概率知识,其中说法正确的序号是___.

题型三：生活中的概率

例 7．（多选题）（2023·全国·高三专题练习）已知 n 是一个三位正整数，若 n 的个位数字大于十位数字，十位数字大于百位数字，则称 n 为"三位递增数"（如 135，256，345 等）.现要从甲、乙两名同学中选出

1 人参加某市组织的数学竞赛，选取的规则如下：从由 1，2，3，4，5 组成的所有“三位递增数”中随机抽取 1 个数，若抽取的“三位递增数”是偶数，则甲参加数学竞赛；否则，乙参加数学竞赛.则下列说法正确的是（　）

A．甲参赛的概率大　　　　　　　　　　B．乙参赛的概率大

C．这种选取规则公平　　　　　　　　　D．这种选取规则不公平

例 8．（多选题）（2023·山东·高三专题练习）下列说法正确的是（　）

A．一个人打靶，打了 10 发子弹，有 6 发子弹中靶，因此这个人中靶的概率为 0.6

B．某地发行福利彩票，其回报率为 47%，有个人花了 100 元钱买彩票，一定会有 47 元回报

C．5 张奖券中有一张有奖，甲先抽，乙后抽，则乙与甲中奖的可能性相同

D．大量试验后，可以用频率近似估计概率.

例 9．（多选题）（2023·江苏·金陵中学二模）某人投了 100 次篮，设投完前 n 次的命中率为 r_m．其中 $n=1,2$，….100．已知 $r_1=0,r_{100}=0.85$，则一定存在 $0<m<100$ 使得（　）

A．$r_m=0.5$　　　B．$r_m=0.6$　　　C．$r_m=0.7$　　　D．$r_m=0.8$

变式 9．（2023·全国·模拟预测）甲、乙两人玩掷骰子游戏，规定: 甲、乙两人同时掷骰子，若甲掷两次骰子的点数之和小于6，则甲得一分；若乙掷两次骰子的点数之和大于m，则乙得一分，最先得到 10 分者获胜.为确保游戏的公平性，正整数m的值应为（　）

A．6　　　B．7　　　C．8　　　D．9

变式 10．（2023·全国·高三专题练习）某地区公共卫生部门为了了解本地区中学生的吸烟情况，对随机抽出的 200 名学生进行了调查．调查中使用了下面两个问题：

问题一：你的父亲阳历生日日期是不是奇数？

问题二：你是否经常吸烟？

调查者设计了一个随机化装置：一个装有大小、形状和质量完全一样的 50 个白球和 50 个红球的袋子，每个被调查者随机从袋子中摸取 1 个球（摸出的球再放回袋子中），摸到白球的学生如实回答第一个问题，摸到红球的学生如实回答第二个问题，回答“是”的人往一个盒子中放一个小石子，回答“否”的人什么都不要做，如果一年按 365 天计算，且最后盒子中有 60 个小石子，则可以估计出该地区中学生吸烟人数的百分比为（　）

A．7%　　　B．8%　　　C．9%　　　D．30%

【方法技巧与总结】

概率和频率的关系：概率可看成频率在理论上的稳定值，它从数量上反映了随机事件发生的可能性的大小，它是频率的科学抽象，当试验次数越来越多时频率向概率靠近，只要次数足够多，所得频率就近似地当作随机事件的概率.

题型四：互斥事件与对立事件

例10．（2023·全国·高三专题练习）“黑匣子”是飞机专用的电子记录设备之一，黑匣子有两个，为驾驶舱语音记录器和飞行数据记录器.某兴趣小组对黑匣子内部构造进行相关课题研究，记事件A为‘只研究驾驶舱语音记录器”，事件B为“至少研究一个黑厘子”，事件C为“至多研究一个黑厘子”，事件D为“两个黑厘子都研究”.则（　）

A．A与C是互斥事件　　B．B与D是对立事件

C．B与C是对立事件　　D．C与D是互斥事件

例11．（2023·全国·高三专题练习）设靶子上的环数取1~10这10个正整数，脱靶计为0环．某人射击一次，设事件$A=$“中靶”，事件$B=$“击中环数大于5”，事件$C=$“击中环数大于1且小于6”，事件$D=$“击中环数大于0且小于6”，则下列关系正确的是（　）

A．B与C互斥　　B．B与C互为对立

C．A与D互为对立　　D．A与D互斥

例12．（2023·全国·高三专题练习）从1，2，3，4，5，6这六个数中任取三个数，下列两个事件为对立事件的是（　）

A．“至多有一个是偶数”和“至多有两个是偶数”

B．“恰有一个是奇数”和“恰有一个是偶数”

C．“至少有一个是奇数”和“全都是偶数”

D．“恰有一个是奇数”和“至多有一个是偶数”

变式11．（2023·全国·高三专题练习）命题“事件A与事件B对立”是命题“事件A与事件B互斥”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【方法技巧与总结】

1、准确把握互斥事件与对立事件的概念:①互斥事件是不可能同时发生的事件,但也可以同时不发生;②对立事件是特殊的互斥事件，特殊在对立的两个事件不可能都不发生，既有且仅有一个发生.

2、判别互斥事件、对立事件一般用定义判断，不可能同时发生的两个事件为互斥事件；两个事件，若有且仅有一个发生，则这两个事件为对立事件，对立事件一定是互斥事件.

题型五：利用互斥事件与对立事件计算概率

例 13．（2023

·广东广州·高三阶段练习）采购员要购买某种电器元件一包（10 个）．他的采购方法是：从一包中随机抽查 3 个，如果这 3 个元件都是好的，他才买下这一包．假定含有 4 个次品的包数占 30%，其余包中各含 1 个次品，则采购员随机挑选一包拒绝购买的概率为（　　）

A．0.46　　　　B．0.49　　　　C．0.51　　　　D．0.54

例 14．（2023·安徽省定远县第三中学高三阶段练习）甲、乙两人参加歌唱比赛，晋级概率分别为$\frac{4}{5}$和$\frac{3}{5}$，且两人是否晋级相互独立，则两人中恰有一人晋级的概率为（　　）

A．$\frac{11}{25}$　　　　B．$\frac{3}{5}$　　　　C．$\frac{2}{5}$　　　　D．$\frac{23}{25}$

例 15．（2023·河南河南·模拟预测（理））某士兵进行射击训练，每次命中目标的概率均为$\frac{3}{4}$，且每次命中与否相互独立，则他连续射击 3 次，至少命中两次的概率为（　　）

A．$\frac{27}{32}$　　　　B．$\frac{9}{16}$　　　　C．$\frac{27}{64}$　　　　D．$\frac{9}{32}$

变式 12．（2023·重庆南开中学高三阶段练习）重庆的 8 月份是一段让人难忘的时光，我们遭遇了高温与山火，断电和疫情．疫情的肆虐，让我们再次居家隔离．为了保障民生，政府极力保障各类粮食和生活用品的供应，在政府的主导与支持下，各大电商平台也纷纷上线，开辟了一种无接触式送货服务，用户在平台上选择自己生活所需要的货物并下单，平台进行配备打包，再由快递小哥送货上门．已知沙坪坝某小区在隔离期间主要使用的电商平台有：某东到家，海马生鲜，咚咚买菜．由于交通、配送等多方面原因，各电商平台并不能准时送达，根据统计三家平台的准点率分别为$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，各平台送货相互独立，互不影响，某小哥分别在三家电商各点了一份配送货，则至少有两家准点送到的概率为（　　）

A．$\frac{97}{120}$　　　　B．$\frac{5}{6}$　　　　C．$\frac{9}{10}$　　　　D．$\frac{53}{60}$

变式 13．（2023·全国·高三专题练习）甲、乙两名同学做同一道数学题，甲做对的概率为 0.8，乙做对的概率为 0.9，下列说法错误的是（　　）

A．两人都做对的概率是 0.72　　　　B．恰好有一人做对的概率是 0.26

C．两人都做错的概率是 0.15　　　　D．至少有一人做对的概率是 0.98

变式 14．（2023·江苏江苏·高三阶段练习）从属于区间$\left[2,8\right]$的整数中任取两个数，则至少有一个数是质数的概率为（　　）

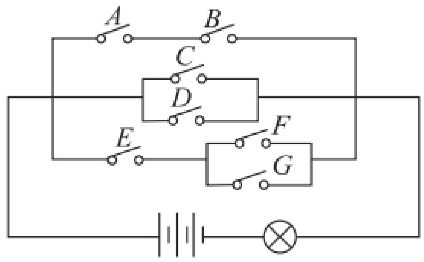
A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{9}{14}$ D. $\frac{11}{14}$

变式 15．（2023·甘肃·永昌县第一高级中学高三阶段练习（理））小吴、小张两名同学均打算暑期选择学校的舞蹈、画画、篮球三个兴趣班中的一个兴趣班学习，小吴、小张选择舞蹈、画画、篮球三个兴趣班学习的概率分别如下表，则小吴、小张选择不同兴趣班学习的概率为（　　）

	舞蹈	画画	篮球
小吴	0.3		0.4
小张	0.5	0.3	

A．0.68　　B．0.66　　C．0.64　　D．0.62

变式 16．（2023·河北衡水·高三阶段练习）一个电路如图所示，A，B，C，D，E，F，G 为 7 个开关，其闭合的概率均为$\frac{2}{3}$，且是相互独立的，则灯亮的概率是（　　）



A．$1-\frac{55}{3^7}$　　B．$1-\frac{11}{3^7}$　　C．$\frac{23}{3^7}$　　D．$\frac{5}{3^5}$

【方法技巧与总结】

求复杂的互斥事件的概率的两种方法

(1)直接法，将所求事件的概率分解为一些彼此互斥的事件的概率的和，运用互斥事件的概率求和公式计算．

(2)间接法，先求此事件的对立事件的概率，再用公式$P(A)=1-P(\overline{A})$，即运用逆向思维(正难则反)．特别是“至多”“至少”型题目，用间接法求解就显得较简便．

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·山东·潍坊七中高三阶段练习）已知 A，B 是一次随机试验中的两个事件，若满足 $P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$，则（　　）

A．事件 A，B 互斥　　B．事件 $A.B$ 相瓦独立

C．事件 A，B 不互斥　　D．事件 A，B 不相互独立

2．（2023·全国·模拟预测（文））已知$P(A)$、$P(B)$分别表示随机事件 A、B 发生的概率，那么$1-P(AB)$是下列哪个事件的概率（　　）

A．事件 A、B 同时发生　　B．事件 A、B 至少有一个发生

C．事件 A、B 都不发生　　D．事件 A、B 至多有一个发生

3．（2023·湖南·高三开学考试）从0，2，4，6，8中任取2个不同的数分别记作a，b，则$|a-b|\geq 3$的概率是（　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{3}{10}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

4．（2023·全国·高三专题练习）“五一”劳动节放假期间，甲、乙、丙去北京旅游的概率分别为$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，假定三人的行动相互之间没有影响，那么这段时间内至少有 1 人去北京旅游的概率为（　）

A．$\frac{59}{60}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{60}$

5．（2023·安徽省太和中学高三阶段练习）甲、乙两人进行五局三胜制的乒乓球单打比赛，每局甲获胜的概率为$\frac{3}{5}$.已知在第一局和第二局比赛中甲均获胜，则继续比赛下去，甲最终赢得比赛的概率为（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{117}{125}$　　C．$\frac{27}{125}$　　D．$\frac{2}{5}$

6．（2023·全国·高三专题练习）下列说法错误的个数为（　）

①对立事件一定是互斥事件；

②若A，B为两个事件，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；

③若事件A，B，C两两互斥，则$P(A)+P(B)+P(C)=1$.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

7．（2023·全国·高三专题练习）从一箱产品中随机地抽取一件，设事件$A=\{$抽到一等品$\}$，事件$B=\{$抽到二等品$\}$，事件$C=\{$抽到三等品$\}$，且已知$P(A)=0.7$，$P(B)=0.2$，$P(C)=0.1$．则事件“抽到的不是一等品”的概率为（　）

A．0.7　　B．0.2　　C．0.1　　D．0.3

8．（2023·全国·高三专题练习）给出下列说法：①若事件A，B满足$P(A)+P(B)=1$，则A，B为对立事件；②把 3 张红桃J，Q，K随机分给甲、乙、丙三人，每人1张，事件$A=$“甲得红桃J”与事件$B=$“乙得红桃J”是对立事件；③一个人打靶时连续射击两次，事件“至少有一次中靶”的对立事件是“两次都不中靶”．其中说法正确的个数是（　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

二、多选题

9．（2023·全国·模拟预测）某商场推出抽奖活动，在甲抽奖箱中有四张有奖奖票.六张无奖奖票；乙抽奖箱中有三张有奖奖票，七张无奖奖票.每人能在甲乙两箱中各抽一次，以A表示在甲抽奖箱中中奖的事件，B 表示在乙抽奖箱中中奖的事件，C 表示两次抽奖均末中奖的事件.下列结论中正确的是（　）

A．$P(C)=\dfrac{21}{50}$

B．事件A与事件B相互独立

C．$P(AB)$与$P(C)$和为54%

D．事件A与事件B互斥

10．（2023·全国·高三专题练习）下列结论正确的是（　　）

A．若A，B互为对立事件，$P(A)=1$，则$P(B)=0$

B．若事件A，B，C两两互斥，则事件A与$B\cup C$互斥

C．若事件A与B对立，则$P(A\cup B)=1$

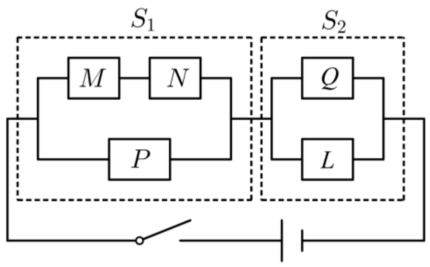
D．若事件A与B互斥，则它们的对立事件也互斥

11．（2023·全国·高三专题练习）从一批产品（既有正品也有次品）中取出三件产品，设$A=\{$三件产品全不是次品$\}$，$B=\{$三件产品全是次品$\}$,$C=\{$三件产品有次品，但不全是次品$\}$，则下列结论中正确的是（　　）

A．A与C互斥　　　　B．B与C互斥

C．任何两个都互斥　　　　D．A与B对立

12．（2023·全国·高三专题练习）如图所示的电路由S_1，S_2两个系统组成，其中M，N，P，Q，L是五个不同的元件，若元件M，N，P，Q，L出现故障的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{6}$，则下列结论正确的是（　　）

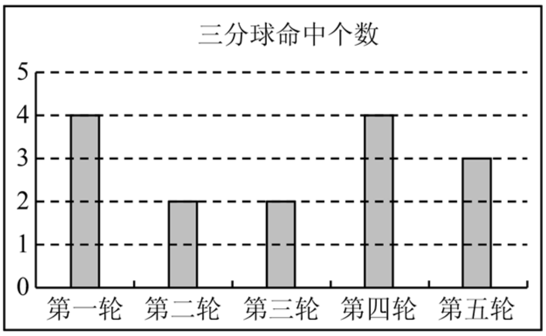


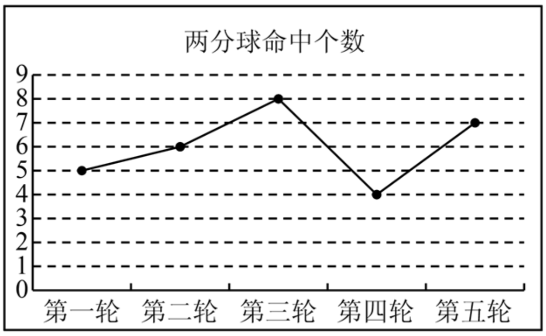
A．元件M，N均正常工作的概率为$\dfrac{1}{6}$　　　　B．系统S_1正常工作的概率为$\dfrac{5}{6}$

C．系统S_2正常工作的概率为$\dfrac{1}{30}$　　　　D．系统S_1，S_2均正常工作的概率为$\dfrac{29}{36}$

三、填空题

13．（2023·浙江嘉兴·高三阶段练习）树人中学进行篮球定点投篮测试，规则为：每人投篮三次，先在A处投一次三分球，投进得3分，未投进得0分，然后在B处投两次两分球，每投进一次得2分，未投进得0分，测试者累计得分高于3分即通过测试．甲同学为了通过测试，进行了五轮投篮训练，每轮在A处和B处各投10次，根据统计该同学各轮三分球和两分球的投进次数如下图表：





若以五轮投篮训练命中频率的平均值作为其测试时每次投篮命中的概率，则该同学通过测试的概率是__________.

14．（2023·广东佛山·高三阶段练习）事件 A 的优势比定义为 $\frac{P(A)}{P\left(\overline{A}\right)}$，如果 $P(A)=\frac{2}{3}$，则事件 A 的优势比是____________.

15．（2023·全国·高三专题练习（理））某项比赛规则是3局2胜，甲乙两人进行比赛，假设甲每局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$，则由此估计甲获胜的概率为______.

16．（2023·全国·高三专题练习）2019年末，武汉出现新型冠状病毒肺炎（*COVID*-19）疫情，并快速席卷我国其他地区，传播速度很快.因这种病毒是以前从未在人体中发现的冠状病毒新毒株，所以目前没有特效治疗方法，防控难度很大，武汉市出现疫情最早，感染人员最多，防控压力最大，武汉市从2月7日起举全市之力入户上门排查确诊的新冠肺炎患者、疑似的新冠肺炎患者、无法明确排除新冠肺炎的发热患者和与确诊患者的密切接触者等“四类”人员，强化网格化管理，不落一户、不漏一人，在排查期间，一户4口之家被确认为“与确诊患者的密切接触者”，这种情况下医护人员要对其家庭成员随机地逐一进行“核酸”检测，若出现阳性，则该家庭为“感染高危户”，设该家庭每个成员检测呈阳性的概率均为 $p(0<p<1)$ 且相互独立，该家庭至少检测了3个人才能确定为感染高危户”的概率为 $f(p)$，当 $p=p_0$ 时，$f(p)$ 最大，则 $p_0=$__________.

四、解答题

17．（2023·陕西·咸阳市高新一中高三开学考试（理））乒乓球是我国的国球，“乒乓精神”激励了一代又一代国人. 为弘扬国球精神，传承乒乓球文化，强健学生体魄，某中学举行了乒乓球单打比赛. 比赛采用7局4胜制，每局比赛为11分制，选手只要得到至少11分，并且领先对方至少2分（包括2分），即赢得该局比赛. 在一局比赛中，每人只发2个球就要交换发球权，如果双方比分为 $10:10$ 后，每一个球就要交换一个发球权. 经过紧张的角逐，甲、乙两位选手进入了决赛.

(1)若甲赢得每局比赛的概率为 $\frac{2}{3}$，求甲以 $4:1$ 赢得比赛的概率;

(2)若在某一局比赛中，双方战成 $10:10$. 且甲获得了下一球的发球权，若甲发球时甲赢1分的概率为 $\frac{3}{4}$，乙发球时甲赢1分的概率为 $\frac{1}{2}$，求两人打了 $\xi(\xi\leqslant 5,\ \xi\in\mathbf{N})$ 个球后，甲赢得了该局比赛的概率.

18．（2023·全国·模拟预测）为了解高三学生体能情况，某中学对所有高三男生进行了掷实心球测试，测试结果表明所有男生的成绩 X（单位：米）近似服从正态分布 $N\left(8,\sigma^2\right)$，且 $P(X<7)=0.05, P(X<7.5)=0.2$.

(1)若从高三男生中随机挑选 1 人，求他的成绩在 $\left(8.5,9\right]$ 内的概率.

(2)为争夺全省中学生运动会的比赛资格，甲、乙两位同学进行比赛.比赛采取“五局三胜制”，即两人轮流掷实心球一次为一局，成绩更好者获胜（假设没有平局）.一共进行五局比赛，先胜三局者将代表学校出战省运会.根据平时训练成绩预测，甲在一局比赛中战胜乙的概率为 $\frac{2}{3}$.

①求甲代表学校出战省运会的概率.

②丙、丁两位同学观赛前打赌，丙对丁说：“如果甲 $3:0$ 获胜，你给我 100 块，如果甲 $3:1$ 获胜，你给我 50 块，如果甲 $3:2$ 获胜，你给我 10 块，如果乙获胜，我给你 200 块”，如果你是丁，你愿意和他打赌吗？说明你的理由.

19．（2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习）为了让羽毛球运动在世界范围内更好的发展，世界羽联将每年的 7 月 5 日定为“世界羽毛球日”.在今年的“世界羽毛球日”里，某主办方打算一办有关羽毛球的知识竞答比赛.比赛规则如下；比赛一共进行 4 轮，每轮回答 1 道题.第 1 轮奖金为 100 元，第 2 轮奖金为 200 元，第 3 轮奖金为 300 元，第 4 轮奖金为 400 元.每一轮答对则可以拿走该轮奖金，答错则失去该轮奖金，奖金采用累计制，即参赛者最高可以拿到 1000 元奖金.若累计答错 2 题，则比赛结束且参赛者奖金清零.此外，参赛者在每一轮结束后都可主动选择停止作答、结束比赛并拿走已累计获得的所有奖金，小陈同学去参加比赛，每一轮答对题目的概率都是 $\frac{1}{3}$，并且小陈同学在没有损失奖金风险时会一直选择继续作答，在有损失奖金风险时选择继续作答的可能性为 $\frac{1}{2}$.

(1)求小陈同学前 3 轮比赛答对至少 2 题的概率；

(2)求小陈同学用参加比赛获得的奖金能够购买一只价值 499 元的羽毛球拍的概率.

专题45 随机事件、频率与概率

【考点预测】

知识点1、随机试验

我们把对随机现象的实现和对它的观察称为随机试验，简称试验，常用字母E表示．

我们感兴趣的是具有以下特点的随机试验：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但事先不能确定出现哪一个结果．

知识点2、样本空间

我们把随机试验E的每个可能的基本结果称为样本点，全体样本点的集合称为试验E的样本空间，一般地，用．Ω．表示样本空间，用ω表示样本点，如果一个随机试验有n个可能结果ω_1，ω_2，…，ω_n，则称样本空间$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$为有限样本空间．

知识点3、随机事件、确定事件

（1）一般地，随机试验中的每个随机事件都可以用这个试验的样本空间的子集来表示，为了叙述方便，我们将样本空间Ω的子集称为随机事件，简称事件，并把只包含一个样本点的事件称为基本事件．当且仅当A中某个样本点出现时，称为事件A发生．

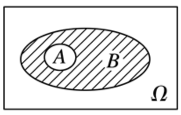
（2）Ω作为自身的子集，包含了所有的样本点，在每次试验中总有一个样本点发生，所以Ω总会发生，我们称Ω为必然事件．

（3）空集$\varnothing$不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，我们称为$\varnothing$为不可能事件．

（4）确定事件：必然事件和不可能事件统称为相对随机事件的确定事件．

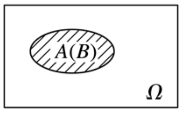
知识点4、事件的关系与运算

①包含关系：一般地，对于事件A和事件B，如果事件A发生，则事件B一定发生，这时称事件B包含事件A（或者称事件A包含于事件B），记作$B\supseteq A$或者$A\subseteq B$．与两个集合的包含关系类比，可用下图表示：

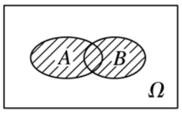


不可能事件记作$\varnothing$，任何事件都包含不可能事件．

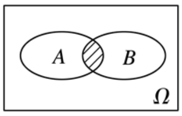
②相等关系：一般地，若$B\supseteq A$且$A\supseteq B$，称事件A与事件B相等．与两个集合的并集类比，可用下图表示：



③并事件（和事件）：若某事件发生当且仅当事件 A 发生或事件 B 发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的并事件（或和事件），记作 $A \cup B$（或 $A+B$）．与两个集合的并集类比，可用下图表示：

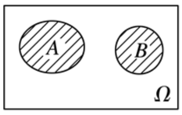


④交事件（积事件）：若某事件发生当且仅当事件 A 发生且事件 B 发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的交事件（或积事件），记作 $A \cap B$（或 AB）．与两个集合的交集类比，可用下图表示：



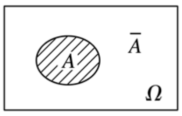
知识点 5、互斥事件与对立事件

（1）互斥事件：在一次试验中，事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互斥，可用下图表示：



如果 A_1，A_2，…，A_n 中任何两个都不可能同时发生，那么就说事件 A_1，．A_2．，…，A_n 彼此互斥．

（2）对立事件：若事件 A 和事件 B 在任何一次实验中有且只有一个发生，即 $A \cup B=\Omega$ 不发生，$A \cap B=\varnothing$ 则称事件 A 和事件 B 互为对立事件，事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$．



（3）互斥事件与对立事件的关系

①互斥事件是不可能同时发生的两个事件，而对立事件除要求这两个事件不同时发生外，还要求二者之一必须有一个发生．

②对立事件是互斥事件的特殊情况，而互斥事件未必是对立事件，即“互斥”是“对立”的必要不充分条件，而“对立”则是“互斥”的充分不必要条件．

知识点 6、概率与频率

（1）频率：在 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数 k 称为事件 A 发生的频数，频数 k 与总次数 n 的比值 $\frac{k}{n}$，叫做事件 A 发生的频率．

（2）概率：在大量重复尽心同一试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{k}{n}$ 总是接近于某个常数，并且在它附近摆动，这时，就把这个常数叫做事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

（3）概率与频率的关系：对于给定的随机事件 A，由于事件 A 发生的频率 $\frac{k}{n}$ 随着试验次数的增加稳定于概率 $P(A)$，因此可以用频率 $\frac{k}{n}$ 来估计概率 $P(A)$.

【题型归纳目录】

题型一：随机事件的关系与运算

题型二：频率与概率

题型三：生活中的概率

题型四：互斥事件与对立事件

题型五：利用互斥事件与对立事件计算概率

【典型例题】

题型一：随机事件的关系与运算

例 1.（2023·浙江省桐庐中学高三阶段练习）抛掷一枚质地均匀的正方体骰子，若事件 $A=$“向上的点数为3”，$B=$“向上的点数为6”，$C=$“向上的点数为3或6”，则有（　　）

A．$A\subseteq B$　　　　B．$C\subseteq B$　　　　C．$A\cap B=C$　　　　D．$A\cup B=C$

答案：D

【解析】对于 A：事件 $A=$“向上的点数为3”发生，事件 $B=$“向上的点数为6”一定不发生，故选项 A 不正确；

对于 B：事件 $C=$“向上的点数为3或6”发生，事件 $B=$“向上的点数为6”不一定发生，但事件 $B=$“向上的点数为6”发生，事件 $C=$“向上的点数为3或6” 一定发生，所以 $B\subseteq C$ ，故选项 B 不正确；

对于 C：事件 A 和事件 B 不能同时发生，$A\cap B=\varnothing$，故选项 C 不正确；

对于 D：事件 $A=$“向上的点数为3”或事件 $B=$“向上的点数为6”发生，则事件 $C=$“向上的点数为3或6”发生，故选项 D 正确；

故选：D

例 2.（2023·全国·高三专题练习（文））一批产品共有 100 件，其中 5 件是次品，95 件是合格品.从这批产品中任意抽取 5 件，现给出以下四个事件：

事件 A：恰有一件次品；

事件 B：至少有两件次品；

事件 C：至少有一件次品；

事件 D：至多有一件次品.

并给出以下结论：

①$A\cup B=C$；②$B\cup D$是必然事件；③$A\cap B=C$；④$A\cap D=C$．

其中正确结论的序号是（   ）

A．①②　　　　B．③④　　　　C．①③　　　　D．②③

答案：A

【解析】解析：事件$A\cup B$：至少有一件次品,即事件C,所以①正确；事件$A\cap B=\varnothing$,③不正确；

事件$B\cup D$：至少有两件次品或至多有一件次品,包括了所有情况,所以②正确；

事件$A\cap D$：恰有一件次品,即事件A,所以④不正确.

故选：A

例3．（多选题）（2023·全国·高三专题练习）一批产品共有100件，其中5件是次品，95件是合格品．从这批产品中任意抽取5件，给出以下四个事件：

事件A：恰有一件次品；

事件B：至少有两件次品；

事件C：至少有一件次品；

事件D：至多有一件次品．

下列选项正确的是（   ）

A．$A\cup B=C$　　　　B．$B\cup D$是必然事件

C．$A\cap B=C$　　　　D．$A\cap D=C$

答案：AB

【解析】对于A选项，事件$A\cup B$指至少有一件次品，即事件C，故A正确；

对于B选项，事件$B\cup D$指至少有两件次品或至多有一件次品，次品件数包含0到5，即代表了所有情况，故B正确；

对于C选项，事件A和B不可能同时发生，即事件$A\cap B=\varnothing$，故C错误；

对于D选项，事件$A\cap D$指恰有一件次品，即事件A，而事件A和C不同，故D错误.

故选：AB.

变式1．（多选题）（2023·全国·高三专题练习）对空中飞行的飞机连续射击两次，每次发射一枚炮弹，设A="两次都击中飞机"，B="两次都没击中飞机"，C="恰有一枚炮弹击中飞机"，D="至少有一枚炮弹击中飞机"，下列关系正确的是（   ）

A．$A\subseteq D$　　　　B．$B\cap D=\varnothing$

C．$A\cup C=D$　　　　D．$A\cup B=B\cup D$

答案：ABC

【解析】"恰有一枚炮弹击中飞机"指第一枚击中第二枚没中或第一枚没中第二枚击中，"至少有一枚炮弹击中"包含两种情况:恰有一枚炮弹击中，两枚炮弹都击中．故$A\subseteq D$，$A\cup C=D$.故A、C正确；