

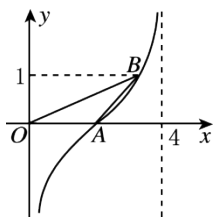
2023-2024 学年广东省汕头市龙湖区高三 3 月质量检测试题数学试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $y = \tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} =$ ()



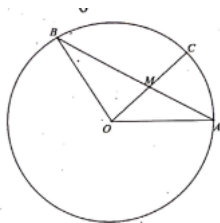
- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

2. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ，其中 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，若 $\forall x \in R, f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 ()

- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in Z)$ B. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in Z)$
- C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in Z)$ D. $\left[k\pi, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in Z)$

3. 点 A, B, C 是单位圆 O 上不同的三点，线段 OC 与线段 AB 交于圆内一点 M ，若

$\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}, (m > 0, n > 0), m + n = 2$ ，则 $\angle AOB$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 = 7, a_{10} + a_7 = 0$ ，则 $a_3 + a_4 =$ ()

- A. 20 B. 18 C. 16 D. 14

5. 已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\tan(\alpha - \pi) = -\frac{3}{4}$, 则 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 等于 ().

- A. $\pm\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{7}{5}$

6. 设复数 z 满足 $|z-3|=2$, z 在复平面内对应的点为 $M(a,b)$, 则 M 不可能为 ()

- A. $(2, \sqrt{3})$ B. $(3, 2)$ C. $(5, 0)$ D. $(4, 1)$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a (a \neq 0)$, 且 $a_{n+1} = ka_n + t$, 其中 $k, t \in R, n \in N^*$, 下列叙述正确的是 ()

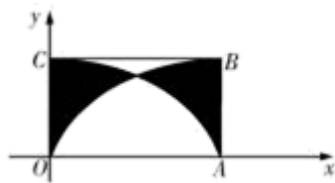
- A. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则一定有 $k=1$ B. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则一定有 $t=0$
C. 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 则一定有 $k \neq 1$ D. 若 $\{a_n\}$ 不是等比数列, 则一定有 $t \neq 0$

8. 已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, S_n 是它的前 n 项和, 若 $a_1 = 16$, 且 a_4 与 a_7 的等差中项为 $\frac{9}{8}$, 则 S_5 的值是 ()

- A. 29 B. 30 C. 31 D. 32

9. 如图, 在矩形 $OABC$ 中的曲线分别是 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 的一部分, $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $C(0, 1)$, 在矩形 $OABC$ 内随机

取一点, 若此点取自阴影部分的概率为 P_1 , 取自非阴影部分的概率为 P_2 , 则 ()



- A. $P_1 < P_2$ B. $P_1 > P_2$ C. $P_1 = P_2$ D. 大小关系不能确定

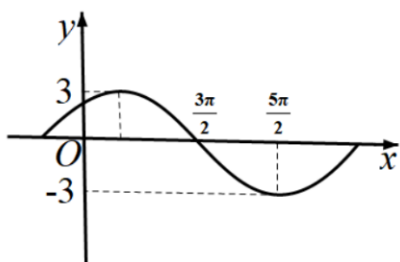
10. 若复数 z 满足 $zi = 1 - i$ (i 为虚数单位), 则其共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为 ()

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

11. 若点 (x, y) 位于由曲线 $y = |x - 2| + 1$ 与 $y = 3$ 围成的封闭区域内 (包括边界), 则 $\frac{y+1}{y-2}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-3, 1]$ B. $[-3, 5]$ C. $(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$ D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

12. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图, 则此函数表达式为 ()



A. $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

B. $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

C. $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

D. $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $y = f(x)$ 为 R 上的奇函数，满足 $f'(x) > -2$. 则不等式 $f(x-1) < x^2(3-2\ln x) + 3(1-2x)$ 的解集为_____.

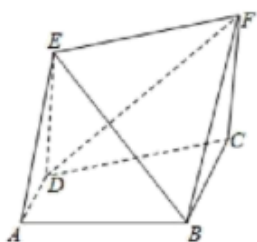
14. 已知点 M 是曲线 $y = 2\ln x + x^2 - 3x$ 上一动点，当曲线在 M 处的切线斜率取得最小值时，该切线的方程为_____.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-3, 0)$, $B(-1, -2)$, 若圆 $(x-2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 上有且仅有一对点 M, N , 使得 $\triangle MAB$ 的面积是 $\triangle NAB$ 的面积 2 倍，则 r 的值为_____.

16. 已知向量 $\vec{a} = (\cos 5^\circ, \sin 5^\circ)$, $\vec{b} = (\cos 65^\circ, \sin 65^\circ)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

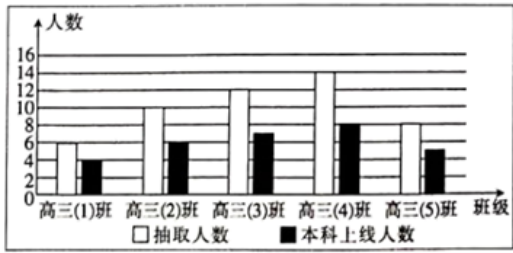
17. (12 分) 如图所示, 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AE = AB = BC = 2AD = 2$, 四边形 $EDCF$ 为矩形, $CF = \sqrt{3}$.



(1) 求证: 平面 $ECF \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 在线段 DF 上是否存在点 P , 使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$, 若存在, 求出线段 BP 的长, 若不存在, 请说明理由.

18. (12 分) 某省新课改后某校为预测 2020 届高三毕业班的本科上线情况, 从该校上一届高三 (1) 班到高三 (5) 班随机抽取 50 人, 得到各班抽取的人数和其中本科上线人数, 并将抽取数据制成下面的条形统计图.



- (1) 根据条形统计图，估计本届高三学生本科上线率。
- (2) 已知该省甲市 2020 届高三考生人数为 4 万，假设以 (1) 中的本科上线率作为甲市每个考生本科上线的概率。
- (i) 若从甲市随机抽取 10 名高三学生，求恰有 8 名学生达到本科线的概率（结果精确到 0.01）；
- (ii) 已知该省乙市 2020 届高三考生人数为 3.6 万，假设该市每个考生本科上线率均为 $p(0 < p < 1)$ ，若 2020 届高三本科上线人数乙市的均值不低于甲市，求 p 的取值范围。

可能用到的参考数据：取 $0.36^4 = 0.0168$ ， $0.16^4 = 0.0007$ 。

19. (12 分) 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点，点 $P(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 E 上，且抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点是椭圆 E 的一个焦点。

- (1) 求 a, b 的值；
- (2) 过点 F_2 作不与 x 轴重合的直线 l ，设 l 与圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 相交于 A, B 两点，且与椭圆 E 相交于 C, D 两点，当 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = 1$ 时，求 ΔF_1CD 的面积。

20. (12 分) ΔABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $c \cos B - b \sin C = 0$ ， $\cos A = \cos 2A$ 。

- (1) 求 C ；
- (2) 若 $a = 2$ ，求 ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC}$

21. (12 分) 在考察疫情防控工作中，某区卫生防控中心提出了“要坚持开展爱国卫生运动，从人居环境改善、饮食习惯、社会心理健康、公共卫生设施等多个方面开展，特别是要坚决杜绝食用野生动物的陋习，提倡文明健康、绿色环保的生活方式”的要求。某小组通过问卷调查，随机收集了该区居民六类日常生活习惯的有关数据。六类习惯是：(1) 卫生习惯状况类；(2) 垃圾处理状况类；(3) 体育锻炼状况类；(4) 心理健康状况类；(5) 膳食合理状况类；(6) 作息规律状况类。经过数据整理，得到下表：

	卫生习惯状况类	垃圾处理状况类	体育锻炼状况类	心理健康状况类	膳食合理状况类	作息规律状况类
有效答卷份数	380	550	330	410	400	430

习惯良好频率	0.6	0.9	0.8	0.7	0.65	0.6
--------	-----	-----	-----	-----	------	-----

假设每份调查问卷只调查上述六类状况之一，各类调查是否达到良好标准相互独立.

- (1) 从小组收集的有效答卷中随机选取 1 份，求这份试卷的调查结果是膳食合理状况类中习惯良好者的概率；
- (2) 从该区任选一位居民，试估计他在“卫生习惯状况类、体育锻炼状况类、膳食合理状况类”三类习惯方面，至少具备两类良好习惯的概率；
- (3) 利用上述六类习惯调查的排序，用“ $\xi_k = 1$ ”表示任选一位第 k 类受访者是习惯良好者，“ $\xi_k = 0$ ”表示任选一位第 k 类受访者不是习惯良好者 ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) .写出方差 $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3, D\xi_4, D\xi_5, D\xi_6$ 的大小关系.

22. (10 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ ，点 F 为抛物线的焦点，焦点 F 到直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 的距离为 d_1 ，

焦点 F 到抛物线 C 的准线的距离为 d_2 ，且 $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}$.

- (1) 求抛物线 C 的标准方程；
- (2) 若 x 轴上存在点 M ，过点 M 的直线 l 与抛物线 C 相交于 P 、 Q 两点，且 $\frac{1}{|PM|^2} + \frac{1}{|QM|^2}$ 为定值，求点 M 的坐标.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据正切函数的图象求出 A 、 B 两点的坐标，再求出向量的坐标，根据向量数量积的坐标运算求出结果.

【详解】

由图象得,令 $y = \tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, 即 $\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k=0$ 时解得 $x=2$,

令 $y = \tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$, 即 $\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, 解得 $x=3$,

$$\therefore A(2,0), B(3,1),$$

$$\therefore \vec{OA} = (2,0), \vec{OB} = (3,1), \vec{AB} = (1,1),$$

$$\therefore (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = (5,1) \cdot (1,1) = 5 + 1 = 6.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查正切函数的图象，平面向量数量积的运算，属于综合题，但是难度不大，解题关键是利用图象与正切函数图象求出坐标，再根据向量数量积的坐标运算可得结果，属于简单题.

2、A

【解析】

$$\forall x \in R, f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| \Rightarrow f(x)_{\max} = \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| = 1, \text{ 从而可得 } \varphi = \frac{\pi}{6}, f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 再解不等式}$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 即可.}$$

【详解】

$$\text{由已知, } f(x)_{\max} = \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \right| = 1$$

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{解得, } k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}).$$

故选：A.

【点睛】

本题考查求正弦型函数的单调区间，涉及到恒成立问题，考查学生转化与化归的思想，是一道中档题.

3、D

【解析】

由题意得 $1 = m^2 + n^2 + 2mn \cos \angle AOB$ ，再利用基本不等式即可求解.

【详解】

$$\text{将 } \vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB} \text{ 平方得 } 1 = m^2 + n^2 + 2mn \cos \angle AOB,$$

$$\cos \angle AOB = \frac{1-m^2-n^2}{2mn} = \frac{1-(m+n)^2+2mn}{2mn} = -\frac{3}{2mn} + 1 \leq -\frac{3}{2 \times (\frac{m+n}{2})^2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

(当且仅当 $m=n=1$ 时等号成立),

Q $0 < \angle AOB < \pi$,

$\therefore \angle AOB$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$,

故选: D.

【点睛】

本题主要考查平面向量数量积的应用, 考查基本不等式的应用, 属于中档题.

4、A

【解析】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 再利用基本量法与题中给的条件列式求解首项与公差, 进而求得 $a_3 + a_4$ 即可.

【详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 由 $\begin{cases} a_5 = 7, \\ a_{10} + a_7 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1 + 4d = 7, \\ a_1 + 9d + a_1 + 6d = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 15, \\ d = -2 \end{cases}$. 所以

$$a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 2 \times 15 + 5 \times (-2) = 20.$$

故选: A

【点睛】

本题主要考查了等差数列的基本量求解, 属于基础题.

5、B

【解析】

由已知条件利用诱导公式得 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 再利用三角函数的平方关系和象限角的符号, 即可得到答案.

【详解】

由题意得 $\tan(\alpha - \pi) = \tan \alpha = -\frac{3}{4}$,

又 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 所以 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos \alpha < 0, \sin \alpha > 0$, 结合 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 解得 $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$,

$$\text{所以 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{5},$$

故选 B.

【点睛】

本题考查三角函数的诱导公式、同角三角函数的平方关系以及三角函数的符号与位置关系，属于基础题.

6、D

【解析】

依题意，设 $z = a + bi$ ，由 $|z - 3| = 2$ ，得 $(a - 3)^2 + b^2 = 4$ ，再一一验证.

【详解】

设 $z = a + bi$ ，

因为 $|z - 3| = 2$ ，

所以 $(a - 3)^2 + b^2 = 4$ ，

经验证 $M(4, 1)$ 不满足，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了复数的概念、复数的几何意义，还考查了推理论证能力，属于基础题.

7、C

【解析】

根据等差数列和等比数列的定义进行判断即可.

【详解】

A：当 $k = 0, t = a$ 时， $a_{n+1} = a$ ，显然符合 $\{a_n\}$ 是等差数列，但是此时 $k = 1$ 不成立，故本说法不正确；

B：当 $k = 0, t = a$ 时， $a_{n+1} = a$ ，显然符合 $\{a_n\}$ 是等比数列，但是此时 $t = 0$ 不成立，故本说法不正确；

C：当 $k = 1$ 时，因此有 $a_{n+1} - a_n = ka_n + t - a_n = t = \text{常数}$ ，因此 $\{a_n\}$ 是等差数列，因此当 $\{a_n\}$ 不是等差数列时，一定有 $k \neq 1$ ，故本说法正确；

D：当 $t = a \neq 0$ 时，若 $k = 0$ 时，显然数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，故本说法不正确.

故选：C

【点睛】

本题考查了等差数列和等比数列的定义，考查了推理论证能力，属于基础题.

8、B

【解析】

设正项等比数列的公比为 q ，运用等比数列的通项公式和等差数列的性质，求出公比，再由等比数列的求和公式，计算即可得到所求.

【详解】

设正项等比数列的公比为 q ,

则 $a_4=16q^3$, $a_7=16q^6$,

a_4 与 a_7 的等差中项为 $\frac{9}{8}$,

即有 $a_4+a_7=\frac{9}{4}$,

即 $16q^3+16q^6=\frac{9}{4}$,

解得 $q=\frac{1}{2}$ (负值舍去),

则有 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{16\times\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1$.

故选 C.

【点睛】

本题考查等比数列的通项和求和公式的运用, 同时考查等差数列的性质, 考查运算能力, 属于中档题.

9、B

【解析】

先用定积分求得阴影部分一半的面积, 再根据几何概型概率公式可求得.

【详解】

根据题意, 阴影部分的面积的一半为: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x) dx = \sqrt{2} - 1$,

于是此点取自阴影部分的概率为 $P_1 = 2 \times \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\pi} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{\pi} > \frac{4(1.4-1)}{3.2} = \frac{1}{2}$.

又 $P_2 = 1 - P_1 < \frac{1}{2}$, 故 $P_1 > P_2$.

故选 B.

【点睛】

本题考查了几何概型, 定积分的计算以及几何意义, 属于中档题.

10、D

【解析】

由已知等式求出 z , 再由共轭复数的概念求得 $\bar{z}$, 即可得 $\bar{z}$ 的虚部.

【详解】

由 $zi=1-i$, $\therefore z=\frac{1-i}{i}=\frac{-i(1-i)}{i\cdot(-i)}=-1-i$, 所以共轭复数 $\bar{z}=-1+i$, 虚部为 1

故选 D.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算和共轭复数的基本概念, 属于基础题.

11、D

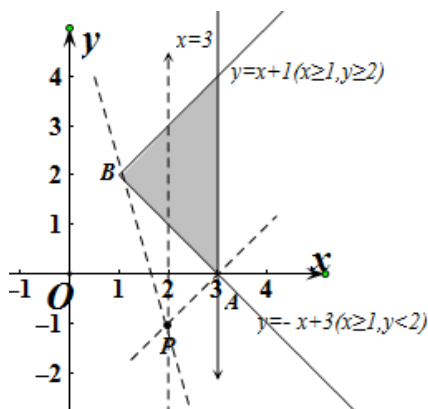
【解析】

画出曲线 $\rho = |\rho - 2| + 1$ 与 $\rho = 3$ 围成的封闭区域, $\frac{\rho+1}{\rho-2}$ 表示封闭区域内的点 (ρ, ρ) 和定点 $(2, -1)$ 连线的斜率, 然后结合

图形求解可得所求范围.

【详解】

画出曲线 $\rho = |\rho - 2| + 1$ 与 $\rho = 3$ 围成的封闭区域, 如图阴影部分所示.



$\frac{\rho+1}{\rho-2}$ 表示封闭区域内的点 (ρ, ρ) 和定点 $\rho(2, -1)$ 连线的斜率,

设 $\rho = \frac{\rho+1}{\rho-2}$, 结合图形可得 $\rho \geq \rho_{AA}$ 或 $\rho \leq \rho_{BB}$,

由题意得点 A,B 的坐标分别为 $\rho(3,0)$, $\rho(1,2)$,

$$\therefore \rho_{AA} = \frac{1}{3-2} = 1, \rho_{BB} = \frac{2-(-1)}{1-2} = -3,$$

$$\therefore \rho \geq 1 \text{ 或 } \rho \leq -3,$$

$\therefore \frac{\rho+1}{\rho-2}$ 的取值范围为 $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

故选 D.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/068054022030006134>