

7. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, E 为 C_1D_1 的中点, F 为棱 CC_1 上异于端点的动点, 若平面 BEF 截该正方体所得的截面为五边形, 则线段 CF 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

8. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 若

椭圆的离心率为 e_1 , 双曲线的离心率为 e_2 , 则 $\frac{e_1^2}{e_1^2+1} + \frac{3e_2^2}{e_2^2+3}$ 的最小值是 ()

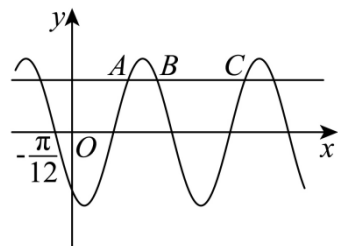
- A. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

二、多选题

9. 下列说法正确的是 ()

- A. $\emptyset \in \{0\}$
- B. 集合 $\{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\} = \left\{x \left| \frac{x}{2} \in \mathbb{Z} \right.\right\}$
- C. 函数 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 的值域为 $[0, 1]$
- D. $f(x) = x|x|$ 在定义域内单调递增

10. 如图, 点 A, B, C 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 的图象与直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 相邻的三个交点, 且 $|BC| - |AB| = \frac{\pi}{3}$, $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 0$, 则 ()



- A. $\omega = 4$
- B. $f\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$

C. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

D. 若将函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴平移 θ 个单位, 得到一个偶函数的图像, 则 $|\theta|$ 的最

小值为 $\frac{\pi}{24}$

11. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足: ①对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 恒有 $xf'(x) - f(x) = x$; ②

对任意的正数 m, n 恒有 $f(mn) = nf(m) + mf(n) + mn$. 则下列结论中正确的有 ()

A. $f(1) = -1$

B. 过点 $(e, f(e))$ 的切线方程 $y = x - 1$

C. 对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq x - e$ 恒成立

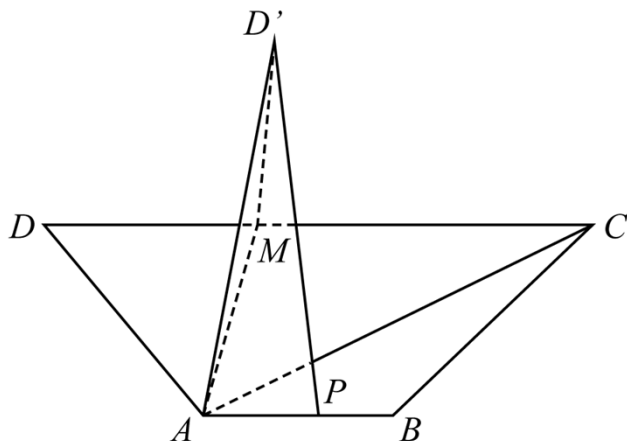
D. 若 x_0 为函数 $y = f(x) + x^2$ 的极值点, 则 $f(x_0) + 3x_0 > 0$

三、填空题

12. 已知复平面上一个动点 Z 对应复数 z , 若 $|z - 4i| \leq 2$, 其中 i 是虚数单位, 则向量 $\overrightarrow{OZ}$ 扫过的面积为_____.

13. 已知实数 x, y 满足 $x^2 - 3\ln x - y = 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 - mx + my + \frac{m^2}{2}}$ ($m \in \mathbb{R}$) 的最小值为_____.

14. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 1$, $AC = CD = DA = 2$, 动点 M 在边 DC 上 (不同于 D 点), P 为边 AB 上任意一点, 沿 AM 将 $\triangle ADM$ 翻折成 $\triangle AD'M$, 当平面 $AD'M$ 垂直于平面 ABC 时, 线段 PD' 长度的最小值为_____.



四、解答题

15. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 3$, $a_8 = 3a_3$, S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足
 $2S_n = 3b_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $c_n = a_n b_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

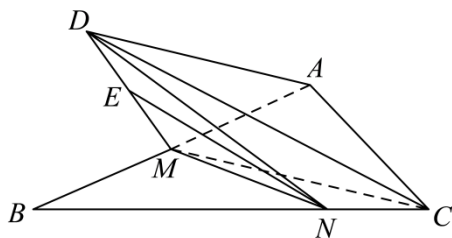
16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 3\sqrt{2}$,
 $a \sin B = b \sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right)$.

(1)求角 A ;

(2)作角 A 的平分线与 BC 交于点 D , 且 $AD = \sqrt{3}$, 求 $b + c$.

17. 如图所示, 已知 $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形, 点 M 是边 AB 的中点,
 点 N 在边 BC 上, 且 $BN = 3NC$. 以 MN 为折痕将 $\triangle BMN$ 折起, 使点 B 到达点 D

的位置，且平面 $DMC \perp$ 平面 ABC ，连接 DA, DC 。



(1)若 E 是线段 DM 的中点，求证： $NE \parallel$ 平面 DAC ；

(2)求二面角 $D-AC-B$ 的余弦值。

18. 已知 P 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上异于左、右顶点的一个动点，双曲线 C

的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，且 $F_2(3, 0)$ 。当 $|PF_1| = 2|PF_2|$ 时， $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30° 。

(1)求双曲线 C 的标准方程。

(2)连接 PF_1 ，交双曲线于另一点 A ，连接 PF_2 ，交双曲线于另一点 B ，若

$$\overrightarrow{PF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1A}, \overrightarrow{PF_2} = \mu \overrightarrow{F_2B}.$$

①求证： $\lambda + \mu$ 为定值；

②若直线 AB 的斜率为 -1 ，求点 P 的坐标。

19. 函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + \frac{3}{2} (a > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 当 $a=1$ 时, 若 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 求证: $x_1 + x_2 \geq 2$;

(3) 求证: 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $2 \ln(n+1) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{i} \right)^2 > n$.

参考答案:

1. A

【分析】首先化简集合，然后求出交集即可.

【详解】 $M = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\} = \{x | -1 < x < 4\}$,

$N = \{x | y = \ln(x-1)\} = \{x | x > 1\}$,

$M \cap N = \{x | 1 < x < 4\}$.

故选: A

2. D

【分析】由复数对应的点求出复数 z_1 , z_2 , 计算 $z_1 \cdot z_2$, 得复数 $z_1 \cdot z_2$ 的虚部.

【详解】在复平面内, 复数 z_1 , z_2 对应的点分别为 Z_1 , Z_2 ,

则 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + i$, 得 $z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)(-2 + i) = -4 - 3i$,

所以复数 $z_1 \cdot z_2$ 的虚部为 -3 .

故选: D

3. B

【分析】利用正切函数的性质结合集合间的基本关系判定充分、必要条件即可.

【详解】当函数 $y = \tan(x - \varphi)$ 的图象关于 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称时,

有 $\frac{\pi}{4} - \varphi = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{(-k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

易知 $\left\{\varphi \mid \varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \square \left\{\varphi \mid \varphi = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$

所以“函数 $y = \tan(x - \varphi)$ 的图象关于 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称”是“ $\varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ”的必要不充分条件.

故选: B.

4. D

【分析】由向量夹角的坐标表示计算.

【详解】因为 $\vec{a} - \vec{b} = (3, -\sqrt{3})$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$,

所以 $\cos \angle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a} - \vec{b}| |\vec{a}|} = \frac{6}{2\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选: D.

5. A

【分析】设出公差 d ，结合等差数列求和公式得到 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列，从而得到方程，求出 d 和 $a_1 = -2$ ，利用等差数列求和公式得到答案

【详解】设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，

$$\text{则 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}, \text{ 则 } \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{(n-1)d}{2},$$

$$\text{则 } \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{nd}{2} - a_1 - \frac{(n-1)d}{2} = \frac{d}{2},$$

故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列，

$$\text{又 } \frac{S_7}{7} = 1, \frac{S_{15}}{15} = 5, \text{ 所以 } 8 \times \frac{d}{2} = \frac{S_{15}}{15} - \frac{S_7}{7} = 5 - 1 = 4,$$

解得 $d = 1$ ，

$$\text{又 } 7a_1 + 21d = 7, \text{ 解得 } a_1 = -2,$$

故故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为首项为 -2 ，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

$$\text{所以 } T_n = -2n + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n^2 - 9n}{4}.$$

故选：A

6. D

【分析】分 $a = 0$ ， $a > 0$ 和 $a < 0$ 三种情况讨论，结合函数的单调性及函数的零点即可得出答案.

【详解】①当 $a = 0$ 时， $f(x) = \frac{1}{x}$ ，此时A选项符合；

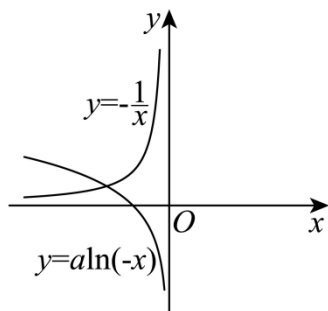
$$\text{②当 } a > 0 \text{ 时, } f(x) = a \ln|x| + \frac{1}{x} = \begin{cases} a \ln x + \frac{1}{x}, & x > 0 \\ a \ln(-x) + \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases},$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = a \ln(-x) + \frac{1}{x},$$

因为函数 $y = a \ln(-x)$, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上都是减函数，

所以函数 $f(x)$ 在在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，

如图，作出函数 $y = a \ln(-x)$, $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的图象，



由图可知，函数 $y = a \ln(-x)$, $y = -\frac{1}{x}$ 的图象在 $(-\infty, 0)$ 上有一个交点，

即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x}$ ，则 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{ax-1}{x^2}$ ，

由 $f'(x) > 0$ ，得 $x > \frac{1}{a}$ ，由 $f'(x) < 0$ ，得 $0 < x < \frac{1}{a}$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增，

当 $a = 1$ 时， $f(\frac{1}{a}) = a \ln \frac{1}{a} + a = 1$ ，故 B 选项符合；

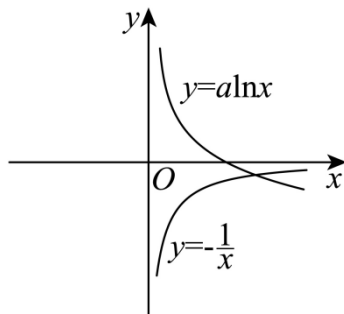
③当 $a < 0$ 时， $f(x) = a \ln|x| + \frac{1}{x} = \begin{cases} a \ln x + \frac{1}{x}, & x > 0 \\ a \ln(-x) + \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x}$ ，

因为函数 $y = a \ln x$, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是减函数，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，

如图，作出函数 $y = a \ln x$, $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图象，



由图可知，函数 $y = a \ln x$, $y = -\frac{1}{x}$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有一个交点，

即函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一个零点，

当 $x < 0$ 时, $f(x) = a \ln(-x) + \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{ax-1}{x^2}$,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x < \frac{1}{a}$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $\frac{1}{a} < x < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, 0)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \frac{1}{a})$ 上单调递增,

当 $a = -1$ 时, $f(\frac{1}{a}) = a \ln(-\frac{1}{a}) + a = -1$, 故 C 选项符合, D 选项不可能.

故选: D.

7. B

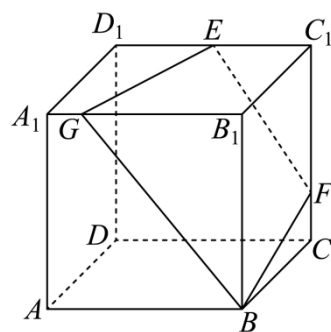
【分析】根据题意, 结合正方体的几何结构特征, 得出当 F 为棱 CC_1 上异于端点的动点, 截面为四边形, 点 G 只能在线段 MA_1 上, 求得 $\frac{1}{2} < GB_1 \leq 1$, 线段 CF 的取值范围, 得到答案.

【详解】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $BEF \perp$ 平面 $CDD_1C_1 = EF$,

因为 $B \in$ 平面 ABB_1A_1 , $B \in$ 平面 BEF , 平面 $CDD_1C_1 \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ,

则平面 BEF 与平面 ABB_1A_1 的交线过点 B , 且与直线 EF 平行, 与直线 A_1B_1 相交,

设交点为 G , 如图所示,



又因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

即 $\angle C_1EF, \angle BGB_1$ 分别为 EF, GB 与平面 $ABCD$ 所成的角,

因为 $EF \parallel GB$, 则 $\angle C_1EF = \angle BGB_1$, 且有 $\frac{C_1F}{C_1E} = \tan \angle C_1EF = \tan \angle BGB_1 = \frac{B_1B}{B_1G}$, 当 F 与 C

重合时, 平面 BEF 截该正方体所得的截面为四边形, 此时 $GA_1 = GB_1 = \frac{1}{2}$, 即 G 为棱 A_1B_1 中点 M ;

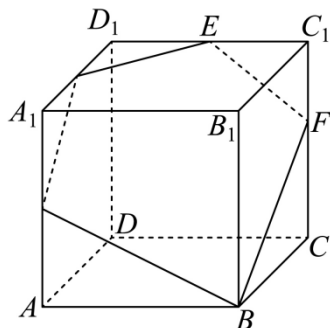
当点 F 由点 C 向点 C_1 移动过程中, $\angle C_1EF$ 逐渐减小, 点 G 由点 B_1 向点 A_1 方向移动;

当点 G 为线段 MA_1 上任意一点时, 平面 BEF 只与该正方体的 4 个表面有交线, 即可用成四边形;

当点 G 在线段 MA_1 延长线上时，直线 BG 必与棱 AA_1 交于除点 A_1 外的点，

又点 F 与 C_1 不重合，此时，平面 BEF 与该正方体的 5 个表面有交线，截面为五边形，

如图所示.



因此，当 F 为棱 CC_1 上异于端点的动点，截面为四边形，点 G 只能在线段 MA_1 （除点 M 外）

上，即 $\frac{1}{2} < GB_1 < 1$ ，可得 $C_1F = \frac{BB_1 \cdot C_1E}{B_1G} = \frac{1}{2B_1G} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，则 $CF = 1 - C_1F \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，

所以线段 CF 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，

所以若平面 BEF 截该正方体的截面为五边形，线段 CF 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 。

故选：B.

【点睛】知识方法：对于空间共面、共线问题，以及几何体的截面问题的策略：

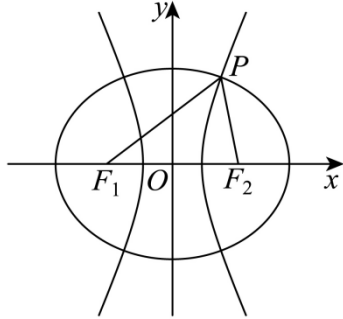
- 1、正面共面的方法：一是先确定一个平面，然后再证明其余的线（或点）在这个平面内；二是证明两个平面重合；
- 2、证明共线的方法：一是先由两个点确定一条直线，再证其他各点都在这条直线上；二是直接证明这些点都在同一条特定直线上；
- 3、空间几何体中截面问题：一是熟记特殊几何体（正方体，正四面体等）中的特殊截面的形状与计算；二是结合平面的基本性质，以及空间中的平行关系，以及平面的基本性质，找全空间几何体的截面问题，并作出计算；
- 4、空间几何体中的动点轨迹等问题：一般时根据线面平行，线面垂直的判定定理和性质定理，结合曲线的定义推断出动点的轨迹，有时也可以利用空间向量的坐标运算求出动点的轨迹方程；

8. A

【分析】设出椭圆的长半轴长 a_1 ，双曲线的实半轴长为 a_2

，然后根据焦点三角形顶角的余弦定理求解出 e_1, e_2 的关系式，最后通过“1”的妙用求解出最小值.

【详解】如图，设椭圆的长半轴长为 a_1 ，双曲线的实半轴长为 a_2 ，



则根据椭圆及双曲线的定义得： $|PF_1| + |PF_2| = 2a_1, |PF_1| - |PF_2| = 2a_2$ ，

$\therefore |PF_1| = a_1 + a_2, |PF_2| = a_1 - a_2$ ，设 $|F_1F_2| = 2c, \angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$ ，

则在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得， $4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)\cos\frac{\pi}{3}$ ，

化简得 $a_1^2 + 3a_2^2 = 4c^2$ ，即 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$ ，

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{e_1^2}{e_1^2 + 1} + \frac{3e_2^2}{e_2^2 + 3} &= \frac{1}{\frac{1}{e_1^2} + 1} + \frac{3}{\frac{3}{e_2^2} + 1} = \left(\frac{1}{\frac{1}{e_1^2} + 1} + \frac{3}{\frac{3}{e_2^2} + 1} \right) \left(\frac{1}{e_1^2} + 1 + \frac{3}{e_2^2} + 1 \right) \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \times \left[4 + \frac{\frac{3}{e_2^2} + 1}{\frac{1}{e_1^2} + 1} + \frac{3\left(\frac{1}{e_1^2} + 1\right)}{\frac{3}{e_2^2} + 1} \right] \geq \frac{1}{6} \times \left[4 + 2\sqrt{\frac{\frac{3}{e_2^2} + 1}{\frac{1}{e_1^2} + 1} \times \frac{3\left(\frac{1}{e_1^2} + 1\right)}{\frac{3}{e_2^2} + 1}} \right] = \frac{1}{6} \times (4 + 2\sqrt{3}) = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \left(\frac{3}{e_2^2} + 1\right)^2 = 3\left(\frac{1}{e_1^2} + 1\right)^2 \\ \frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} e_1^2 = \frac{3\sqrt{3} + 4}{11} < 1 \\ e_2^2 = \frac{3}{8 - 3\sqrt{3}} = \frac{24 + 9\sqrt{3}}{37} > 1 \end{cases} \text{ 时等号成立,}$$

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题考查椭圆、双曲线的离心率的相关计算，涉及到焦点三角形、基本不等式求最值等问题，对学生的计算能力要求较高，难度较大.解答本题的关键点有两个：

(1) 运用两个曲线的定义，找到离心率之间的关系；(2) 在已知条件等式的情况下，活用“1”的妙用求最值.

9. BD

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/068045123070006125>