

备考产品化·一轮复习

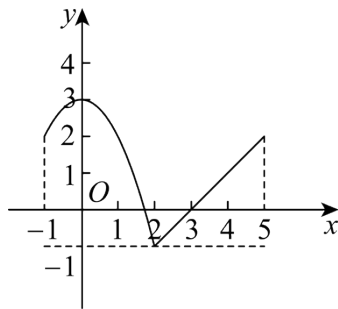
考点专练【练】第八节 函数的单调性与最值

核心考点 1. 函数的单调区间

角度 1 求函数的单调区间

1. 若函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x}$, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为_____.

2. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-1, 5]$, 其图象如图所示, 则下列说法中正确的是 ()



A. $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$

B. $f(x)$ 的最大值为 2

C. $f(x)$ 的最小值为 -1

D. $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$ 和 $(2, 5)$

3. 已知函数 $f(x) = |x - a|$, $g(x) = x^2 + 2ax + 1$ (a 为正常数), 且函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 y 轴上的截距相等.

(1) 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x) + g(x)$ 的单调递增区间;

(3) 若 n 为正整数, 证明: $10^{f(n)} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{g(n)} < 4$.

角度 2 根据函数的单调性求参数

4. 函数 $f(x) = \log_a(x|x - a| - 1)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(2, +\infty)$

B. $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

C. $[4, +\infty)$

D. $(0, 1) \cup [4, +\infty)$

5. 命题 $P: f(x) = 2ax^2 + \frac{8}{3}x + 1 (a > 0)$ 在 $[-1, 2]$ 单调增函数, 命题 $Q: g(x) = \begin{cases} ax - 2, & x \leq 2 \\ \frac{a-2}{x}, & x > 2 \end{cases}$

($a \in \mathbf{R}$) 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 则命题 P 是命题 Q 的_____. (在“充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件”中选择最合适的填写)

6. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, $g(x) = \log_a[f(x) - ax]$. 对任意 $x \in \mathbf{R}$,

$f(x-4) = f(-x)$ 恒成立, 且 $f(1) = 5$.

(1) 求实数 b, c 的值.

(2) 若 $y = g(x)$ 在 $[2, 3]$ 上是严格增函数, 求实数 a 的取值范围.

角度 3 根据函数单调性解不等式

7. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} + \sin x - x + 2$, 其中 e 是自然对数的底数. 若 $f\left(\log_{\frac{1}{2}} t\right) + f(3) > 4$,

则实数 t 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ B. $\left(\frac{1}{8}, +\infty\right)$ C. $(0, 8)$ D. $(8, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x - 1, & x \leq 1, \\ \sqrt{x+3}, & x > 1, \end{cases}$ 则不等式 $f(x+2) < 2 - f(x-4)$ 的解集为_____.

9. 若 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$.

(1) $y = f(x)$ 过 $(4, 2)$, 求 $f(2x-2) < f(x)$ 的解集;

(2) 存在 x 使得 $f(x+1)$ 、 $f(ax)$ 、 $f(x+2)$ 成等差数列, 求 a 的取值范围.

角度 4 比较函数值大小

10. 已知函数 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 3$ 对称, 则

$a = f(0.2)$, $b = f(2)$, $c = f(0)$ 的大小关系是 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $b > a > c$

11. 已知函数 $f(x) = e^x$, 则 ()

- A. 当 $x_2 > x_1$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ B. 当 $x_2 > x_1 > 1$ 时, $x_1 f(x_2) < x_2 f(x_1)$

C. 当 $x_1 < x_2 < -1$ 时, $x_2 f(x_2) < x_1 f(x_1)$ D. 当 $a > -\frac{1}{e}$ 时, 方程 $xf(x) = a$ 只有 1 个解

12. 设 $a = 2\ln \frac{5}{2}$, $b = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$, $c = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{4}}$, 则 a, b, c 的大小关系为_____. (用“<”连接)

核心考点 2. 函数的最值

角度 1 利用函数单调性求最值或值域

13. 函数 $f(x)$ 满足 $\ln x = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 且 $x_1 > e, x_2 > e, f(x_1) + f(x_2) = 1$, 则 $f(x_1 x_2)$ 的最小值为

()

A. e B. 1 C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{1}{e}$

14. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, 对于定义域内的任意实数 x , 有 $f(2x) = 2f(x)$ 成立. 且 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = \log_2 x$. 那么当 $x \in (1, 2^n]$ 时, 函数 $y = f(x)$ 最大值为_____. (用 n 来表示)

15. 已知奇函数 $f(x) = \log_a \frac{1-mx}{x-1}$ ($a > 0, a \neq 1$).

(1) 求实数 m 的值;

(2) 判断并证明 $y = f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的单调性;

(3) 设 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{33}{16}$, 对于任意的 $x_1 \in [3, 4]$, 总存在 $x_2 \in [-4, 4]$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立,

求实数 a 的取值范围.

角度 2 根据函数的最值求参数

16. 记 $f(x) = |\ln x + ax + b|$ ($a > 0$) 在区间 $[t, t+2]$ (t 为正数) 上的最大值为 $M_t(a, b)$, 若

$\{b | M_t(a, b) \geq \ln 2 + a\} = \mathbf{R}$, 则实数 t 的最大值是 ()

A. 2 B. 1 C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

17. 已知函数 $y = 2a + \left| \frac{(1-2a)x + 3 + 2a}{x-1} \right|$ (a 是常数) 在 $[2, 5]$ 上的最大值是 5, 则 a 的值可能是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

18. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2a-x} + \sqrt{x}$ ($a \in \mathbf{N}^*$), 设 $f(x)$ 的最大值、最小值分别为 m, n , 若 $m - n < 2$, 则正整数 a 的取值个数是_____.

19. 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) - kx$, ($k \in \mathbf{R}$) 的图象关于 y 轴对称.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 若函数 $h(x) = -2^{f(x)+x} + m \cdot 2^x + 1$, $x \in [0, \log_2 3]$, 是否存在实数 m 使得 $h(x)$ 的最大值为 3?

若存在, 求出实数 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

角度 3 复合函数的最值

20. 已知函数 $f(x) = |\sin x - \cos x| + \sin 2x$, 则下列选项正确的是 ()

A. π 是函数 $f(x)$ 的一个周期

B. $x = -\frac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴

C. 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{5}{4}$, 最小值为 $\sqrt{2} - 1$

D. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$ 上单调递减

21. 已知函数 $f(x) = \frac{4^x + 3 \cdot 2^x + 1}{4^x + 2^x + 1}$, $x \in [-1, 1]$, 则函数 $f(x)$ 的值域为_____.

22. 已知函数 $f(x) = \log_3\left(\frac{1}{x} + a\right)$ ($a > 0$), 对任意的 $t \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 则 a 的取值范围为_____.

核心考点 3. 不等式恒成立与有解问题

角度 1 函数不等式恒成立问题

23. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$, 若任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \geq a(x+2)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $\left[0, \frac{1}{e}\right]$

B. $[0, 1]$

C. $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

D. $[1, e]$

24. 已知函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 且对 $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$,

且 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ 成立, 若 $f(2ax) < f(2x^2 + 1)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 a

的可能取值为 ()

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

25. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($b > a$), 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 $\frac{b-a}{a+b+c}$

的最大值是_____.

26. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f^2(x) = 9^x + 9^{-x} + 2$, 且 $3f^2(1) - 7f(1) - 10 = 0$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式, 并判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2)若对任意 $x_1 \in [-1, 0]$, $x_2 \in [3, 6]$, $f(x_1) - 3^{x_1} + 3^{-x_1} < x_2^2 - ax_2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

角度 2 函数不等式能成立(有解)问题

27. 已知函数 $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{2^x} - a\right)$ 的定义域为 $[-2, 0]$, 若存在 $x_1, x_2 \in [-2, 0]$, 满足

$|f(x_1) - f(x_2)| \geq 3$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{4}{7}, +\infty\right)$

B. $\left[\frac{2}{5}, 1\right)$

C. $\left[\frac{2}{5}, 4\right)$

D. $\left[\frac{4}{7}, 1\right)$

28. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 6x + m$, $g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 对任意 $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 存在 x_1 、

$x_2 \in [-1, 4]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_0) \leq f(x_2)$, 则实数 m 的取值范围是_____.

29. 设区间 A 是函数 $y = f(x)$ 定义域内的一个子集, 若存在 $x_0 \in A$, 使得 $f(x_0) = x_0$ 成立,

则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“不动点”, 也称 $f(x)$ 在区间 A 上存在不动点, 例如 $g(x) = 2x - 1$ 的“不

动点”满足 $g(x_0) = 2x_0 - 1 = x_0$, 即 $g(x)$ 的“不动点”是 $x_0 = 1$. 设函数

$$f(x) = \log_2(4^x + a \cdot 2^{x-1} - 6), \quad x \in [1, 2].$$

(1)若 $a = 4$, 求函数 $f(x)$ 的不动点;

(2)若函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上不存在不动点, 求实数 a 的取值范围.

参考答案:

1. (0,1)

【分析】利用导数求解函数的单调区间即可.

【详解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x - 1}{e^x}$,

令 $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 (x > 0)$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$, $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $\varphi(1) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$.

故答案为: $(0, 1)$.

2. ACD

【分析】根据图象直接判断单调区间和最值即可.

【详解】对于 A, 由图象可知: $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$, A 正确;

对于 B, 当 $x = 0$ 时, $f(x)_{\max} = 3$, B 错误;

对于 C, 当 $x = 2$ 时, $f(x)_{\min} = -1$, C 正确;

对于 D, 由图象可知: $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$ 和 $(2, 5)$, D 正确.

故选: ACD

3. (1) $a = 1$;

(2) $[-\frac{1}{2}, +\infty)$;

(3) 证明见解析.

【分析】(1) 由 $f(0) = g(0)$ 求解可得;

(2) 由绝对值定义分类讨论去掉绝对值符号后, 分段得出单调增区间, 然后合并即可得;

(3) 设 $c_n = 10^{f(n)} \cdot (\frac{4}{5})^{g(n)} = 10^{n-1} \cdot (\frac{4}{5})^{n^2+2n+1}$, $c_n > 0$, 解不等式 $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$, 得 $n > 3.7$, 即 $n \leq 4$,

由此得 $\{c_n\}$ 中, c_4 最大, 再用对数的运算法则证明 $c_4 < 4$ 即得证.

【详解】(1) 由 $f(0) = g(0)$ 得 $|a| = 1$, 又 $a > 0$, 所以 $a = 1$;

$$(2) f(x) + g(x) = |x-1| + x^2 + 2x + 1,$$

$x \geq 1$ 时, $f(x) + g(x) = x^2 + 3x$, 它在 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

$x < 1$ 时, $f(x) + g(x) = x^2 + x + 2$, 它在 $[-\frac{1}{2}, 1)$ 上是增函数,

所以函数 $f(x) + g(x)$ 的增区间是 $[-\frac{1}{2}, +\infty)$;

$$(3) \text{ 设 } c_n = 10^{f(n)} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{g(n)} = 10^{n-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n^2+2n+1}, \quad c_n > 0,$$

解不等式 $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$, 即 $10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2n+3} < 1$, $n > -\frac{1}{2\lg 0.8} - \frac{3}{2} \approx 3.7$, 由 $n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$, $c_4 > c_5 > c_6 > \dots$,

所以 $\{c_n\}$ 中, c_4 最大, $c_4 = 10^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{25}$,

设 $x = 10^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{25}$, 则 $\lg x = 3 + 25(\lg 4 - \lg 5) = 3 + 25(3\lg 2 - 1) = 3 + 25 \times (3 \times 0.301 - 1)$

$= 0.575 < 2\lg 2 = \lg 4$, 故 $x = 10^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{25} < 4$,

所以 $10^{f(n)} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{g(n)} < 4$.

4. C

【分析】根据对数函数与复合函数的单调性, 可得内函数的单调性, 利用其最值以及二次函数单调性, 建立不等式, 可得答案.

【详解】令 $u = x|x-a|-1$, 则 $y = \log_a u$.

当 $a > 1$ 时, $y = \log_a u$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

则由复合函数的单调性可知 $u = x|x-a|-1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

且 $u = x|x-a|-1 > 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

所以 $u_{\min} = |1-a|-1 > 0$, 解得 $a > 2$ 或 $a < 0$ (舍去).

所以 $u = x|x-a|-1 = x(a-x)-1 = -x^2 + ax - 1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

则 $\frac{a}{2} \geq 2$, 解得 $a \geq 4$.

当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a u$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

则由复合函数的单调性可知 $u = x|x-a|-1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减,

且 $u = x|x-a|-1 > 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

所以 $u_{\min} = 2|2-a|-1 > 0$, 解得 $a < \frac{3}{2}$ 或 $a > \frac{5}{2}$ (舍去).

所以 $u = x|x-a|-1 = x(x-a)-1 = x^2 - ax - 1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减,

则 $\frac{a}{2} \geq 2$, 解得 $a \geq 4$, 与 $0 < a < 1$ 矛盾.

综上所述, $a \in [4, +\infty)$.

故选: C.

5. 充要条件

【分析】根据二次函数以及分段函数单调性建立不等式, 结合充要条件的定义, 可得答案.

【详解】根据命题 P , 由函数 $f(x) = 2ax^2 + \frac{8}{3}x + 1 (a > 0)$, 此为图象开口向上的二次函数,

则其对称轴为直线 $x = -\frac{\frac{8}{3}}{2 \times 2a} = -\frac{2}{3a}$,

由函数 $f(x)$ 在 $x \in [-1, 2]$ 上单调递增, 则 $-\frac{2}{3a} \leq -1$, 解得 $0 < a \leq \frac{2}{3}$;

根据命题 Q , 由题意可得 $\begin{cases} a > 0 \\ a - 2 < 0 \\ 2a - 2 \leq \frac{a-2}{2} \end{cases}$, 解得 $0 < a \leq \frac{2}{3}$.

易知命题 P 是命题 Q 的充要条件.

故答案为: 充要条件.

6. (1) $b=4, c=0$

(2) $(1, 6)$

【分析】(1) 由 $f(x-4) = f(-x)$ 可知 $f(x)$ 的对称轴为 $x = -2$, 结合 $f(1) = 5$ 列式求解即可;

(2) 根据对数的定义可知 $x^2 + (4-a)x > 0$ 在 $[2, 3]$ 上恒成立, 可得 $0 < a < 6$, 且 $a \neq 1$, 再结合复合函数单调性分析求解.

【详解】(1) 因为 $f(x-4)=f(-x)$ ，可知 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-2$ ，

且 $f(1)=5$ ，则 $\begin{cases} -\frac{b}{2}=-2 \\ 1+b+c=5 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b=4 \\ c=0 \end{cases}$ 。

(2) 由 (1) 可知： $f(x)=x^2+4x$ ，则 $g(x)=\log_a[x^2+(4-a)x]$ ，

由题意可知： $x^2+(4-a)x>0$ 在 $[2,3]$ 上恒成立，即 $x+4>a$ 在 $[2,3]$ 上恒成立，

可得 $0<a<6$ ，且 $a\neq 1$ ，

可知 $y=x^2+(4-a)x$ 开口向上，对称轴为 $x=\frac{a-4}{2}<1$ ，

即 $y=x^2+(4-a)x$ 在 $[2,3]$ 上是严格增函数，

若 $y=g(x)$ 在 $[2,3]$ 上是严格增函数，则 $a>1$

所以实数 a 的取值范围 $(1,6)$ 。

7. C

【分析】求导后结合基本不等式可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，令 $g(x)=f(x)-2$ ，从而可得 $g(x)$

在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $g(x)$ 为奇函数，从而可化为 $\log_{\frac{1}{2}} t > -3$ ，求解即可。

【详解】Q $f'(x)=e^x+e^{-x}+\cos x-1\geq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}+\cos x-1=1+\cos x\geq 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增。

令 $g(x)=f(x)-2$ ， $\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增， $f(x)=g(x)+2$ 。

因为 $g(-x)=e^{-x}-e^x+\sin(-x)+x=-g(x)$ ，所以 $g(x)$ 为奇函数，

则 $f(\log_{\frac{1}{2}} t)+f(3)>4$ 化为 $g\left(\log_{\frac{1}{2}} t\right)+2+g(3)+2>4$ ，

所以 $g(\log_{\frac{1}{2}} t)>-g(3)\Leftrightarrow g(\log_{\frac{1}{2}} t)>g(-3)\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} t>-3$ ，解得 $0<t<8$ ，

$\therefore t\in(0,8)$ 。

故选：C

8. $(-\infty,4)$

【分析】由函数解析式可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，令 $g(x)=f(x+2)+f(x-4)$ ，不等式为

变为 $g(x)<g(4)$ ，利用单调性可得不等式的解集。

【详解】函数 $f(x) = x^3 + 2x - 1$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增,

又 $f(x) = \sqrt{x+3}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(1) = \sqrt{1+3} = 4$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

设 $g(x) = f(x+2) + f(x-4)$, 可得 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g(4) = f(6) + f(0) = 3 - 1 = 2$, 所以原不等式可化为 $g(x) < g(4)$,

所以原不等式的解集为 $(-\infty, 4)$.

故答案为: $(-\infty, 4)$.

9. (1) $\{x | 1 < x < 2\}$

(2) $a > 1$

【分析】(1) 求出底数 a , 再根据对数函数的单调性可求不等式的解;

(2) 存在 x 使得 $f(x+1)$ 、 $f(ax)$ 、 $f(x+2)$ 成等差数列等价于 $a^2 = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ 在 $(0, +\infty)$ 上

有解, 利用换元法结合二次函数的性质可求 a 的取值范围.

【详解】(1) 因为 $y = f(x)$ 的图象过 $(4, 2)$, 故 $\log_a 4 = 2$, 故 $a^2 = 4$ 即 $a = 2$ (负的舍去),

而 $f(x) = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故 $f(2x-2) < f(x)$,

故 $0 < 2x-2 < x$ 即 $1 < x < 2$,

故 $f(2x-2) < f(x)$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$.

(2) 因为存在 x 使得 $f(x+1)$ 、 $f(ax)$ 、 $f(x+2)$ 成等差数列,

故 $2f(ax) = f(x+1) + f(x+2)$ 有解, 故 $2\log_a(ax) = \log_a(x+1) + \log_a(x+2)$,

因为 $a > 0, a \neq 1$, 故 $x > 0$, 故 $a^2 x^2 = (x+1)(x+2)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

由 $a^2 = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

令 $t = \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$, 而 $y = 2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域为 $(1, +\infty)$,

故 $a^2 > 1$ 即 $a > 1$.

10. D

【分析】结合函数的对称性及单调性即可比较大小

【详解】因为函数 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递减，且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3)$ 上单调递增，

因为 $0 < 0.2 < 2$ ，所以 $f(0) < f(0.2) < f(2)$ ，

即 $c < a < b$ ；

故选：D

11. AC

【分析】结合 $f(x) = e^x$ 在定义域内单调性，判断 A；利用导数判断函数 $y = \frac{e^x}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性，由此判断 B；判断函数 $h(x) = xe^x$ ，在 $(-\infty, -1)$ 上的单调性，由此判断 C；，由函数 $h(x) = xe^x$ 单调性和最值，结合图像判断 D.

【详解】 $f(x) = e^x$ 在定义域内单调递增，所以当 $x_1 < x_2$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ ，

即当 $x_1 - x_2 < 0$ 时， $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ，故 A 正确；

当 $x_2 > x_1 > 1$ 时，要证明 $x_1 f(x_2) < x_2 f(x_1)$ ，只需证明 $\frac{f(x_2)}{x_2} < \frac{f(x_1)}{x_1}$ ，

故考虑构造函数 $y = \frac{e^x}{x}$ ，则 $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ，

当 $x > 1$ 时， $y' > 0$ ，函数 $y = \frac{e^x}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增，

所以当 $x_2 > x_1 > 1$ 时， $\frac{e^{x_2}}{x_2} > \frac{e^{x_1}}{x_1}$ ，即 $x_1 f(x_2) > x_2 f(x_1)$ ，所以 B 错误；

设 $h(x) = xe^x$ ，则 $h'(x) = (x+1)e^x$ ，

当 $x < -1$ 时， $h'(x) < 0$ ，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减，

当 $x > -1$ 时， $h'(x) > 0$ ，函数 $h(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增，

当 $x_1 < x_2 < -1$ 时， $h(x_2) < h(x_1)$ ，即 $x_2 f(x_2) < x_1 f(x_1)$ ，C 正确；

方程 $xf(x) = a$ ，即 $h(x) = a$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/068045070023006115>