1.分式的定义及性质

1-1.若分式 $\frac{1}{x^2-2x+m}$ 不论 x 取任何实数总有意义，则 m 的取值范围为（ D ）

A. $m\geq1$　B. m＞　C. $m\leq1$　D.m≠1

分析：分式有意义的条件是分母不为 0. 只要 $x^2-2x+m\neq$ ，即可，而 $x^2-2x+m=(x^2-2x+1)+m-1=(x-1)^2+m-1$，要使 $(x-1)^2+m-1\neq$ ，因为 $(x-1)^2\geq0$，所以只需要 m－1≠ 即 m≠1。

1-2.若 $(x-2)^0-(2x-6)^{-3}$ 有意义，那么 x 的范围是（ D ）。

A. x＞　B. x＜3　C. x≠ 或 x≠　D. x≠ 且 x≠

1-3.已知分式的值为正或负，或 1，-1，或 0.求字母的取值。

① 当 x_____时，分式 $\frac{1}{x+2}$ 的值为正。

解：由题意得 $\frac{1}{x+2}$ ＞ ，根据实数运算法则，同号两数相除得正，异号两数相除得负，可知 与 同号，所以 ＞ ，所以 ＞

② 当 x_____时，分式 $\frac{1-x}{x^2+1}$ 的值为负。

解：由题意得 $\frac{1-x}{x^2+1}$ ＜ ，因为 ＞ 根据实数运算法则，同号两数相除得正，异号两数相除得负，可知 与 异号，所以 ＜ ，所以 ＞

③ 当 x_____时，分式 $\frac{x+2}{|x|-2}$ 的值为－1。

解：由题意得 $\frac{x+2}{|x|-2}$ =－1，所以 与 $|x|$－ 互为相反数，所以 ＋ $x|$－ ，所以 $|x|$ － ，所以 ≤

总结：以上题型为：已知分式的值为正或负，或为 1，－1 等常数，求 x 的值。这种题型的解法是：运用转化的思想。

A.若分式的值为正或负，则转化成解分式不等式，解分式不等式的方法是运用实数运算法则将分式不等式转化成整式不等式，再解整式不等式。

B.或分式的值为 1，－1 等常数时，则转化成求解分式方程，解分式方程的方法是先转化成整式方程，再解整式方程。最后记得要检验是否有增根。

附加练习：

④ 当 x ＞ 时，分式 $\frac{2}{x-5}$ 的值为正。

⑤ 当 x ＜－3 时，分式 $\frac{-1}{x+3}$ 的值为正

⑥ 当 x ＜4 时，分式 $\frac{5}{x-4}$ 的值为负

⑦ 当 x ＜－2 时，分式 $\frac{6}{x+2}$ 的值为负

⑧ 当 x =4 时，分式 $\frac{3-x}{x-5}$ 的值为 1

⑨ 当 x =1 时，分式 $\frac{3+x}{x-5}$ 的值为－1

⑩ 当 x =－3 时，分式 $\frac{3+x}{x-5}$ 的值为 0

11 当 x ≤ 时，分式 $\frac{3-x}{|x|+3}$ 的值为 1

分式的幂运算

在数 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2},(-2)^{-2},\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1},(-2)^{-1}$ 中，最大的数是（ ）

A. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ B. $(-2)^{-2}$ C. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ D. $(-2)^{-1}$

2-2.下列六个算式：错误！未找到引用源。$a^2 \div a^3 = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a}$；错误！未找到引用源。$x^{10} \div x^{10} = x^{10-10} = x^0 = 0$; 错误！未找到引用源。$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; 错误！未找到引用源。$(0.00001)^0 = (10000)^0$; 错误！未找到引用源。$a^0 = 1$; 错误！未找到引用源。$3^{-2} = -9$ 中，正确的算式有（ D ）。

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

错误！未找到引用源。错误！未找到引用源。错误！未找到引用源。正确，错误！未找到引用源。要加上条件 a≠

2-3.用四舍五入，按要求对下列各数取近似值，并将结果用科学计数法表示。

（1）7481037=7.48×10^6（精确到万位） （2）0.47249=4.72×10^{-1}（精确到千分位）

（3）0.002069 2.1×10^{-3} 保留两位有效数字） （2）－15380=-1.5×10^4（保留两位有效数字）

有效数字

就是一个数从左边第一个不为 的数字数起到精确的数位止，所有的数字（包括 ，科学计数法不计的 次方），称为有效数字。简单的说，把一个数字前面的 都去掉，从第一个正整数到精确的数位止所有的都是有效数字了。

如： ，前面两个 不是有效数字，后面的 均为有效数字（注意，中间的 也算）。

（ 乘以 的 次方）中， 均为有效数字，后面的 的 次方不是有效数字

，全部都是有效数字。

，前面的两个 不是有效数字，后面的 均为有效数字（后面的 也算）

有 个有效数字

. 有 个有效数字

（ 乘以 的 次方）中，保留 个有效数字为

若 $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^3 \bullet \frac{x^2+2x+1}{8x^3}$， $\frac{x+3}{x^2-1} \div \frac{(x+3)(x+1)}{x^2-2x+1}$，求 与 的差。

解：本题实际上是分式的混合运算化简

$$\left(\frac{2x}{x+1}\right)^3 \bullet \frac{x^2+2x+1}{8x^3} \quad \frac{x+3}{x^2-1} \div \frac{(x+3)(x+1)}{x^2-2x+1} \quad \frac{8x^3}{(x+1)^3} \bullet \frac{(x+1)^2}{8x^3} \quad \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} \bullet \frac{(x-1)^2}{(x+3)(x+1)}$$

$$\frac{1}{x+1} \quad \frac{x-1}{(x+1)^2} \quad \frac{x+1}{(x+1)^2} \quad \frac{x-1}{(x+1)^2} \quad \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \quad \frac{2}{(x+1)^2} \quad \frac{2}{x^2+2x+1}$$

已知 $\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$（$f_2 \neq f$），试用含 f、f_2 的式子表示 f_1，则 f_1 ________________。

解：本题只要将原式稍作变形即可。

由原式 $\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$（$f_2 \neq f$）变形为 $\frac{1}{f_1}=\frac{1}{f}-\frac{1}{f_2}$ $\frac{f_2-f}{ff_2}$（$f_2 \neq f$），则 $f_1=\frac{ff_2}{f_2-f}$（$f_2 \neq f$）

已知 x － ＋ 与 $\left|y-\frac{1}{2}\right|$ 互为相反数，则式子 $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div(x+y)$ 的值为__________。

解：x － ＋ $(x-2)^2$ ≥ ， $\left|y-\frac{1}{2}\right|$ ≥ ，它们互为相反数。那么只有 x － ＋ $\left|y-\frac{1}{2}\right|$

解 x － ＋ 与 $\left|y-\frac{1}{2}\right|$ 得 和 $\frac{1}{2}$。代入 $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div(x+y)$

先化简 $\left(\frac{x}{x-5}-\frac{x}{5-x}\right)\div\frac{2x}{x^2-25}$，然后从不等式组 $\begin{cases}-x-2\leq 3\\ 2x \prec 12\end{cases}$ 的解集中，选取一个你认为符合题意的 的值代入求值。

解：化简 $\left(\frac{x}{x-5}-\frac{x}{5-x}\right)\div\frac{2x}{x^2-25}$ $\left(\frac{x}{x-5}+\frac{x}{x-5}\right)\bullet\frac{(x+5)(x-5)}{2x}$ $\frac{2x}{x-5}\bullet\frac{(x+5)(x-5)}{2x}$

解不等式组$\begin{cases}-x-2\le 3\\2x\prec 12\end{cases}$得$\begin{cases}x\ge -5\\x\prec 6\end{cases}$，即$-5\le x\prec 6$。取　　代入　　得

分式应用题

从火车上下来两位旅客，他们沿着同一个方向到同一个地点去，第一位旅客一半的路程以速度　行走，另一半的路程以速度　（其中$a\ne b$）行走，第二位旅客一半时间以速度　行走，另一半时间以速度　行走，车站到目的地的距离为

试表示两位旅客从火车站到目的地所需时间t_1　t_2

哪位旅客先到达目的地？

分析：本题是行程问题，涉及三个量之间的关系，即路程=速度×时间。第（1）小题，由题意，第一位旅客所需时间t_1=前一半路程所花时间$\frac{s}{2a}$+后一半路程所花时间$\frac{s}{2b}$；第二位旅客走的路程 s　前一半时间走的路程$\frac{t_2}{2}a$＋后一半时间走的路程$\frac{t_2}{2}b$

解：（　）由题意，第一位旅客所需时间$t_1=\frac{s}{2a}+\frac{s}{2b}=\frac{s(a+b)}{2ab}$

第二位旅客走的路程 s　$\frac{t_2}{2}a+\frac{t_2}{2}b$，得$t_2$　$\frac{2s}{a+b}$

（　）t_1　　t_2　　$\frac{s(a+b)}{2ab}$　－　$\frac{2s}{a+b}$　　$\frac{s(a+b)^2}{2ab(a+b)}$　－

$\frac{4sab}{2ab(a+b)}=\frac{s(a^2+2ab+b^2-4ab)}{2ab(a+b)}=\frac{s(a^2-2ab+b^2)}{2ab(a+b)}=\frac{s(a-b)^2}{2ab(a+b)}>$　，所以第一位旅客先到。

甲乙两位采购员同去一家饲料公司购买两次饲料。再次饲料的价格有变化，两位采购员的购货方式也不同，其中，甲每次购买 1000 千克，乙每次用去 800 元，而不管购买多少饲料。设两次购买的饲料单价分别为 m 元/千克和 n 元/千克（m、n 是正数，且 m≠n）,那么甲、乙两次所购饲料的平均单价和是多少？哪一个较低？

分析：本题是经济类问题，涉及三个量之间的关系，即总金额=单价×重量。由题意，甲两次所购饲料的平均单价=两次所用的总金额和（1000m＋1000n）÷两次购买的重量和（1000＋1000）；乙两次所购饲料的平均单价=两次所用的总金额和（800＋800）÷两次购买的重量和（$\frac{800}{m}+\frac{800}{n}$）；对于应用题，通常是三个量之间的关系，它们之间的关系为 A=B·C.我们在做题时一定要明确它们之间的关系，然后根据题意列出等式。

解：由题知

甲购买两次的平均单价=$\frac{1000m+1000n}{1000+1000}=\frac{m+n}{2}$

乙购买两次的平均单价=$\frac{800+800}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}=\frac{2mn}{m+n}$

又因为$\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$因为$(m-n)^2>$　和$(m+n)>$　，所以$\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}>$　，所以乙两次购买

饲料的平均单价更低。

分式乘除计算

★错误！未找到引用源。.$\frac{x-y}{x^2+xy}\div\frac{xy-x^2}{x^2y^2-x^4}\bullet\frac{1}{x-y}$

★错误！未找到引用源。.$\frac{x^2+x-6}{x-3}\div\frac{x+3}{x^2-6-x}$

解：原式 $\frac{x-y}{x(x+y)}\bullet\frac{x^2(y^2-x^2)}{x(y-x)}\bullet\frac{1}{x-y}$

$\frac{x-y}{x(x+y)}\bullet\frac{x^2(y-x)(y+x)}{x(y-x)}\bullet\frac{1}{x-y}$

解：原式 $\frac{(x-2)(x+3)}{x-3}\bullet\frac{(x-3)(x+2)}{x+3}$

(　　)(　　)

x^2-4 本题要利用十字相乘法进行因 式分解

错误！未找到引用源。.$(xy-x^2)\div\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}\bullet\frac{x-y}{x^2}$

错误！未找到引用源。.$\frac{x^2-6x+9}{9-x^2}\div\frac{2x-6}{x^2+3x}$

解：原式 $x(y-x)\bullet\frac{xy}{(x-y)^2}\bullet\frac{x-y}{x^2}$

$-x(x-y)\bullet\frac{xy}{(x-y)^2}\bullet\frac{x-y}{x^2}$

解：原式 $\frac{(x-3)^2}{-(x^2-9)}\bullet\frac{x(x+3)}{2(x-3)}$

$\frac{(x-3)^2}{-(x+3)(x-3)}\bullet\frac{x(x+3)}{2(x-3)}$

$-\frac{x}{2}$

错误！未找到引用源。.$\frac{a^2-16}{a^2+2a-8}\div(a-2)\bullet\frac{a^2+4-4a}{a-2}$

错误！未找到引用源。.$\frac{6-5x+x^2}{x^2-16}\div\frac{x-3}{4-x}\bullet\frac{x^2+6x+8}{4-x^2}$

解：利用十字相乘法分解因式化简

原式 $\frac{(a+4)(a-4)}{(a+4)(a-2)}\bullet\frac{1}{(a-2)}\bullet\frac{(a-2)^2}{(a-2)}\quad\frac{a-4}{a-2}$

解：利用十字相乘法分解因式化简

原式 $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x-4)}\bullet\frac{(4-x)}{(x-3)}\bullet\frac{(x+2)(x+4)}{(2-x)(2+x)}$

$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x-4)}\bullet\frac{(x-4)}{(x-3)}\bullet\frac{(x+2)(x+4)}{(x-2)(x+2)}$

错误！未找到引用源。.$\frac{2x-6}{x^2-4x+4}\div\frac{12-4x}{x^2+x-6}\times\frac{1}{x+3}$

解：利用十字相乘法分解因式化简

原式 $\frac{2(x-3)}{(x-2)^2}\bullet\frac{(x+3)(x-2)}{4(3-x)}\bullet\frac{1}{(x+3)}$

$-\frac{1}{2x-4}$

★错误！未找到引用源。.先化简，再求值，$(8a^2-2b^2)\div\frac{4a^2b+4ab^2+b^3}{2b^2-5ab-3a^2}\times\frac{b}{b^2-5ab+6a^2}$，

分式的加减运算

错误！未找到引用源。$x-2+\frac{4}{2+x}$ 错误！未找到引用源。$\frac{4x^2}{2x-1}$ $2x-1$

错误！未找到引用源。$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}$ 错误！未找到引用源。$\frac{1}{x-5}-\frac{6}{x^2-25}-\frac{x+1}{10+2x}$

错误！未找到引用源。$\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{2x+4}$ 错误！未找到引用源。$\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{2x+4}$

分式的加减混合运算

错误！未找到引用源。$\left(\frac{2x}{x+2}-\frac{x}{x-2}\right)\div\frac{x}{x^2-4}$ 错误！未找到引用源。$\frac{a}{a-1}\div\frac{a^2-a}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}$

错误！未找到引用源。$(a+b)^2\bullet\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{2ab^2}{a^2-ab}$ 错 误 ！ 未 找 到 引 用 源 。$a\left(4-\frac{1}{a}\right)+\frac{a}{2-a}\div\frac{1}{a-2}$

错误！未找到引用源。$\frac{a^2}{1-a}-(1-a)\div\frac{(1-a)^2}{2a-1}$

求值型

等式$\frac{8x+9}{x^2+x-6}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$对于任何使分母不为 的 均成立，求 的值。

解：此类题为分式方程，分解因式，$\frac{8x+9}{(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$，

通分 $\frac{8x+9}{(x+3)(x-2)}=\frac{A(x-2)}{(x+3)(x-2)}+\frac{B(x+3)}{(x+3)(x-2)}$，化简得 $\frac{8x+9}{(x+3)(x-2)}=\frac{(A+B)x-2A+3B}{(x+3)(x-2)}$

所以 解得

先化简，后求值 $\left(-2a^2b^4\right)^{-2}\bullet\left(-a^2b^{-1}\right)^3\div\left(a^{-1}b^2\right)^{-4}$，其中

利用恒等变形求分式的值：这种题的解题思路是将要求值的代数式进行变形，或将已知代数式进行变形，或将二者都进行变形，错误！未找到引用源。使得变形后二者含有相同因式，从而可以将已知条件带入要求值的代数式进行求值。错误！未找到引用源。或者变形后成为 $(x\pm a)^2+(y\pm b)^2+|x\pm c|=0$ 的形式，再通过列方程（组），求得字母 x,y 的值再代入要求值的代数式进行求值。或成为 $(x\pm a)^2=b$ 的形式。解出字母 x 的值代入求值。变形是关键的一步，变形常常利用的性质公式有：错误！未找到引用源。分式的基本性质即分式的分子分母同时乘以或除以一个不为 0 的数，分式的值不变。错误！未找到引用源。平方差公式。错误！未找到引用源。完全平方公式和完全平方公式的逆运算。错误！未找到引用源。乘法分配律及其逆运算错误！未找到引用源。绝对值的性质，形如 $|x\pm c|=0$。

错误！未找到引用源。若 为正实数，$m-\frac{1}{m}=3$ 求 $m^2-\frac{1}{m^2}$ 的值。

解：可以变形题目中要求的代数式 $m^2-\frac{1}{m^2}$ $\left(m+\frac{1}{m}\right)\bullet\left(m-\frac{1}{m}\right)$ 其中 $m-\frac{1}{m}$ 的值为已知，但还需要求出 $m+\frac{1}{m}$ 的值。可通过对已知条件 $m-\frac{1}{m}=3$ 进行变形求得，可将 $m-\frac{1}{m}=3$ 两边同时平方得 $\left(m-\frac{1}{m}\right)^2=3^2$，即 $m^2-2+\frac{1}{m^2}=3^2$，$m^2+\frac{1}{m^2}=11$，$\left(m^2+2+\frac{1}{m^2}\right)-2=11$，得到 $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2=13$，得 $m+\frac{1}{m}$ $\pm\sqrt{13}$，因已知 为正实数，所以 $m+\frac{1}{m}$ $\sqrt{13}$。这样

$m^2-\frac{1}{m^2}$ $\left(m+\frac{1}{m}\right)\bullet\left(m-\frac{1}{m}\right)$ $3\sqrt{13}$

本题灵活运用平方差公式将 $m^2-\frac{1}{m^2}$ 进行分解，使所求分式中含有已知代数式 $m-\frac{1}{m}$，再通过完全平方公式和完全平方公式的逆运算，求出 $m+\frac{1}{m}$ 的值，最后代入求值。分析可见这类题的特点是：字母与字母的倒数相加或相减的值已知，求字母的平方与它的倒数的平方的和或差的值。

错误！未找到引用源。变式题：已知 $m+\frac{1}{m}=3$ 求 $m^2-\frac{1}{m^2}$ 的值。

解：可以变形题目中要求的代数式 $m^2-\frac{1}{m^2}$ $\left(m+\frac{1}{m}\right)\bullet\left(m-\frac{1}{m}\right)$ 其中 $m+\frac{1}{m}$ 的值为已知，但还需要求出 $m-\frac{1}{m}$ 的值。可通过对已知条件 $m+\frac{1}{m}=3$ 进行变形求得，可将 $m+\frac{1}{m}=3$ 两边同时平方得 $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2=3^2$，即 $m^2+2+\frac{1}{m^2}=3^2$，$m^2+\frac{1}{m^2}=7$，$\left(m^2-2+\frac{1}{m^2}\right)+2=7$，得到 $\left(m-\frac{1}{m}\right)^2=5$，得 $m-\frac{1}{m}$ $\pm\sqrt{5}$，这样 $m^2-\frac{1}{m^2}$ $\left(m+\frac{1}{m}\right)\bullet\left(m-\frac{1}{m}\right)$ $\pm3\sqrt{5}$

分析可见这类题的特点是：字母与字母的倒数相加或相减的值已知，求字母的平方与它的倒数的平方的和或差的值。解这种题的方法是灵活运用平方差公式将 $m^2-\frac{1}{m^2}$ 进行分解，使所求分式中含有已知代数式 $m+\frac{1}{m}$，再通过完全平方公式和完全平方公式的逆运算，求出 $m-\frac{1}{m}$ 的值，最后代入求值。

错误！未找到引用源。已知 $x+\frac{1}{x}$ ，求 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值。

解一：因为 $x+\frac{1}{x}$ ，所以 $x^2+\frac{1}{x^2}$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ 。（运用完全平方公式的逆运算（配方法））

解二：因为 $x+\frac{1}{x}$ ，两边平方得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ ，即 $x^2+2+\frac{1}{x^2}$ ，所以 $x^2+\frac{1}{x^2}$ （运用完全平方公式）

分析可见这类题的特点是：字母与字母的倒数相加或相减的值已知，求字母的平方与它的倒数的平方的和或差的值。解这种题的方法是灵活运用完全平方公式的逆运算，变形题目中要求的代数式，使变形后的代数式中含有已知的 $x+\frac{1}{x}$ 的形式，再将 $x+\frac{1}{x}$ ，代入求值。

错误！未找到引用源。已知 $x+\frac{1}{x}$ ，求 $\frac{3x^4+x^2+3}{2x^2}$ 的值。

分析：参考前面 道题的形式，可见其标准形式为已知字母与字母的倒数的和或差，要求的代数式为字母的平方与字母的平方的倒数和或差。观察本题已知 $x+\frac{1}{x}$ 是标准的 $x\pm\frac{1}{x}$ 形式，而要求的代数式 $\frac{3x^4+x^2+3}{2x^2}$ 不是标准形式，要变形为标准的 $x^2\pm\frac{1}{x^2}$ 形式，

可对分子进行降次，用分子除以分母则可实现降次，

解：

$$\frac{3x^4+x^2+3}{2x^2} \quad \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\bullet\frac{1}{x^2} \quad \frac{3}{2}(x^2+\frac{1}{x^2})+\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}[(x^2+2+\frac{1}{x^2})-2]+\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3+\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}\times 5^2-\frac{5}{2}$$

分析可见这类题的特点是：字母与字母的倒数相加或相减的值已知，求字母的平方与它的倒数的平方的和或差的值。解这种题的方法是灵活运用完全平方公式的逆运算，变形题目中要求的代数式，使变形后的代数式中含有已知的 $x+\frac{1}{x}$ 的形式，再将 $x+\frac{1}{x}$ ，代入求值。

错误！未找到引用源。已知 $x^2-5x+1=0$，求 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值。

分析 参考前面几道题的形式，可见其标准形式为已知字母与字母的倒数的和或差，要求的代数式为字母的平方与字母的平方的倒数和或差。因为 $x^2-5x+1=0$ 不是已知的标准形式 $x+\frac{1}{x}$ 其最高项的次数为 次，所以可把 $x^2-5x+1=0$ 进行降次。变为标准形式。

解：因为 $x^2-5x+1=0$ 所以 $\neq$ 等式两边同除以 得 $\frac{x^2-5x+1}{x}$ 所以 $x-5+\frac{1}{x}$ ，所以 $x+\frac{1}{x}$ ，所以 $x^2+\frac{1}{x^2}$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ 。

解题的思路是不但通过变形题目中已知条件的形式，而且通过变形使要求的代数式也改变形式，使变形后的代数式中含有已知的 $x+\frac{1}{x}$ 的形式，再将 $x+\frac{1}{x}$ ，代入求值。

错误！未找到引用源。已知 $x^2-4x+1=0$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值。

分析 参考前面几道题的形式，可见其标准形式为已知字母与字母的倒数的和或差，要求的代数式为字母的平方与字母的平方的倒数和或差。因为 $x^2-4x+1=0$ 不是已知的标准形式 $x+\frac{1}{x}$ 其最高项的次数为 次，所以可把 $x^2-4x+1=0$ 进行降次。变为标准形式。

解：因为 $x^2-4x+1=0$ 所以 $\neq$ 等式两边同除以 得 $\frac{x^2-4x+1}{x}$ 所以 $x-4+\frac{1}{x}$ ，所

以 $x+\frac{1}{x}$ ，变标准形式了；但是右边不是标准的字母的平方与字母的平方的倒数和或差的形式，还要经过变形才行。可利用完全平方公式的逆运算进行变形：

$x^4+\frac{1}{x^4}$ $\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)-2$ $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$ $\left[\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-2\right]^2-2$ $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]^2-2$

$\left[4^2-2\right]^2-2=194$。

错误！未找到引用源。已知 $x^2+y^2-6x-8y+25=0$，求 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ 的值。

分析：观察 $x^2+y^2-6x-8y+25=0$，如果能通过完全平方公式转化成 $(x\pm a)^2+(y\pm b)^2=0$ 的形式，就可列方程 $\begin{cases}x\pm a=0\\ y\pm b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\pm a\\ y=\pm b\end{cases}$，再代入要求的代数式求值。这也是一种恒等变形的思路方法，一定要掌握。

解：观察 $x^2+y^2-6x-8y+25=0$，可通过完全平方公式进行转化，$x^2-6x+9+y^2-8y+16=0$，转化成 $(x-3)^2+(y-4)^2=0$ 的形式，就可列方程 $\begin{cases}x-3=0\\ y-4=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$，再代入要求的代数式求值。

得 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{3}{4}-\frac{4}{3}=-\frac{7}{12}$

错误！未找到引用源。已知 $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{a^2-3ab-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ 的值为_______.

分析：解题思路是将要求值的代数式进行变形，或将已知代数式进行变形，或将二者都进行变形，错误！未找到引用源。使得变形后二者含有相同因式，从而可以将已知条件带入要求值的代数式进行求值。本题可运用分式的基本性质“即分式的分子分母同时乘以可除以一个不为 0 的数，分式的值不变”进行变形。

解：由题意可知，$b^2\neq 0$，故将要求值的代数式 $\frac{a^2-3ab-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ 的分子分母同除以 b^2 得

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2-3\left(\frac{a}{b}\right)-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\left(\frac{a}{b}\right)+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\left(\frac{2}{3}\right)-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\left(\frac{2}{3}\right)+1}=-23$$

为何值时，方程 $\frac{x}{x-3}=2+\frac{a}{x-3}$ 会产生增根？

解：先把分式方程化为整式方程，最简公分母为 $x-3$，方程两边同乘以 $x-3$ 并化简得

$x=6-a$，这个整式方程的解为 $x=6-a$，这个解使原分式方程最简公分母等于 ，则这个解就是原分式方程的增根，即 $x-3$ $6-a-3=0$，得出 $a=3$

若 $\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x-1}=2$，则 ______

解：分式两边同乘以最简公分母 $(x+2)(x-1)$ 并化简得 —

若 $\frac{3}{x-2}-\frac{k-1}{x-2}=4$ 有增根，则 的值为______

解：先把分式方程化为整式方程，最简公分母为 $x-2$，方程两边同乘以 $x-2$ 并化简得 $x=3-\frac{k}{4}$，这个整式方程的解为 $x=3-\frac{k}{4}$，这个解使原分式方程最简公分母等于 ，则这个解就是原分式方程的增根，即 $x-2$ $3-\frac{k}{4}-2=0$，得出 $k=4$

分式方程 $\frac{x}{x-1}+\frac{k}{x-1}-\frac{x}{x+1}=0$ 的增根 则 ______

解：先把分式方程化为整式方程，最简公分母为 $(x+1)(x-1)$，方程两边同乘以 $(x+1)(x-1)$ 并化简得 $(2+kx)=-k$。因为分式方程的增根 也是整式方程的解，把 代入整式方程 $(2+k)x=-k$，得出 $k=-1$

方程 $(m+n)x=m^2-n^2$ 中，若有唯一解，则 的关系是________若有无数个解，则 的关系是________

分析：关于 x 的一元一次方程的解（根）的情况：化为最简方程 ax=b 后，

讨论它的解：当 a≠0 时，有唯一的解 $x=\frac{b}{a}$；

当 a=0 且 b≠0 时，无解；

当 a=0 且 b＝0 时，有无数多解。（∵不论 x 取什么值，0x＝0 都成立）

解：本题是求解含字母系数的一元一次方程的解的情况，当 $m+n\neq 0$ 时，即 $m\neq -n$ 时有唯一解。当 $m+n=0$，且 $m^2-n^2=0$ 时，即 $m=-n$ 时，有无数个解。

解方程（ ） $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$

解：先把分式方程化为整式方程，最简公分母为 $(x-1)(x-2)(x-3)$，方程两边同乘以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 并化简得 $x=3$，将 $x=3$ 代入 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 得 $(3-1)(3-2)(3-3)=0$。所以原分式方程无解。

（ ） $\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{2x-x^2}-\frac{4}{x^2-3x+2}$

当 为何值时，分式 $\frac{5x+2}{2x-3}+\frac{19}{4x-6}$ 的值为 $\frac{7}{2}$？

若解关于 的方程$\frac{2x}{x+1}-\frac{m}{x^2+x}=\frac{x+1}{x}$时产生增根，求 的值。

若关于 的方程 无解，则 的值为（ ）。

±

若关于 的方程（ ） 有唯一解，则 的关系式为（ ）。

≠ ≠

若关于 的方程 则方程中未知数的系数是______，当满足______的条件时，方程有解，其解为______。

3. 已知字母系数的分式方程的解，确定字母的条件

例 3. 如果关于 x 的方程$\frac{a}{x}+\frac{1}{a}=\frac{b}{x}+\frac{1}{b}$有唯一解，确定 a、b 应满足的条件。

分析：显然方程成立的条件是：$a\neq 0$且$b\neq 0$

解：若$a\neq 0$且$b\neq 0$，去分母整理，得

$(ba- \quad)x=ab(ba- \quad)$

当且仅当$b-a\neq 0$，即$b\neq a$时，解得$x=ab$

经检验，$x=ab$是原方程的解

$\therefore a$、b应满足的条件：$a\neq 0$且$b\neq 0$，$b\neq a$

说明：已知方程有唯一解，显然方程存在的隐含条件是 a、b 全不为 0，然后在方程存在的条件下，求有解且唯一的条件。因为是分式方程，需验根后确定唯一解的条件。

当______时，方程$\frac{x}{a}+\frac{2}{b}=x$有唯一解，它的解是______。

分析：显然方程成立的条件是：$a\neq 0$且$b\neq 0$

解：若$a\neq 0$且$b\neq 0$，去分母，方程两边同时乘以 ab,整理得(ab-b)x=2a,

当且仅当(ab-b)≠0，即 b(a－1)≠0 即 b≠0,且 a≠1 时，解得$x=\frac{2a}{ab-b}$

经检验，$x=\frac{2a}{ab-b}$是原方程的解，所以，当$a\neq 0$且 a≠1 且$b\neq 0$时，方程的唯一解是$x=\frac{2a}{ab-b}$。

已知关于 的方程$\frac{x}{x-3}-2=\frac{m}{x-3}$有一个正数解，求 的取值范围。

分析：解此题首先将分式方程化成整式方程，用含 的代数式表示 根据条件确定 的取值。

解：方程两边都乘 得 （ 所以 因为方程的解为正数，所以 ＞ 且 ≠ 所以 ＜6 且 ≠ 时，原方程有一个正数解。

若关于 的方程$\frac{3-2x}{x-3}+\frac{2+mx}{3-x}=-1$无解，求出 的值。

正解：将原方程化为整式方程，得：$(1-m)x=-2$，

因为原分式方程无解，所以$(1-m)=0$或$\frac{-2}{1-m}=3$

所以 或 $\frac{5}{3}$.

辨析：产生错误的原因是只从字面意思来理解“无解”，认为“无解”就单单是解不出数来。实际上，导致分式方程无解的原因有两个：①解不出数来，也就是整式方程无解；②解出的数不符合原方程，也就是整式方程虽然有解，但这个解能使最简公分母为零．即解出的数为增根。

利用数学思想妙求值

山东省东营市广饶县稻庄镇实验中学（257336） 张良鹏

在数学问题中存在着大量的求值问题，在具体求解时若能根据不同的题型，从而采取适当的思想方法，常常能化繁为简，为顺利解决问题起到极其重要的作用。现分类说明其中的技巧：

参数思想

例 1：（ 年浙江温州）若−=− ，则$\frac{+}{}$的值是

、− 、− 、− 、−

解：∵−=− 不妨设 则 将其代入分式得

$\frac{+}{}=\frac{3k+5k}{5k}=\frac{8}{5}$

故选

说明：已知比值问题，常设比值 为参数，这种解题方法叫参数法．

配方思想

例 ：已知$x^2-3x+1=0$ 求$x^2+\frac{1}{x^2}$的值

解：∵ $x^2-3x+1=0$ ∴ $x^2+1=3x$，

又∵ $x\neq 0$ ∴方程两边同时除以 ，得$x+\frac{1}{x}=3$

∴ $x^2+\frac{1}{x^2}$ （$x+\frac{1}{x}$）^{2}

说明：本例是将 “a^2+b^2”形式转化为“$a^2+b^2+2ab-2ab=(a+b)^2-2ab$”形式，从而将已知代入后求值的技巧叫做配方法．

倒数思想

例 3：（2005 年山东潍坊）已知$x+\frac{1}{x}=3$，求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值．

分析：因为 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-1$，

所以可先求值式的倒数，再求值式的值．

解：∵ $x+\frac{1}{x}=3$， ∴ $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-1=3^2-1=8$，

$\therefore\quad \dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{8}$.

特殊化思想

例 ：已知 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3$,则分式 $\dfrac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值为 ________.

分析：∵ 填空题不需要写出解题过程，故可取满足已知等式的特殊值求解.

解：取 $=\dfrac{1}{2}$， $=-$ ，

$(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2+1=3)$.

∴原式

$$=\frac{2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}\times(-1)-2\times(-1)}{\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}\times(-1)-(-1)}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}.$$

（当然上面问题还有以下两种解法

解法一：∵ $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3$,

$\therefore\quad - = \quad\Rightarrow - =-$.

∵ 原式$=\dfrac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}$

$$=\frac{2(-3xy)+3xy}{-3xy-2xy}=\frac{3}{5}.$$

解法二：将分子、分母同除以 （≠ ）.

$$\therefore 原式=\frac{\frac{2}{y}+3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{3-2(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})}{-2-(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})}$$

$$=\frac{3-2\times3}{-2-3}=\frac{3}{5}$$

说明：特殊化思想是解填空题或选择题常用的解题方法或技巧. 取特殊值要注意满足条件等式，其原则是要便于计算.

拆项思想

例 ：已知 $a+b+c=0$,求 $c(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})+b(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a})+a(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})$ 的值.