

## 新疆维吾尔自治区乌鲁木齐市第十中学 2024 年数学高三上期末复习检测模拟试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. “ $b=2$ ”是“函数  $f(x)=(2b^2-3b-1)x^\alpha$  ( $\alpha$  为常数) 为幂函数”的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                              D. 既不充分又不必要条件

2. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数 (即质数) 的和”，如  $16=5+11$ ， $30=7+23$ . 在不超过 20 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 20 的概率是 ( )

- A.  $\frac{1}{14}$                       B.  $\frac{1}{12}$                       C.  $\frac{3}{28}$                       D. 以上都不对

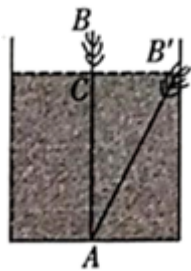
3. 设  $O$  为坐标原点， $P$  是以  $F$  为焦点的抛物线  $y^2=4x$  上任意一点， $M$  是线段  $PF$  上的点，且  $PM=MF$ ，则直线  $OM$  的斜率的最大值为 ( )

- A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. 对两个变量进行回归分析，给出如下一组样本数据： $(0.675, -0.989)$ ， $(1.102, -0.010)$ ， $(2.899, 1.024)$ ， $(9.101, 2.978)$ ，下列函数模型中拟合较好的是 ( )

- A.  $y=3x$                       B.  $y=3^x$                       C.  $y=-(x-1)^2$                       D.  $y=\log_3 x$

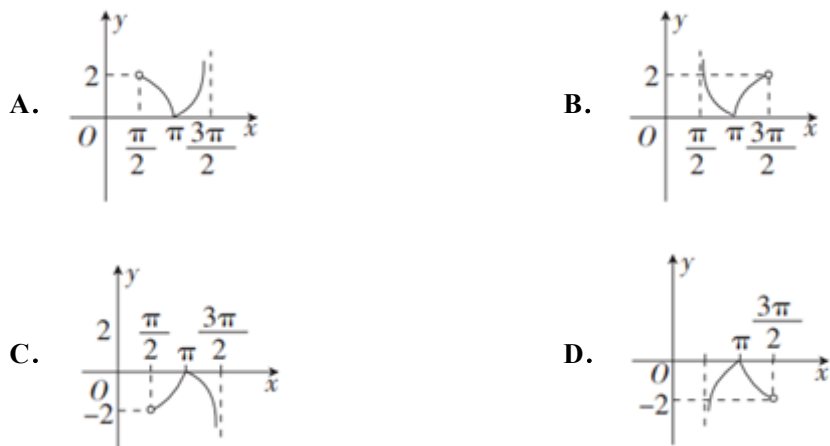
5. 《九章算术》勾股章有一“引葭赴岸”问题“今有饼池径丈，葭生其中，出水两尺，引葭赴岸，适与岸齐，问水深，葭各几何？”，其意思是：有一个直径为一丈的圆柱形水池，池中心生有一颗类似芦苇的植物，露出水面两尺，若把它引向岸边，正好与岸边齐，问水有多深，该植物有多高？其中一丈等于十尺，如图若从该葭上随机取一点，则该点取自水下的概率为 ( )



- A.  $\frac{12}{13}$       B.  $\frac{13}{14}$       C.  $\frac{21}{29}$       D.  $\frac{14}{15}$

6. 已知函数  $f(x) = 2 \tan(\omega x)$  ( $\omega > 0$ ) 的图象与直线  $y = 2$  的相邻交点间的距离为  $\pi$ ，若定义  $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$ ,

则函数  $h(x) = \max\{f(x), f(x) \cos x\}$  在区间  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  内的图象是( )



7. 已知复数  $z$  满足  $|z| = 1$ ，则  $|z + 2 - i|$  的最大值为 ( )

- A.  $2 + 3$       B.  $1 + \sqrt{5}$       C.  $2 + \sqrt{5}$       D.  $6$

8. 若  $0 < a < b < 1$ ，则  $a^b$ ，  $b^a$ ，  $\log_b a$ ，  $\log_{\frac{1}{a}} b$  的大小关系为 ( )

- A.  $a^b > b^a > \log_b a > \log_{\frac{1}{a}} b$       B.  $b^a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b > \log_b a$
- C.  $\log_b a > a^b > b^a > \log_{\frac{1}{a}} b$       D.  $\log_b a > b^a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b$

9. 已知双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ) 的渐近线方程为  $\sqrt{3}x \pm y = 0$ ，则  $b =$  ( )

- A.  $2\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $4\sqrt{3}$

10.

《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土,这是我国现存最早的有系统的数学典籍.其中记载有求“囷盖”的术:“置如其周,令相承也.又以高乘之,三十六成一”.该术相当于给出了由圆锥的底面周长 $L$ 与高 $h$ ,计算其体积 $V \approx \frac{1}{36}L^2h$ 的近似公式.它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率近似取为3.那么近似公式 $V \approx \frac{3}{112}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的圆周率近似取为( )

- A.  $\frac{22}{7}$       B.  $\frac{157}{50}$       C.  $\frac{28}{9}$       D.  $\frac{337}{115}$

11. 设 $F_1, F_2$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点,若双曲线右支上存在一点 $P$ ,使 $(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF_2}) \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$

( $O$ 为坐标原点),且 $\overrightarrow{PF_1} = \sqrt{3}\overrightarrow{PF_2}$ ,则双曲线的离心率为( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$       B.  $\sqrt{2}+1$       C.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$       D.  $\sqrt{3}+1$

12. 某市政府决定派遣8名干部(5男3女)分成两个小组,到该市甲、乙两个县去检查扶贫工作,若要求每组至少3人,且女干部不能单独成组,则不同的派遣方案共有( )种

- A. 240      B. 320      C. 180      D. 120

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知 $x > 0, y > 0, x + 3y = 5xy$ ,则 $x + 2y$ 的最小值是\_\_.

14. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2, AD = 1$ ,则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的值为\_\_\_\_\_.



15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^2 + \frac{a}{x} + \frac{1}{2}, & x < 0 \\ \ln x - x, & x > 0 \end{cases}$ ,若关于 $x$ 的方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 在定义域上有四个不同的解,则实数 $a$

的取值范围是\_\_\_\_\_.

16.  $(x+1)^4$ 的展开式中 $x^2$ 的系数为\_\_\_\_\_.

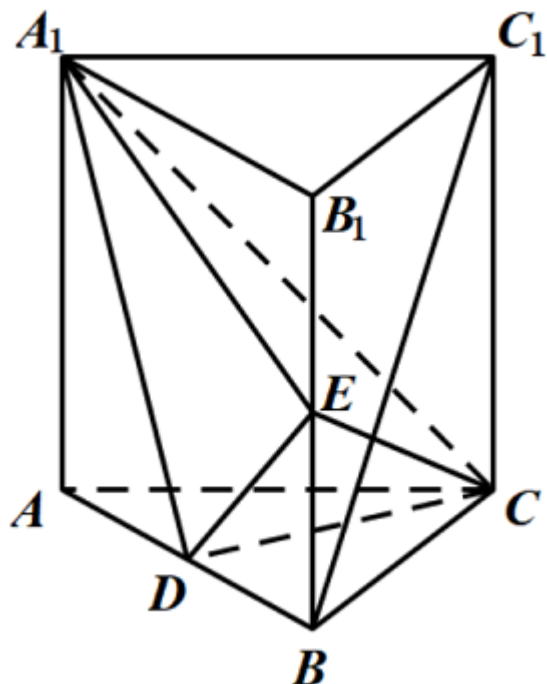
三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知函数 $f(x) = ax \ln x + b (a, b \text{ 为实数})$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$ .

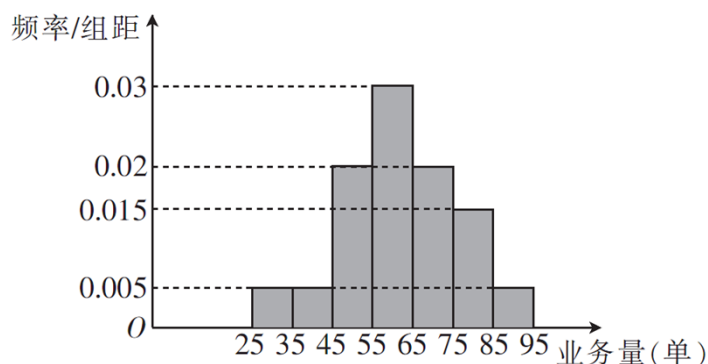
(1) 求实数 $a, b$ 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{f(x)+1}{x}$ ,证明 $g(x_1) = g(x_2) (x_1 < x_2)$ 时,  $x_1 + x_2 > 2$ .

18. (12 分) 如图, 直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $D, E$  分别是  $AB, BB_1$  的中点,  $AA_1 = AC = CB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \sqrt{2}$ .



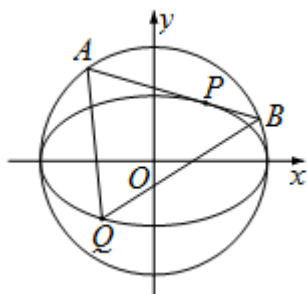
- (1) 证明:  $BC_1 \parallel$  平面  $A_1CD$ ;
- (2) 求二面角  $D-A_1C-E$  的余弦值.
19. (12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $(1, \frac{3}{2})$ , 过坐标原点  $O$  作两条互相垂直的射线与椭圆  $C$  分别交于  $M, N$  两点.
- (1) 证明: 当  $a^2 + 9b^2$  取得最小值时, 椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- (2) 若椭圆  $C$  的焦距为 2, 是否存在定圆与直线  $MN$  总相切? 若存在, 求定圆的方程; 若不存在, 请说明理由.
20. (12 分) 某大学开学期间, 该大学附近一家快餐店招聘外卖骑手, 该快餐店提供了两种日工资结算方案: 方案 (a) 规定每日底薪 100 元, 外卖业务每完成一单提成 2 元; 方案 (b) 规定每日底薪 150 元, 外卖业务的前 54 单没有提成, 从第 55 单开始, 每完成一单提成 5 元. 该快餐店记录了每天骑手的人均业务量, 现随机抽取 100 天的数据, 将样本数据分为  $[25, 35), [35, 45), [45, 55), [55, 65), [65, 75), [75, 85), [85, 95]$  七组, 整理得到如图所示的频率分布直方图.



- (1) 随机选取一天, 估计这一天该快餐店的骑手的人均日外卖业务量不少于 65 单的概率;
- (2) 从以往统计数据看, 新聘骑手选择日工资方案(a)的概率为  $\frac{1}{3}$ , 选择方案(b)的概率为  $\frac{2}{3}$ . 若甲、乙、丙、丁四名骑手分别到该快餐店应聘, 四人选择日工资方案相互独立, 求至少有两名骑手选择方案(a)的概率,
- (3) 若仅从人日均收入的角度考虑, 请你为新聘骑手做出日工资方案的选择, 并说明理由. (同组中的每个数据用该组区间的中点值代替)

21. (12 分) 已知直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  恰有一个公共点  $P$ ,  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = a^2$  相交于

$A, B$  两点.



- (I) 求  $k$  与  $m$  的关系式;
- (II) 点  $Q$  与点  $P$  关于坐标原点  $O$  对称. 若当  $k = -\frac{1}{2}$  时,  $\triangle QAB$  的面积取到最大值  $a^2$ , 求椭圆的离心率.

22. (10 分) 设函数  $f(x) = a \ln x + x^2 - (a+2)x$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$ .

- (I) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处切线的倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$ , 求  $a$  的值;
- (II) 已知导函数  $f'(x)$  在区间  $(1, e)$  上存在零点, 证明: 当  $x \in (1, e)$  时,  $f(x) > -e^2$ .

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据幂函数定义，求得  $b$  的值，结合充分条件与必要条件的概念即可判断.

【详解】

∵当函数  $f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^a$  为幂函数时， $2b^2 - 3b - 1 = 1$ ，

解得  $b = 2$  或  $-\frac{1}{2}$ ，

∴“ $b = 2$ ”是“函数  $f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^a$  为幂函数”的充分不必要条件.

故选：A.

【点睛】

本题考查了充分必要条件的概念和判断，幂函数定义的应用，属于基础题.

2、A

【解析】

首先确定不超过 20 的素数的个数，根据古典概型概率求解方法计算可得结果.

【详解】

不超过 20 的素数有 2，3，5，7，11，13，17，19，共 8 个，

从这 8 个素数中任选 2 个，有  $C_8^2 = 28$  种可能；

其中选取的两个数，其和等于 20 的有 (3,17)，(7,13)，共 2 种情况，

故随机选出两个不同的数，其和等于 20 的概率  $P = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$ .

故选：A.

【点睛】

本题考查古典概型概率问题的求解，属于基础题.

3、A

【解析】

设  $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0), M(x, y)$ ，因为  $PM = MF$ ，得到  $x = \frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}, y = \frac{y_0}{2}$ ，利用直线的斜率公式，得到





$$k_{OM} = \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}} = \frac{2}{\frac{p}{y_0} + \frac{y_0}{p}}, \text{ 结合基本不等式, 即可求解.}$$

【详解】

由题意, 抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点坐标为  $F(\frac{p}{2}, 0)$ ,

设  $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0), M(x, y)$ ,

因为  $PM = MF$ , 即  $M$  线段  $PF$  的中点, 所以  $x = \frac{1}{2}(\frac{p}{2} + \frac{y_0^2}{2p}) = \frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}, y = \frac{y_0}{2}$ ,

$$\text{所以直线 } OM \text{ 的斜率 } k_{OM} = \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}} = \frac{2}{\frac{p}{y_0} + \frac{y_0}{p}} \leq \frac{2}{2\sqrt{\frac{p}{y_0} \cdot \frac{y_0}{p}}} = 1,$$

当且仅当  $\frac{p}{y_0} = \frac{y_0}{p}$ , 即  $y_0 = p$  时等号成立,

所以直线  $OM$  的斜率的最大值为 1.

故选: A.

【点睛】

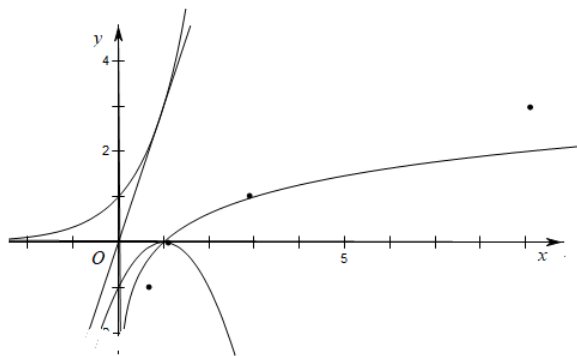
本题主要考查了抛物线的方程及其应用, 直线的斜率公式, 以及利用基本不等式求最值的应用, 着重考查了推理与运算能力, 属于中档试题.

4、D

【解析】

作出四个函数的图象及给出的四个点, 观察这四个点在靠近哪个曲线.

【详解】



如图, 作出 A, B, C, D 中四个函数图象, 同时描出题中的四个点, 它们在曲线  $y = \log_3 x$

的两侧，与其他三个曲线都离得很远，因此 D 是正确选项，

故选：D.

【点睛】

本题考查回归分析，拟合曲线包含或靠近样本数据的点越多，说明拟合效果好.

5、C

【解析】

由题意知： $BC=2$ ， $B'C=5$ ，设  $AC=x$ ，则  $AB=AB'=x+2$ ，在  $\text{Rt}\triangle ACB'$  中，列勾股方程可解得  $x$ ，然后由

$P=\frac{x}{x+2}$  得出答案.

【详解】

解：由题意知： $BC=2$ ， $B'C=5$ ，设  $AC=x$ ，则  $AB=AB'=x+2$

在  $\text{Rt}\triangle ACB'$  中，列勾股方程得： $5^2+x^2=(x+2)^2$ ，解得  $x=\frac{21}{4}$

所以从该葭上随机取一点，则该点取自水下的概率为  $P=\frac{x}{x+2}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{21}{4}+2}=\frac{21}{29}$

故选 C.

【点睛】

本题考查了几何概型中的长度型，属于基础题.

6、A

【解析】

由题知  $f(x)=2\tan(\omega x)(\omega>0)$ ，利用  $T=\frac{\pi}{|\omega|}$  求出  $\omega$ ，再根据题给定义，化简求出  $h(x)$  的解析式，结合正弦函数和

正切函数图象判断，即可得出答案.

【详解】

根据题意， $f(x)=2\tan(\omega x)(\omega>0)$  的图象与直线  $y=2$  的相邻交点间的距离为  $\pi$ ，

所以  $f(x)=2\tan(\omega x)(\omega>0)$  的周期为  $\pi$ ，则  $\omega=\frac{\pi}{T}=\frac{\pi}{\pi}=1$ ，

所以  $h(x)=\max\{2\tan x, 2\sin x\}=\begin{cases} 2\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 2\tan x, x\in\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$ ，

由正弦函数和正切函数图象可知 A 正确.

故选：A.

**【点睛】**

本题考查三角函数中正切函数的周期和图象，以及正弦函数的图象，解题关键是对新定义的理解.

7、B

**【解析】**

设  $z = a + bi, a, b \in R$ ， $|z + 2 - i| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$ ，利用复数几何意义计算.

**【详解】**

设  $z = a + bi, a, b \in R$ ，由已知， $a^2 + b^2 = 1$ ，所以点  $(a, b)$  在单位圆上，

而  $|z + 2 - i| = |(a+2) + (b-1)i| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$ ， $\sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$  表示点  $(a, b)$

到  $(-2, 1)$  的距离，故  $|z + 2 - i| \leq \sqrt{(-2)^2 + 1^2} + 1 = 1 + \sqrt{5}$ .

故选：B.

**【点睛】**

本题考查求复数模的最大值，其实本题可以利用不等式  $|z + 2 - i| \leq |z| + |2 - i|$  来解决.

8、D

**【解析】**

因为  $0 < a < b < 1$ ，所以  $1 > b^a > a^a > a^b > 0$ ，

因为  $\log_b a > \log_b b > 1$ ， $0 < a < 1$ ，所以  $\frac{1}{a} > 1$ ， $\log_{\frac{1}{a}} b < 0$ .

综上  $\log_b a > b^a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b$ ；故选 D.

9、A

**【解析】**

根据双曲线方程  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ )，确定焦点位置，再根据渐近线方程  $\sqrt{3}x \pm y = 0$  得到  $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$  求解.

**【详解】**

因为双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ )，

所以  $a = 2$ ，又因为渐近线方程为  $\sqrt{3}x \pm y = 0$ ，

所以  $\frac{b}{a} = \frac{b}{2} = \sqrt{3}$ ，

所以  $b = 2\sqrt{3}$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/068072134007006051>