高等数学（同济大学数学系 第七版）上册

第六章：定积分的应用课后习题答案

习题 6－2 定积分在几何学上的应用

1. 求图 6－1 中各阴影部分的面积：

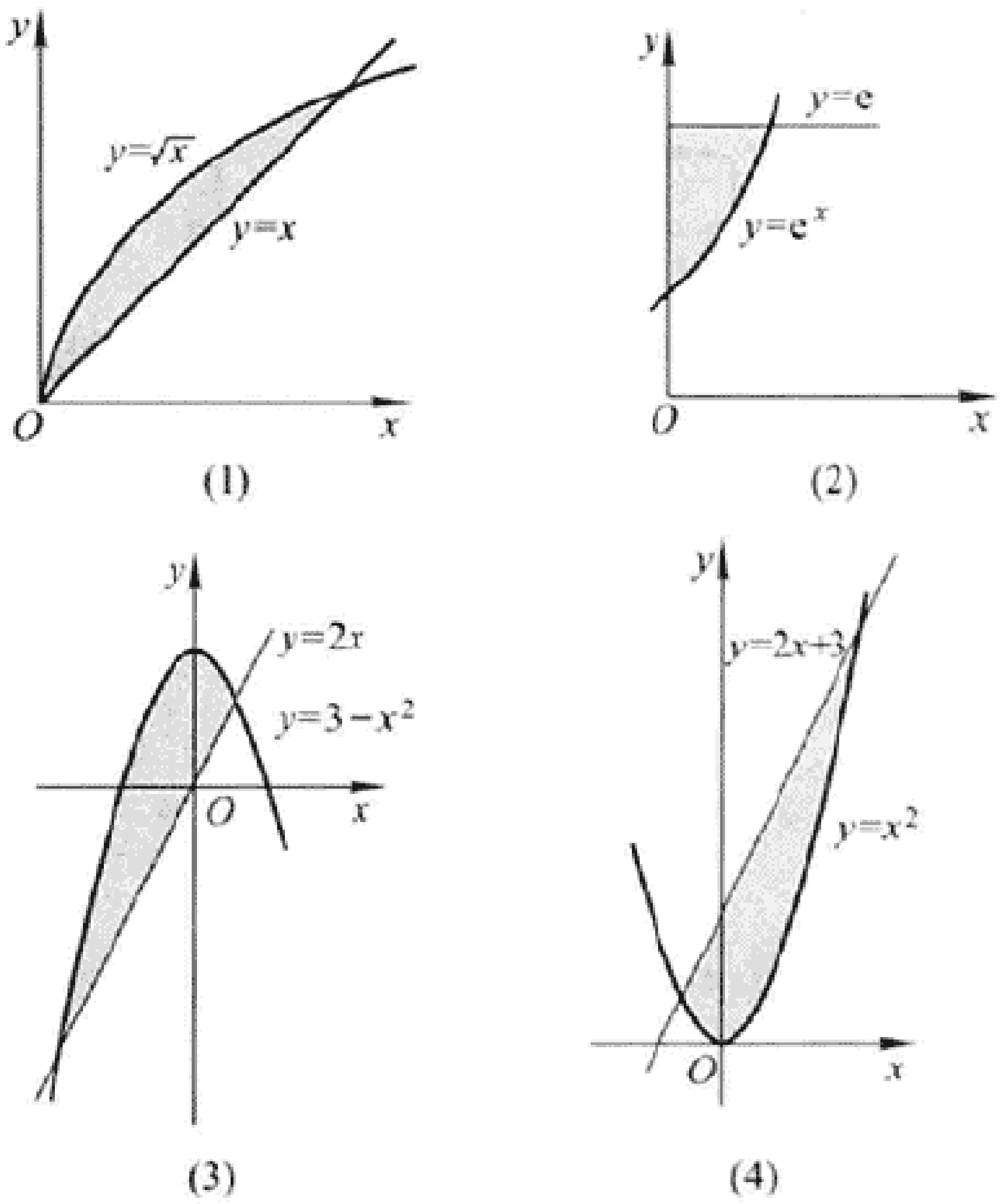

图 6－1

解 （1）解方程组 $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x, \end{cases}$ 得到交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

如果取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $\sqrt{x}-x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

如果取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $y-y^2$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(y-y^2)\,\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

（2）取 x 为积分变量，则易知 x 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{e}-\mathrm{e}^x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=[\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x]_0^1=1.$$

如果取 y 为积分变量，则易知 y 的变化范围为 $[1,\mathrm{e}]$，相应于 $[1,\mathrm{e}]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $\ln y$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\mathrm{d}y=[y\ln y]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

（3）解方程组 $\begin{cases}y=2x,\\y=3-x^2,\end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-3,-6)$ 和 $(1,2)$.

如果取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-3,1]$，相应于 $[-3,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $(3-x^2)-2x=-x^2-2x+3$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{-3}^1(-x^2-2x+3)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^1=\frac{32}{3}.$$

如果用 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[-6,3]$，但是在 $[-6,2]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $\frac{y}{2}-(-\sqrt{3-y})=\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}$ 的窄矩形的面积，在 $[2,3]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为 $\sqrt{3-y}-(-\sqrt{3-y})=2\sqrt{3-y}$ 的窄矩形的面积，因此有

$$\begin{aligned}A&=\int_{-6}^2\left(\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}\right)\mathrm{d}y+\int_2^3 2\sqrt{3-y}\mathrm{d}y\\&=\left[\frac{y^2}{4}-\frac{2}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-6}^2+\left[-\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3=\frac{32}{3},\end{aligned}$$

从这里可看到本小题以 x 为积分变量较容易做. 原因是本小题中的图形边界曲线，若分为上下两段的话，则为 $y=2x$ 和 $y=3-x^2$；而分为左右两段的话，则为 $x=-\sqrt{3-y}$ 和 $x=\begin{cases}\dfrac{y}{2}, & -6\leqslant y<2,\\\sqrt{3-y}, & 2\leqslant y\leqslant 3,\end{cases}$ 其中右段曲线的表示相对比较复杂，也就导致计算形式复杂.

（4）解方程组 $\begin{cases}y=2x+3,\\y=x^2,\end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-1,1)$ 和 $(3,9)$，与(3)相同的原因，本小题以 x 为积分变量计算较容易. 取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-1,3]$，相应于 $[-1,3]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $2x+3-x^2$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\mathrm{d}x=\left[x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$(两部分都要计算)；

(2) $y=\frac{1}{x}$与直线 $y=x$ 及 $x=2$；

(3) $y=\mathrm{e}^x, y=\mathrm{e}^{-x}$与直线 $x=1$；

(4) $y=\ln x$, y 轴与直线 $y=\ln a, y=\ln b(b>a>0)$.

解　(1) 如图 6-2，先计算图形 D_1(阴影部分)的面积，容易求得 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$ 的交点为$(-2,2)$和$(2,2)$. 取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为$[-2,2]$，相应于$[-2,2]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为$\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\left[\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=2\pi+\frac{4}{3},$$

图形 D_2 的面积为

$$A_2=\pi(2\sqrt{2})^2-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

(2) 如图 6-3，取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为$[1,2]$，相应于$[1,2]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为 $x-\frac{1}{x}$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln x\right]_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

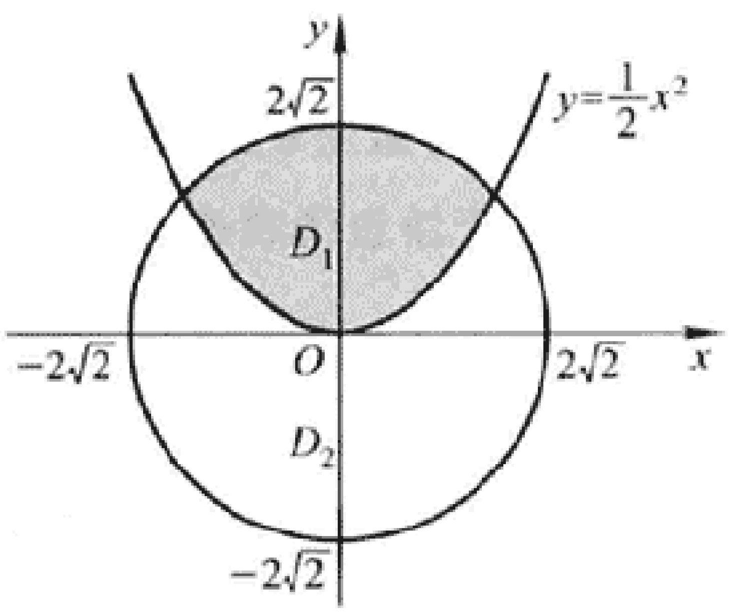

图 6-2

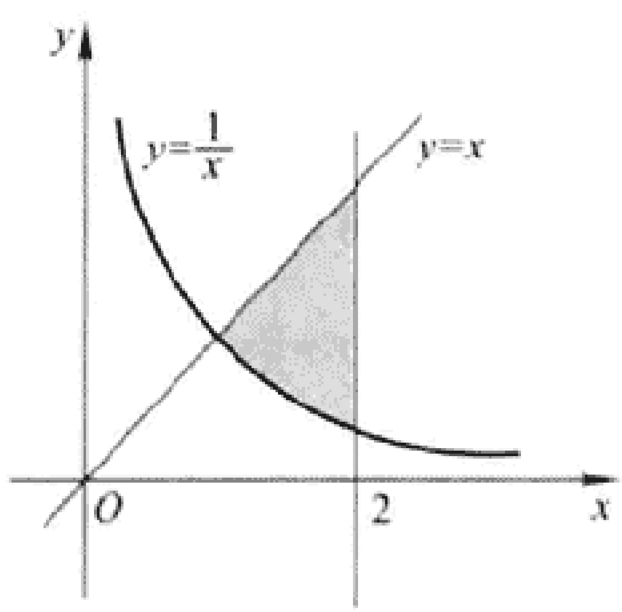

图 6-3

(3) 如图 6－4,取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为 $[0,1]$,相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+dx]$ 的窄条面积近似于高为 e^x-e^{-x}、底为 dx 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=e+\frac{1}{e}-2.$$

(4) 如图 6－5,取 y 为积分变量,则 y 的变化范围为 $[\ln a,\ln b]$,相应于 $[\ln a,\ln b]$ 上的任一小区间 $[y,y+dy]$ 的窄条面积近似于高为 dy、底为 e^y 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b}e^y dy=[e^y]_{\ln a}^{\ln b}=b-a.$$

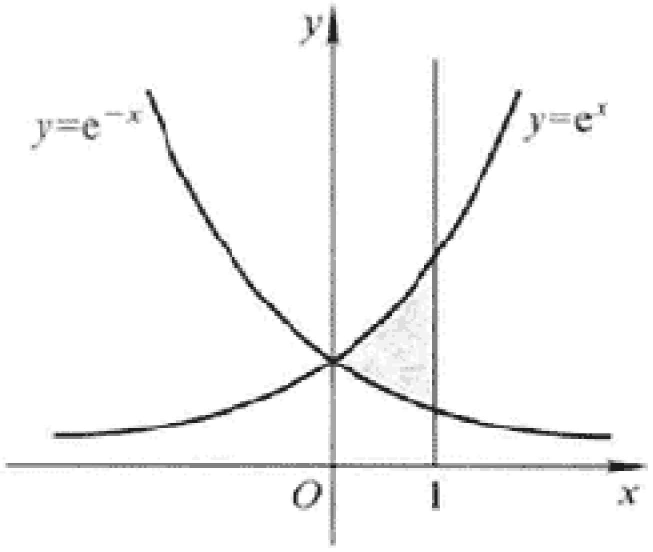

图 6－4

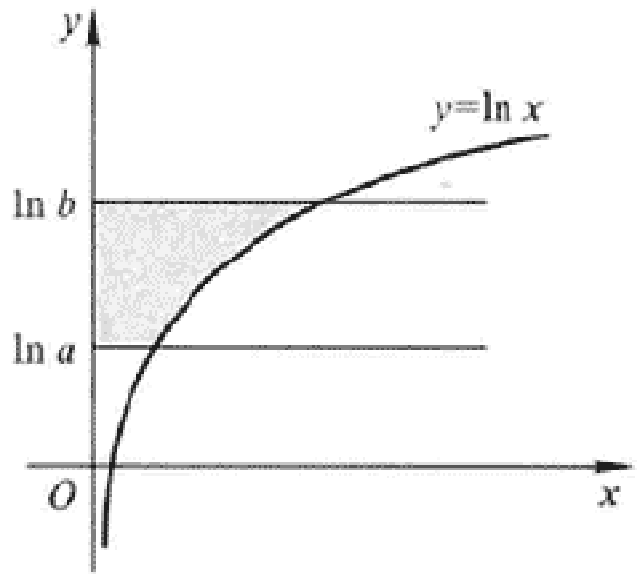

图 6－5

3. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

解 首先求得导数 $y'\big|_{x=0}=4$, $y'\big|_{x=3}=-2$,故抛物线在点 $(0,-3)$, $(3,0)$ 处的切线分别为 $y=4x-3$, $y=-2x+6$,容易求得这两条切线交点为 $\left(\frac{3}{2},3\right)$(如图 6－6),因此所求面积为

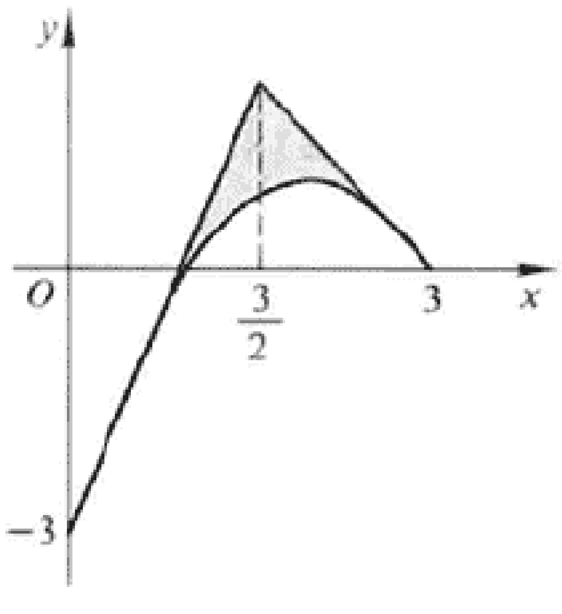

图 6－6

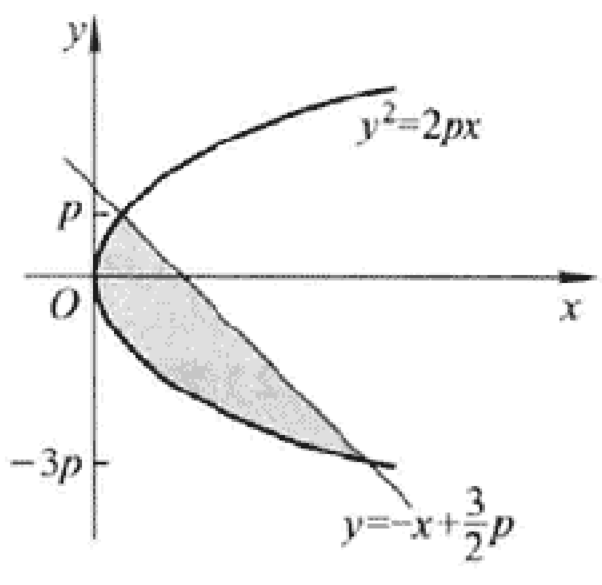

图 6－7

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]dx+\int_{\frac{3}{2}}^3[-2x+6-(-x^2+4x-3)]dx$$

$$=\frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\frac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

解 利用隐函数求导方法,抛物线方程 $y^2=2px$ 两端分别对 x 求导,得

$$2yy'=2p,$$

即得 $y'\Big|_{\left(\frac{p}{2},p\right)}=1$,故法线斜率为 $k=-1$,从而得到法线方程为 $y=-x+\frac{3}{2}p$(如图 6-7),因此所求面积为

$$A=\int_{-3p}^{p}\left(-y+\frac{3}{2}p-\frac{1}{2p}y^2\right)\mathrm{d}y=\left[-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}py-\frac{1}{6p}y^3\right]_{-3p}^{p}=\frac{16}{3}p^2.$$

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $\rho=2a\cos\theta$; (2) $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$;

(3) $\rho=2a(2+\cos\theta)$.

解 (1) $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi a^2.$

(2) 由对称性可知,所求面积为第一象限部分面积的 4 倍,记曲线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$ 上的点为 (x,y),因此

$$A=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left[a\sin^3t\cdot3a\cos^2t(-\sin t)\right]\mathrm{d}t$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

注 对于参数方程的处理方式一般可采用本题的方法,首先根据问题化为积分(其中记曲线上的点为 (x,y)),再根据参数方程进行换元,即可化为关于参数的积分进行计算.

(3) $A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[2a(2+\cos\theta)]^2\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{2\pi}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$

$$=2a^2\int_0^{2\pi}(4+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=18\pi a^2.$$

6. 求由摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与横轴所围成的图形的面积.

解 本题做法与题 5(2) 类似. 以 x 为积分变量,则 x 的变化范围为 $[0,2\pi a]$,设摆线上的点为 (x,y),则所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x,$$

再根据参数方程换元,令 $x=a(t-\sin t)$,则 $y=a(1-\cos t)$,因此有

$$A=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2t)\mathrm{d}t$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 t)\,dt=3\pi a^2.$$

7. 求对数螺线 $\rho=ae^{\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

解 $A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(ae^{\theta})^2\,d\theta=\frac{a^2}{4}[e^{2\theta}]_{-\pi}^{\pi}=\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi}).$

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积：

(1) $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$;

(2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos 2\theta$.

解 (1) 首先求出两曲线交点为 $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$、$\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$，由于图形关于极轴的对称性(如图 6-8)，因此所求面积为极轴上面部分面积的 2 倍，即得

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\,d\theta\right]=\frac{5\pi}{4}.$$

(2) 首先求出两曲线交点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$，由于图形的对称性(如图 6-9)，因此有

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\,d\theta\right]=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

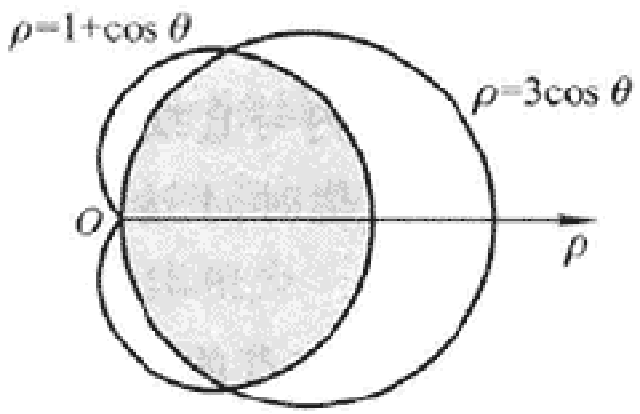

图 6-8

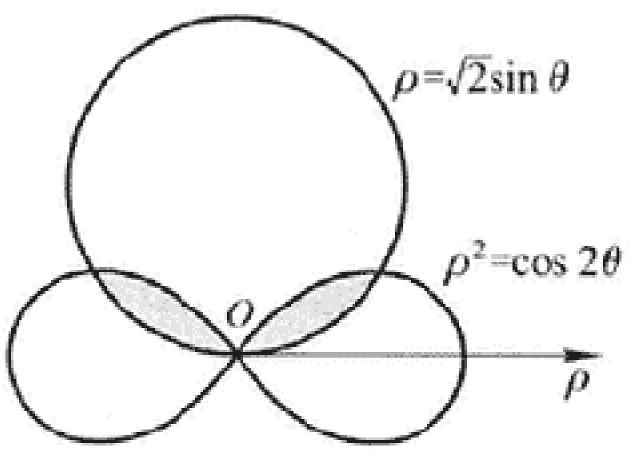

图 6-9

9. 求位于曲线 $y=e^x$ 下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

解 先求曲线过原点的切线方程，设切点为 (x_0,y_0)，其中 $y_0=e^{x_0}$，则切线的斜率为 e^{x_0}，故切线方程为

$$y-y_0=e^{x_0}(x-x_0),$$

由于该切线过原点，因此有 $y_0=e^{x_0}x_0$，解得 $x_0=1$，$y_0=e$，即切线方程为

$$y=ex.$$

如图 6-10 可知所求面积为

$$A=\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx+\int_0^1(e^x-ex)\,dx$$

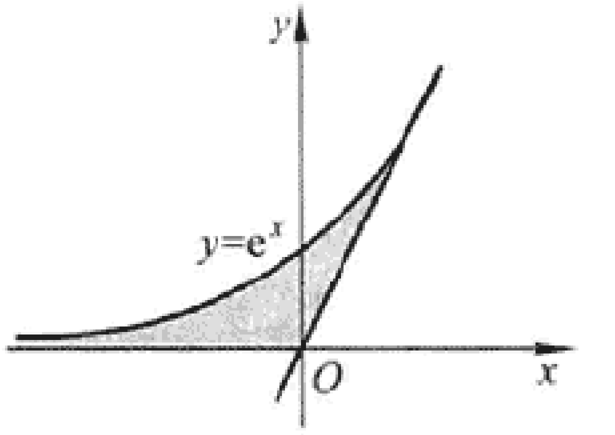

图 6－10

$$=\left[e^x\right]_{-\infty}^{0}+\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}.$$

10. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

解　抛物线的焦点为 $(a,0)$,设过焦点的直线为 $y=k(x-a)$,则该直线与抛物线的交点的纵坐标为 $y_1=\dfrac{2a-2a\sqrt{1+k^2}}{k}$,$y_2=\dfrac{2a+2a\sqrt{1+k^2}}{k}$,面积为

$$A=\int_{y_1}^{y_2}\left(a+\frac{y}{k}-\frac{y^2}{4a}\right)dy=a(y_2-y_1)+\frac{y_2^2-y_1^2}{2k}-\frac{y_2^3-y_1^3}{12a}$$

$$=\frac{8a^2(1+k^2)^{3/2}}{3k^3}=\frac{8a^2}{3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{3/2},$$

故面积是 k 的单调减少函数,因此其最小值在 $k\to\infty$ 即弦为 $x=a$ 时取到,最小值为 $\dfrac{8}{3}a^2$.

11. 已知抛物线 $y=px^2+qx$(其中 $p<0,q>0$)在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切,且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A. 问 p 和 q 为何值时,A 达到最大值,并求出此最大值.

解　依题意知,抛物线如图 6－11 所示,求得它与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=0$,$x_2=-\dfrac{q}{p}$.

抛物线与 x 轴所围成的图形面积为

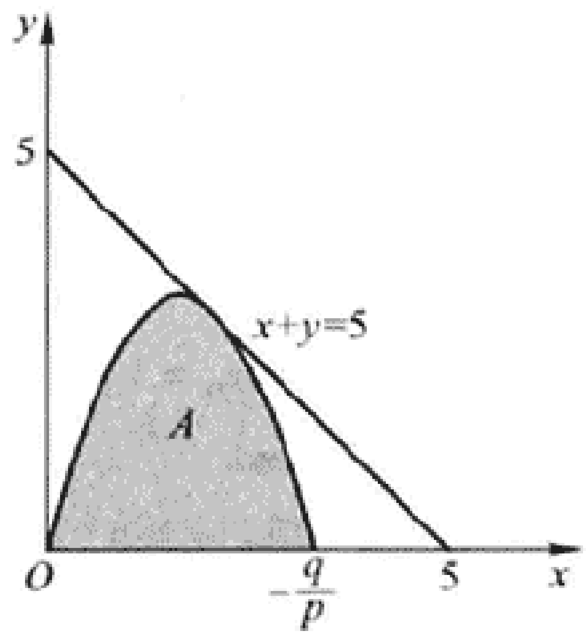

图 6－11

$$A = \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx)\mathrm{d}x = \left[\frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2\right]_0^{-\frac{q}{p}} = \frac{q^3}{6p^2}.$$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切,故它们有惟一交点.由方程组

$$\begin{cases} x+y=5, \\ y=px^2+qx, \end{cases}$$

得 $px^2+(q+1)x-5=0$,其判别式 $\Delta=(q+1)^2+20p=0$,解得 $p=-\frac{1}{20}(1+q)^2$,代入面积 A,得

$$A(q)=\frac{200q^3}{3(1+q)^4}.$$

令 $A'(q)=\frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}=0$,得惟一驻点 $q=3$.当 $0<q<3$ 时,$A'(q)>0$,当 $q>3$ 时,$A'(q)<0$.于是,当 $q=3$ 时,$A(q)$ 取极大值,也是最大值.此时 $p=-\frac{4}{5}$,最大值 $A=\frac{225}{32}$.

12. 由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形,分别绕 x 轴及 y 轴旋转,计算所得两个旋转体的体积.

解　(1) 图形绕 x 轴旋转,该体积为

$$V=\int_0^2 \pi(x^3)^2\mathrm{d}x=\frac{128}{7}\pi.$$

(2) 图形绕 y 轴旋转,则该立体可看作圆柱体(即由 $x=2, y=8, x=0, y=0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体)减去由曲线 $x=\sqrt[3]{y}, y=8, x=0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体,因此体积为

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 8-\int_0^8 \pi(\sqrt[3]{y})^2\mathrm{d}y=\frac{64}{5}\pi.$$

13. 把星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转,计算所得旋转体的体积.

解　记 x 轴上方部分星形线的函数为 $y=y(x)$,则所求体积为曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成,故有

$$V=\int_{-a}^{a} \pi y^2\mathrm{d}x.$$

由于星形线的参数方程为 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$,所以对上述积分作换元 $x=a\cos^3 t$,便得

$$V=\int_{\pi}^{0} \pi(a\sin^3 t)^2(a\cos^3 t)'\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

14. 用积分方法证明图 6-12 中球缺的体积为

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

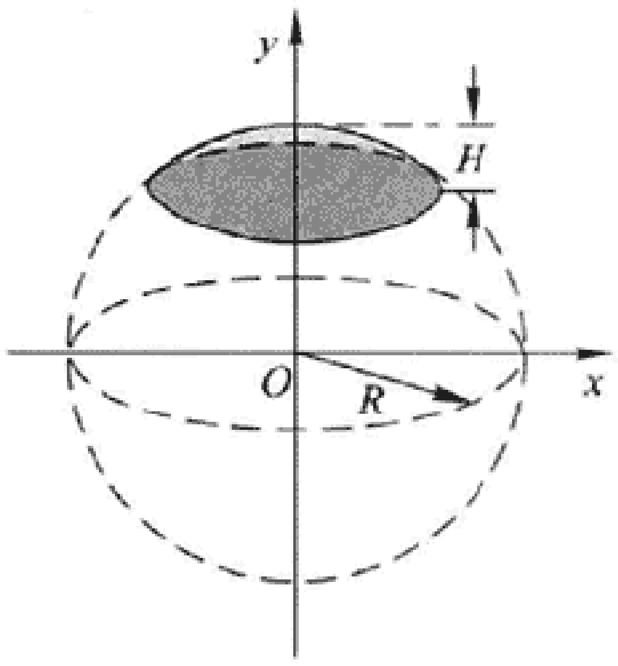

图 6 - 12

解　该立体可看作由曲线 $x=\sqrt{R^2-y^2}$, $y=R-H$ 和 $x=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得,因此体积为

$$V=\int_{R-H}^{R}\pi(\sqrt{R^2-y^2})^2\mathrm{d}y=\pi\left[R^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{R-H}^{R}$$
$$=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

15. 求下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y=x^2$, $x=y^2$,绕 y 轴;

(2) $y=\arcsin x$, $x=1$, $y=0$,绕 x 轴;

(3) $x^2+(y-5)^2=16$,绕 x 轴;

(4) 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱, $y=0$,绕直线 $y=2a$.

解　(1) $V=\int_0^1[\pi(\sqrt{y})^2-\pi(y^2)^2]\mathrm{d}y=\frac{3}{10}\pi.$

(2) $$V=\int_0^1\pi(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=[\pi x(\arcsin x)^2]_0^1-2\pi\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\left\{[-\sqrt{1-x^2}\arcsin x]_0^1+\int_0^1\mathrm{d}x\right\}=\frac{\pi^3}{4}-2\pi.$$

(3) 该立体为由曲线 $y=5+\sqrt{16-x^2}$, $x=-4$, $x=4$, $y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体减去由曲线 $y=5-\sqrt{16-x^2}$, $x=-4$, $x=4$, $y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体,因此体积为

$$V=\int_{-4}^{4}\pi(5+\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_{-4}^{4}\pi(5-\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-4}^{4}20\pi\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{x=4\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}320\pi\cos^2t\mathrm{d}t=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=160\pi^2.$$

（4）该立体可看作由直线 $y=2a, y=0, x=0, x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的圆柱体减去由摆线以及直线 $y=2a, x=0, x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的立体，记摆线上的点为 (x,y)，则体积为

$$V=\pi(2a)^2(2\pi a)-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x,$$

再根据摆线的参数方程进行换元，即作换元 $x=a(t-\sin t)$，此时 $y=a(1-\cos t)$，因此有

$$\begin{aligned}V&=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi[2a-a(1-\cos t)]^2a(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t\\&=8\pi^2a^3-4\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.\end{aligned}$$

16. 求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

解　记由曲线 $x=\sqrt{a^2-y^2}, x=-b, y=-a, y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_1，由曲线 $x=-\sqrt{a^2-y^2}, x=-b, y=-a, y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_2，则所求体积为

$$\begin{aligned}V&=V_1-V_2=\int_{-a}^{a}\pi(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}\pi(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{y=a\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi a^2b\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=8\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\pi^2a^2b.\end{aligned}$$

17. 设有一截锥体，其高为 h，上、下底均为椭圆，椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$ 和 $2A$、$2B$，求这截锥体的体积.

解　用与下底相距 x 且平行于底面的平面去截该立体得到一个椭圆，记其半轴长分别为 u、v，则

$$u=\frac{a-A}{h}x+A,\quad v=\frac{b-B}{h}x+B,$$

该椭圆面积为 $\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)$，因此体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^h\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA].\end{aligned}$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积（图 6 - 13）.

解　以 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-R,R]$，相应的截面等边三角形边长为

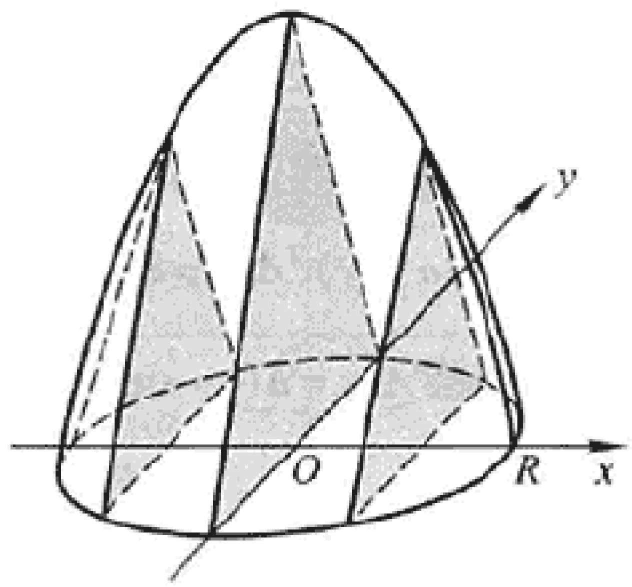

图 6－13

$2\sqrt{R^2-x^2}$,面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{R^2-x^2})^2=\sqrt{3}(R^2-x^2)$,因此体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

19. 证明:由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

证　取横坐标 x 为积分变量,与区间$[a,b]$上任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$相应的窄条图形绕 y 轴旋转所成的旋转体近似于一圆柱壳,柱壳的高为 $f(x)$,厚为 $\mathrm{d}x$,底面圆周长为 $2\pi x$,故其体积近似等于 $2\pi xf(x)\mathrm{d}x$,从而由元素法即得结论.

20. 利用题 19 的结论,计算曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解　$V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\pi^2\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2.$

注　在计算积分时,这里利用了教材第五章第三节中的例 6 的结论 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$

21. 设由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_1,由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_2,其中$0<a<2$(图 6－14).

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1,D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当 a 为何值时,V_1+V_2 取得最大值? 试求此最大值.

解　(1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$;

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(2) 设

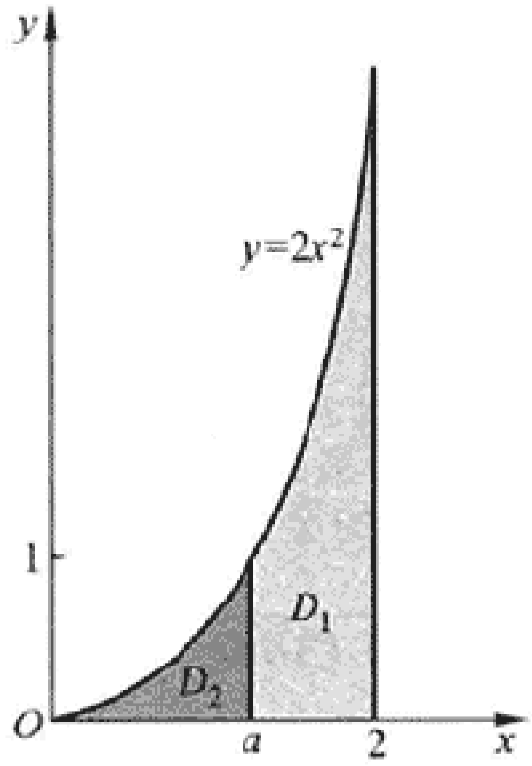

图 6－14

$$V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4,$$

由 $V'=4\pi a^3(1-a)=0$，解得区间 $(0,2)$ 内惟一驻点 $a=1$.

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$；当 $a>1$ 时，$V'<0$. 因此 $a=1$ 是极大值点也是最大值点，此时 V_1+V_2 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

22. 计算曲线 $y=\ln x$ 相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

解　$$s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sqrt{u^2-1}} \int_2^3\frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u$$
$$=\left[u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

23. 计算半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

解　联立两个方程 $\begin{cases}y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3,\\ y^2=\frac{x}{3},\end{cases}$ 得到两条曲线的交点为 $\left(2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 和 $\left(2,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$，由于曲线关于 x 轴对称，因此所求弧段长为第一象限部分的 2 倍，第一象限部分弧段为 $y=\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^3}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$，$y'=\sqrt{\frac{3}{2}(x-1)}$，故所求弧的长度为

$$s=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}\mathrm{d}x=\sqrt{6}\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

24. 计算抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x,y)$ 的弧长.

解　不妨设 $p>0$，由于顶点到 (x,y) 的弧长与顶点到 $(x,-y)$ 的弧长相等，因此不妨设 $y>0$，故有

$$s=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p^2\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})\right]_0^y$$

$$=\frac{1}{2p}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}.$$

25. 计算星形线 $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t$ 的全长.

解 $s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2t\sin t)^2+(3a\sin^2t\cos t)^2}\,dt$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=6a.$$

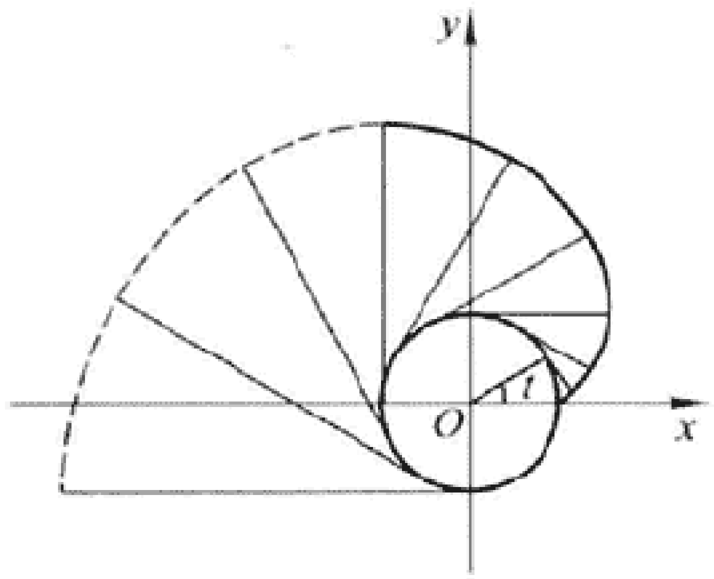

图 6 - 15

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直,使细线与圆周始终相切(图6 - 15),细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线,它的方程为

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t).$$

算出这曲线上相应于 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 的一段弧的长度.

解 $\frac{dx}{dt}=at\cos t, \frac{dy}{dt}=at\sin t$,因此有

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}at\,dt=\frac{a}{2}\pi^2.$$

27. 在摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1:3 的点的坐标.

解 对应于摆线第一拱的参数 t 的范围为 $[0,2\pi]$,参数 t 在范围 $[0,t_0]$ 时摆线的长度为

$$s_0=\int_0^{t_0}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2t}\,dt=a\int_0^{t_0}2\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right),$$

当 $t_0=2\pi$ 时,长度为 $8a$,故所求点对应的参数 t_0 满足 $4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right)=\frac{8a}{4}$,解得