（时间：120 分钟　　总分：150 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|x>-2,x\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-x-6\geq 0,x\in\mathbf{R}\right\}$，则下列关系中，正确的是（ ）

A．$A\subseteq B$　B．$\complement_{\mathbf{R}}A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$　C．$A\cap B=\varnothing$　D．$\complement_{\mathbf{R}}A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$

2．复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}$，则 z 的共轭复数的虚部为（ ）

A．$\dfrac{3}{2}i$　B．$\dfrac{3}{2}$　C．$\dfrac{1}{2}i$　D．$-\dfrac{1}{2}$

3．在等比数列$\{a_n\}$中，a_2，a_{10}是方程$x^2-6x+4=0$的两根，则$\dfrac{a_3a_9}{a_6}=$（　　　　）

A．2　　B．-2　　C．-2或2　　D．$3\pm\sqrt{5}$

4．白色污染是人们对难降解的塑料垃圾（多指塑料袋）污染环境现象的一种形象称谓，经过长期研究，一种全生物可降解塑料（简称 PBAT）逐渐被应用于超市购物袋、外卖包装盒等产品.研究表明，在微生物的作用下，PBAT 最终可被完全分解为二氧化碳和水进入大自然，当其分解率（$\text{分解率}=\dfrac{\text{已分解质量}}{\text{总质量}}\times 100\%$）超过 60%时，就会成为对环境无害的物质.为研究总质量为$100\mathrm{g}$的 PBAT 的已分解质量y（单位：g）与时间x（单位：月）之间的关系，某研究所人员每隔 1 个月测量 1 次 PBAT 的已分解质量，对通过实验获取的数据做计算处理，研究得出已分解质量y与时间x的函数关系式为$y=100-\mathrm{e}^{4.6-0.1x}$.据此研究结果可以推测，总质量为$100\mathrm{g}$的 PBAT 被分解为对环境无害的物质的时间至少为（　　　　）（参考数据：$\ln 40\approx 3.7$）

A．8 个月　　B．9 个月　　C．10 个月　　D．11 个月

5．下列不等关系成立的有（　　　　）

A．$0.8^{0.3}>0.9^{0.3}$　B．$1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$　C．$\log_2 3.4>\log_2 8.5$　D．$\log_{0.5}6>\log_{0.4}6$

6．已知$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c．设$\triangle ABC$的面积为S，且$\left(a^2-c^2\right)\sin A=2S$，则$\dfrac{b-c}{c\cos A}=$（　　　　）

A．1　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．-2

7．已知O是$\triangle ABC$所在平面内一点，若

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0},\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{ON},x,y$ 均为正数，则 xy 的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．1　　D．$\frac{4}{3}$

8．已知函数 $f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\left|\log_2 x\right|-1$，则不等式 $\dfrac{x-1}{f(-x)-2f(x)}\geq 0$ 的解集是（　　）

A．$\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B．$(-2,-1]\cup[1,2)$

C．$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D．$(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup[1,2)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列命题是真命题的是（　　）

A．不等式 $\frac{1}{x}>1$ 的解集为 $(0,1)$

B．函数 $y=x^2-2x-8$ 的零点是 $(-2,0)$ 和 $(4,0)$

C．$y=x-1+\dfrac{1}{x+1}(x>-1)$ 的最小值为 0

D．$x^2-3x+2<0$ 是 $x<2$ 成立的充分条件但不是必要条件

10．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=11n-n^2$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\{a_n\}$ 是递增数列　　B．$a_2=8$

C．数列 $\{S_n\}$ 的最大项为 S_5 和 S_6　　D．满足 $S_n>0$ 的最大的正整数 n 为 10

11．下列等式正确的是（　　）

A．$2\sqrt{1+\sin 4}+\sqrt{2+2\cos 4}=2\cos 2$　B．$(1+\tan 20°)(1+\tan 25°)=2$

C．$\cos^4 15°-\sin^4 15°=\frac{1}{2}$　D．$\dfrac{\cos 85°+\sin 25°\cos 30°}{\cos 25°}=\frac{1}{2}$

12．设函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_2(x-1)\right|,1<x\leq 3,\\(x-4)^2,x>3,\end{cases}$ 若 $f(x)=a$ 有四个实数根 x_1,x_2,x_3,x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $\frac{1}{4}(x_3+x_4)x_1+\frac{1}{x_2}$ 的值不可以是（　　）

A．$\frac{10}{3}$　　B．$\frac{11}{3}$　　C．3　　D．$\frac{9}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．将数列$\left\{2^n\right\}$与$\left\{3n-2\right\}$的公共项由小到大排列得到数列$\left\{a_n\right\}$，则数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项的和为__________.

14. 已知角θ的终边在直线$y=2x$上，则$\dfrac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=$.

15．若函数 $f(x)=x^2-ax+1$ 在区间$(\dfrac{1}{2},3)$上有零点，则实数 a 的取值范围是.

16．已知对任意x，都有$\mathrm{e}^{3x}-a-1\geq\dfrac{1+\ln x}{x}$，则实数$a$的取值范围是.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 记$\triangle ABC$的内角，A，B，C的对边分别是 a，b，c，已知$b\sin A\sin B=1-\cos 2B$．

（1）求 a;

（2）若$A=\dfrac{\pi}{3}$，求$\triangle ABC$的周长 l 的取值范围．

18. 已知等差数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_3+a_6=11$，$a_6+a_9=17$，数列$\left\{b_n\right\}$满足$b_1=2$，$b_{n+1}-b_n=2^n$．

（1）求$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$的通项公式;

（2）设$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求数列$\left\{c_n\right\}$的前n项和．

19．美团跑腿是美团新推出的同城帮买帮送服务，上线一个月时间里，“跑腿”业务已覆盖北京、上海、广州、南京、常州、济南、厦门等 20 个城市. 美团公司为了解某地美团跑腿服务的需求情况，随机统计了 800 名不同年龄消费者每月的跑腿服务使用频率得到如下频数分布表:

	$[15,25)$	$[25,35)$	$[35,45)$	$[45,55]$
每月 1 次	50	40	40	90
每月$2\sim4$次	80	80	100	60
每月$5\sim10$次	60	75	56	47
每月 10 次以上	10	5	4	3

(1) 若把年龄在$[15,35)$内的人称为青年，年龄在$[35,55]$

内的人称为中年，每月使用跑腿服务低于 5 次的为使用频率低，不低于 5 次的为使用频率高，补全下面的2×2列联表，并判断根据小概率值$\alpha=0.010$的独立性检验，能否认为跑腿服务的使用频率高低与年龄有关？

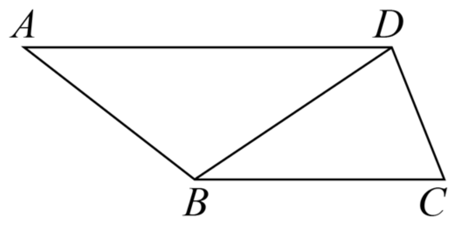
	青年	中年	合计
使用频率高			
使用频率低			
合计	.		

(2) 从样本中每月使用跑腿服务$2\sim 4$次且年龄在$\left[35,55\right]$内的消费者中按照年龄段利用分层抽样的方法抽取 8 人，再从这 8 人中随机抽取 3 人，记这 3 人中年龄在$\left[45,55\right]$内的人数分别为X，求X的分布列与数学期望.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

α	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

20．如图，在四边形$ABCD$中，$BD<AD,\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)=\dfrac{1}{4}$



（1）求角 A 的值；

（2）若$AB=\sqrt{3},AD=3$，$CD=1,\angle C=2\angle CBD$，求四边形$ABCD$的面积

21．设a为实数，函数$f(x)=x\ln x$，$g(x)=x^3-3x^2+a$.

(1) 求$f\left(x\right)$的极值；

(2) 对于 $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$，$\exists x_2 \in [1,3]$，都有 $f\left(x_1\right) = g\left(x_2\right)$，试求实数 a 的取值范围.

42．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax+1,a\in \mathrm{R}$．

(1)若 $\exists x>0$，使得 $f(x)\geq 0$ 成立，求实数 a 的取值范围；

(2)证明：对任意的 $k\in \mathrm{N}^{*},\frac{1^{2}+2}{1^{2}+1}\times \frac{2^{2}+3}{2^{2}+2}\times \frac{3^{2}+4}{3^{2}+3}\times \cdots \times \frac{k^{2}+k+1}{k^{2}+k}<\mathrm{e},\mathrm{e}$ 为自然对数的底数.

涪陵高级中学校高 2024 届高三上数学周考十

（时间：120 分钟　　总分：150 分）

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|x>-2,x\in \mathbf{R}\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^{2}-x-6\geq 0,x\in \mathbf{R}\right\}$，则下列关系中，正确的是（ D）

A．$A\subseteq B$　B．$\complement_{\mathbf{R}}A\subseteq \complement_{\mathbf{R}}B$　C．$A\cap B=\varnothing$　D．$\complement_{\mathbf{R}}A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$

2．复数 $z=\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}$，则 z 的共轭复数的虚部为（ B）

A．$\frac{3}{2}i$　B．$\frac{3}{2}$　C．$\frac{1}{2}i$　D．$-\frac{1}{2}$

3．在等比数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 中，a_{2}，a_{10} 是方程 $x^{2}-6x+4=0$ 的两根，则 $\frac{a_{3}a_{9}}{a_{6}}=$（　　　　）

A．2　　B．-2　　C．-2 或 2　　D．$3\pm \sqrt{5}$

【答案】A

【分析】首先求得 a_{2},a_{10} 的关系式，由此计算出 a_{6}，从而求得 $\frac{a_{3}a_{9}}{a_{6}}$.

【详解】由于 a_{2}，a_{10} 是方程 $x^{2}-6x+4=0$ 的两根，

所以 $a_{2}+a_{10}=6>0,a_{2}\cdot a_{10}=4\Rightarrow a_{6}^{2}=4$，

由于 $a_{6}=a_{2}q^{4},a_{10}=a_{6}q^{4}$，所以 a_{6} 为正数，

所以 $a_{6}=2$．所以 $\frac{a_{3}a_{9}}{a_{6}}=\frac{a_{6}^{2}}{a_{6}}=a_{6}=2$．

故选：A.

4

．白色污染是人们对难降解的塑料垃圾（多指塑料袋）污染环境现象的一种形象称谓，经过长期研究，一种全生物可降解塑料（简称 PBAT）逐渐被应用于超市购物袋、外卖包装盒等产品.研究表明，在微生物的作用下，PBAT 最终可被完全分解为二氧化碳和水进入大自然，当其分解率（$\text{分解率}=\dfrac{\text{已分解质量}}{\text{总质量}}\times 100\%$）超过 60%时，就会成为对环境无害的物质.为研究总质量为$100\mathrm{g}$的 PBAT 的已分解质量y（单位：g）与时间x（单位：月）之间的关系，某研究所人员每隔 1 个月测量 1 次 PBAT 的已分解质量，对通过实验获取的数据做计算处理，研究得出已分解质量y与时间x的函数关系式为$y=100-\mathrm{e}^{4.6-0.1x}$.据此研究结果可以推测，总质量为$100\mathrm{g}$的 PBAT 被分解为对环境无害的物质的时间至少为（　　）（参考数据：$\ln 40\approx 3.7$）

A．8 个月　　B．9 个月　　C．10 个月　　D．11 个月

【答案】C

【分析】根据题意，令$y=100-\mathrm{e}^{4.6-0.1x}>60$，求解即可.

【详解】令$y=100-\mathrm{e}^{4.6-0.1x}>60$，得$0.1x>4.6-\ln 40\approx 0.9$，解得$x>9$，

故至少需要 10 个月，总质量为$100\mathrm{g}$的 PBAT 才会被分解为对环境无害的物质.

故选：C.

5．下列不等关系成立的有（　　）

A．$0.8^{0.3}>0.9^{0.3}$　　B．$1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$　　C．$\log_2 3.4>\log_2 8.5$　　D．$\log_{0.3}6>\log_{0.4}6$

【答案】B

【分析】A 选项，根据$y=x^{0.3}$的单调性得到$0.8^{0.3}<0.9^{0.3}$；B 选项，由单调性和中间值比较大小；C 选项，由$y=\log_2 x$的单调性比较出大小；D 选项，先利用对数换底公式变形，再结合$\ln 0.3<\ln 0.4<0,\ln 6>0$比较出大小.

【详解】A 选项，因为$y=x^{0.3}$在$(0,+\infty)$上单调递增，故$0.8^{0.3}<0.9^{0.3}$，A 错误；

B 选项，$1.7^{0.3}>1.7^0=1,0.9^{3.1}<0.9^0=1$，故$1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$，B 正确；

C 选项，因为$y=\log_2 x$在$(0,+\infty)$上单调递增，故$\log_2 3.4<\log_2 8.5$，C 错误；

D 选项，因为$\log_{0.5}6=\dfrac{\ln 6}{\ln 0.5},\log_{0.4}6=\dfrac{\ln 6}{\ln 0.4}$，

由于 $\ln 0.4 < \ln 0.5 < 0, \ln 6 > 0$，所以 $\frac{\ln 6}{\ln 0.4} > \frac{\ln 6}{\ln 0.5}$，即 $\log_{0.5} 6 > \log_{0.4} 6$，D 错误

故选：B

6．已知$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c．设$\triangle ABC$的面积为S，且$\left(a^2-c^2\right)\sin A=2S$，则$\dfrac{b-c}{c\cos A}=$（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．−2

【答案】B

【分析】由已知条件结合三角形面积公式可得$bc=a^2-c^2$，再将所求式子利用余弦定理化简可得解.

【详解】$\because\left(a^2-c^2\right)\sin A=2S$，又$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，可得$bc=a^2-c^2$，

又$c\cos A=c\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}=\dfrac{b^2-bc}{2b}=\dfrac{b-c}{2}$，

$\therefore\dfrac{b-c}{c\cos A}=\dfrac{b-c}{\dfrac{b-c}{2}}=2$.

故选：B.

7．已知O是$\triangle ABC$所在平面内一点，若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0},\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{ON},x,y$均为正数，则$xy$的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\dfrac{4}{9}$　　　　C．1　　　　D．$\dfrac{4}{3}$

【答案】B

【分析】由题设O是$\triangle ABC$的重心，应用向量加法、数乘几何意义可得$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3x}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3y}\overrightarrow{AN}$，根据$\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{ON}$得$\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{3y}=1$，最后应用基本不等式求$xy$最小值，注意等号成立条件.

【详解】因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，所以点$O$是$\triangle ABC$的重心，

所以$\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

因为$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{x}\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{y}\overrightarrow{AN}$，

综上，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3x}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3y}\overrightarrow{AN}$.

因为$\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{ON}$，所以$M,O,N$三点共线，则$\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{3y}=1$，即$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$.

因为x,y均为正数，所以$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq2\sqrt{\dfrac{1}{xy}}$，则$\sqrt{\dfrac{1}{xy}}\leq\dfrac{3}{2}$，

所以$xy\geq\frac{4}{9}$（当且仅当$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$，即$x=y=\frac{2}{3}$时取等号），

所以xy的最小值为$\frac{4}{9}$.

故选：B

8．已知函数$f\left(x\right)$是偶函数，当$x>0$时，$f\left(x\right)=\left|\log_2 x\right|-1$，则不等式$\frac{x-1}{f\left(-x\right)-2f\left(x\right)}\geq 0$的解集是（　　）

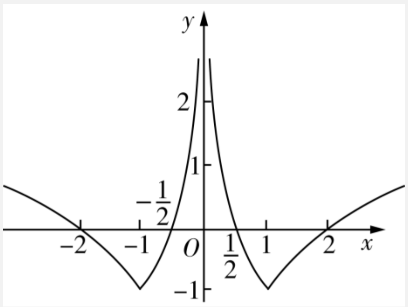
A．$\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(-2,-1\right]\cup\left[1,2\right)$

C．$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D．$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[1,2\right)$

【答案】D

【分析】根据已知画出$y=f\left(x\right)$的图象，并将不等式化为$\begin{cases}f(x)(x-1)\leq 0\\ f(x)\neq 0\end{cases}$，数形结合求不等式解集.

【详解】根据题意，作偶函数$y=f\left(x\right)$的图象，如下图示.



由$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，不等式可化为$\frac{x-1}{-f\left(x\right)}\geq 0$，则$\begin{cases}f(x)(x-1)\leq 0\\ f(x)\neq 0\end{cases}$，

所以$\begin{cases}x-1\geq 0\\ f\left(x\right)<0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1\leq 0\\ f\left(x\right)>0\end{cases}$，由图知：$1\leq x<2$或$0<x<\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}<x<0$或$x<-2$.

所以不等式解集为$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[1,2\right)$.

故选：D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列命题是真命题的是（　　）

A．不等式$\frac{1}{x}>1$的解集为$(0,1)$

B．函数$y=x^2-2x-8$的零点是$(-2,0)$和$(4,0)$

C．$y=x-1+\frac{1}{x+1}(x>-1)$的最小值为 0

D．$x^2-3x+2<0$是$x<2$成立的充分条件但不是必要条件

【答案】ACD

【分析】对于 A 选项，根据分式不等式解法即可判断正误；

对于 B 选项，根据函数零点定义，通过解一元二次方程即可得到函数零点，进而判断正误；

对于 C 选项，通过凑形后使用基本不等式即可求解最小值，进而判断正误；

对于 D 选项，根据充分不必要条件的定义即可判断正误.

【详解】对于 A 选项，由$\frac{1}{x}>1$得$\frac{x-1}{x}<0,\therefore$解集为$(0,1)$，故 A 正确；

对于 B 选项，二次函数的零点是指其图象与x轴交点的横坐标，应为-2 和 4，故 B 错误；对于C选项，$y=x-1+\frac{1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}-2\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}-2=0$，当且仅当$x+1=\frac{1}{x+1}$，即$x=0$时，取等号，故 C 正确；

对于 D 选项，由$x^2-3x+2<0$，得$1<x<2$，能够推出$x<2$，但反之不成立，所以是充分条件但不是必要条件. 故 D 正确

故选：ACD

10．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=11n-n^2$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\{a_n\}$是递增数列　　B．$a_2=8$

C．数列$\{S_n\}$的最大项为S_5和S_6　　D．满足$S_n>0$的最大的正整数n为 10

【答案】BCD

【分析】由a_n与S_n关系求通项判断 AB，由二次函数性质判断 CD.

【详解】由$S_n=11n-n^2$得当$n=1$时，$a_1=10$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=11n-n^2-11(n-1)+(n-1)^2=-2n+12$，$n=1$时也满足，

故$a_n=-2n+12$，$a_2=8$，A 错误，B 正确，

由二次函数$y=11x-x^2$的对称轴为$\frac{11}{2}$，故当$n=5$或$n=6$时S_n最大，故 C 正确，

满足 $S_n>0$ 得，$0<n<11$，最大的正整数 n 为 10，故 D 正确，

故选：BCD

11．下列等式正确的是（　　　　）

A．$2\sqrt{1+\sin4}+\sqrt{2+2\cos4}=2\cos2$ B．$\left(1+\tan20^{\circ}\right)\left(1+\tan25^{\circ}\right)=2$

C．$\cos^{4}15^{\circ}-\sin^{4}15^{\circ}=\frac{1}{2}$ D．$\frac{\cos85^{\circ}+\sin25^{\circ}\cos30^{\circ}}{\cos25^{\circ}}=\frac{1}{2}$

【答案】BD

【分析】A 选项，利用三角恒等变化得到 $2\sqrt{1+\sin4}+\sqrt{2+2\cos4}=2\left|\sin2+\cos2\right|+2\left|\cos2\right|$，结合 $\frac{\pi}{2}<2<\frac{3}{4}\pi$，判断出函数值的正负，求出答案；B 选项，利用正切和角公式逆运算得到 $\left(1+\tan20^{\circ}\right)\left(1+\tan25^{\circ}\right)=2$；C 选项，利用平方差公式，同角三角函数关系及二倍角公式求出 C 错误；D 选项，利用差角公式化简计算出 D 正确.

【详解】A 中，$2\sqrt{1+\sin4}+\sqrt{2+2\cos4}=2\sqrt{\sin^{2}2+2\sin2\cos2+\cos^{2}2}+\sqrt{2+2\left(2\cos^{2}2-1\right)}$

$=2\sqrt{(\sin2+\cos2)^{2}}+\sqrt{4\cos^{2}2}=2\left|\sin2+\cos2\right|+2\left|\cos2\right|$.

$\because \frac{\pi}{2}<2<\frac{3}{4}\pi$，

$\therefore \cos2<0$，

$\because \sin2+\cos2=\sqrt{2}\sin\left(2+\frac{\pi}{4}\right)$，$0<2+\frac{\pi}{4}<\pi$，

$\therefore \sin2+\cos2>0$，

$\therefore$ 原式 $=2\left(\sin2+\cos2\right)-2\cos2=2\sin2$，所以 A 错误；

B 中，$\left(1+\tan20^{\circ}\right)\left(1+\tan25^{\circ}\right)=1+\tan20^{\circ}+\tan25^{\circ}+\tan20^{\circ}\tan25^{\circ}$

$=1+\tan\left(20^{\circ}+25^{\circ}\right)\left(1-\tan20^{\circ}\tan25^{\circ}\right)+\tan20^{\circ}\cdot\tan25^{\circ}$

$=1+1-\tan20^{\circ}\tan25^{\circ}+\tan20^{\circ}\cdot\tan25^{\circ}=2$，B 正确；

C 选项，$\cos^{4}15^{\circ}-\sin^{4}15^{\circ}=\left(\cos^{2}15^{\circ}+\sin^{2}15^{\circ}\right)\left(\cos^{2}15^{\circ}-\sin^{2}15^{\circ}\right)=\cos30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，C 错误；

D 选项，$\frac{\cos85^{\circ}+\sin25^{\circ}\cos30^{\circ}}{\cos25^{\circ}}=\frac{\sin5^{\circ}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin25^{\circ}}{\cos25^{\circ}}$