关于硬件逻辑运算与逻辑电路

相关知识点

- ★ 计算机硬件核心主要是由以数字逻辑电路组成的。
- ★ 逻辑是指条件和结果之间的关系，即因果关系。因果关系是二值逻辑，很容易用电子线路来实现。
- ★ 电路的输入信号作为条件，输出信号作为结果，输入输出代表一定逻辑关系。
- ★ 逻辑代数是描述/分析/设计逻辑电路的数学工具，逻辑代数也叫布尔代数。
- ★ 运用逻辑运算可以设计最简逻辑电路。

2. 1 逻辑代数及基本运算

★ 逻辑代数：是由逻辑变量集、常量“0”、“1”及

“与”、“或”、“非”等 运算符号构成

的代数系统。

★ 逻辑变量集：是指逻辑代数中所有可能的变

量的集合，可用任何字母表示，但

变量的取值只能是1或0。

★ 用简单逻辑代数可描述任何复杂逻辑网络。

1、三种基本逻辑运算

逻辑“与”运算；逻辑“或”运算；逻辑“非”运算。

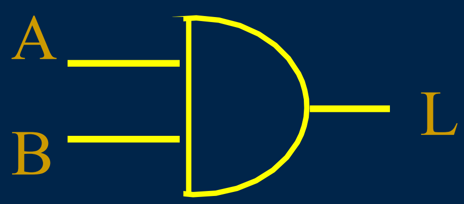
(1) 逻辑“与”运算和“与门”电路

逻辑“与”又称为逻辑“乘”运算。

运算符号：“·”,“∧”,“AND”等。

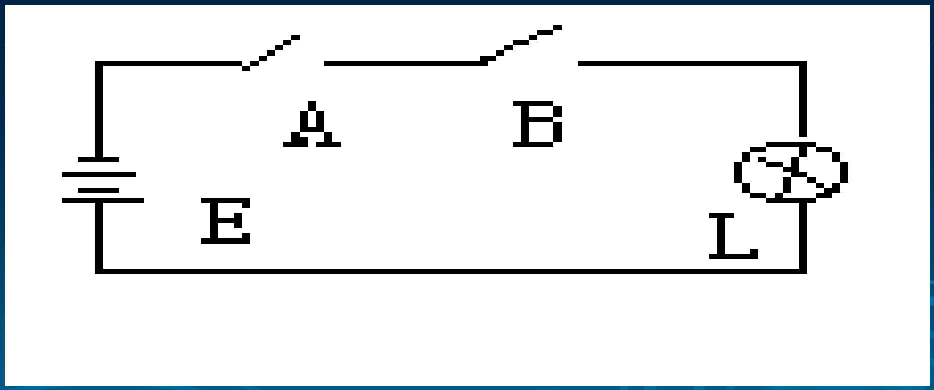
逻辑表达式：$L = A\cdot B = A\wedge B = \begin{cases} 1 & (\text{A、B均为1}) \\ 0 & (\text{A、B中任一为0}) \end{cases}$

与门电路符号：



真值表：用表格说明输入输出变量之间的关系。

A	B	L= A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



（2） 逻辑“或”运算和“或门”电路

逻辑“或”又称为逻辑加运算。

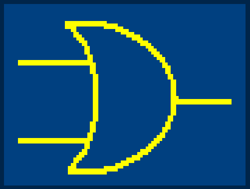
运算符号：“+”、“v”、“OR”等。

逻辑表达式：$L=A+B=A\vee B=\begin{cases}1 & \text{(A、B中任一为1)}\\ 0 & \text{(A、B均为0)}\end{cases}$

或门电路符号：

A

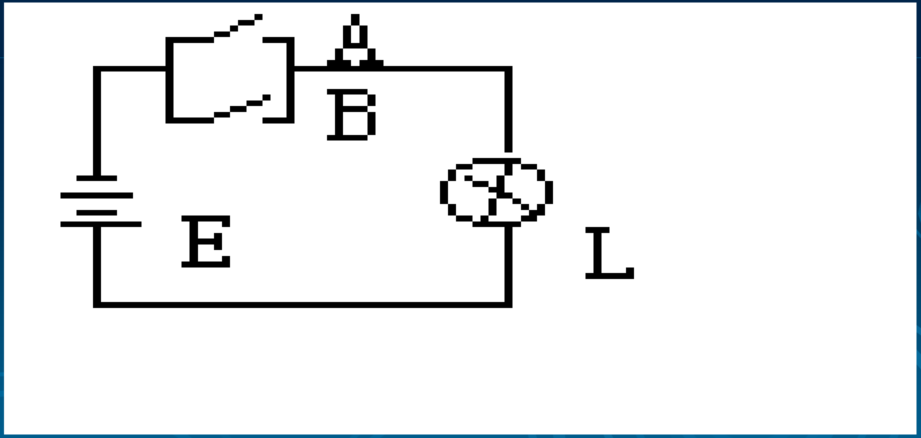
B



L

逻辑真值表：

A	B	L=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



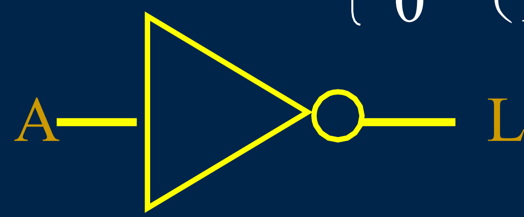
(3) 逻辑“非”运算和“非门”电路

逻辑“非”又称为逻辑反运算.

运算符号：“ — ”（上横线）

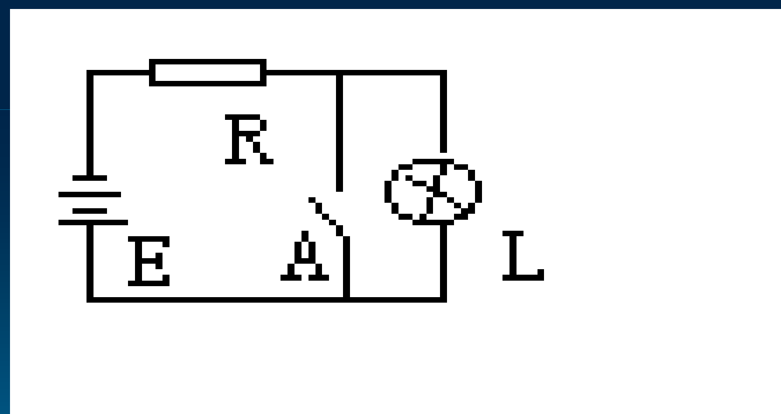
逻辑表达式为：$L=\overline{A}=\begin{cases}1 & (A=0)\\ 0 & (A=1)\end{cases}$

非门电路符号：



逻辑真值表：

A	L
0	1
1	0



（4） 常用的组合逻辑单元

基本逻辑运算可以构成复杂逻辑关系；

基本逻辑电路也可以形成组合逻辑电路和时序电路。

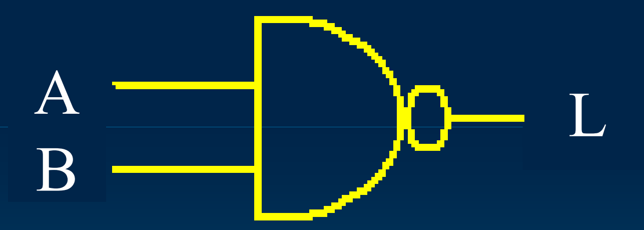
常见组合逻辑及其电路如下：

☆与非门　　逻辑表达式：$L=\overline{A \bullet B}$

真值表：

A	B	L
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

电路符号：



☆或非门

逻辑表达式：$L=\overline{A+B}$

真值表：

A	B	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

电路符号：

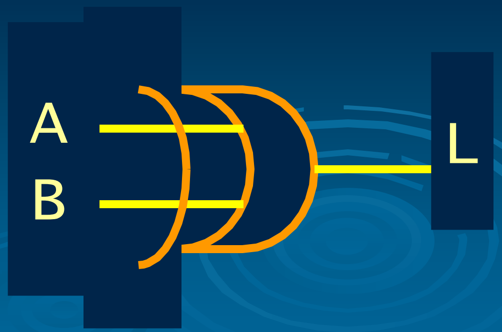
☆异或门

逻辑表达式：$L=A\oplus B=\overline{A}B+A\overline{B}$

真值表：

A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

电路符号：



☆同或门

逻辑表达式： $L = A \odot B = \overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}$

真值表：

A	B	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

电路符号：

2、基本运算规律和公式

基本运算：

加：$A+0=A$，$A+1=1$，$A+A=A$，$A+\overline{A}=1$

乘：$A\bullet 0=0$，$A\bullet 1=A$，$A\bullet A=A$，$A\bullet\overline{A}=0$

非：$A+\overline{A}=1$，$A\bullet\overline{A}=0$，$\overline{\overline{A}}=A$

基本公式：

吸收律，分配律，交换律，结合律，反演律

（见教材 p34页）

吸收律：

$$A+A\cdot B=A$$

证明：$A+A\cdot B=A(1+B)=A\cdot 1=A$

$$A\cdot(A+B)=A$$

证明：$A\cdot A+A\cdot B=A+A\cdot B=A$

$$A+\overline{A}\cdot B=A+B$$

证明：$A+\overline{A}\cdot B=A+\overline{A}\cdot B+A\cdot B$

$=A+(A+\overline{A})\cdot B=A+1\cdot B=A+B$

分配律：

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$(A+B)\cdot(A+C)=A+B\cdot C$$

证明：
$$\begin{aligned}&(A+B)\cdot(A+C)\\&=A\cdot A+A\cdot C+B\cdot A+B\cdot C\\&=A(1+C+B)+B\cdot C\\&=A+B\cdot C\end{aligned}$$

交换律：

$$A+B=B+A \qquad A\cdot B=B\cdot A$$

结合率：

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

反演律：

$$\overline{A\cdot B\cdot C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

2.2 逻辑函数三种表示法

1、真值表：

——由逻辑变量的所有可能取值的组合及其对应的逻辑函数值所构成的表格。

例：设计三人表决逻辑电路。得到真值表如右：ABC为选票，F为选举结果。

NO	A	B	C	F
M0	0	0	0	0
M1	0	0	1	0
M2	0	1	0	0
M3	0	1	1	1
M4	1	0	0	0
M5	1	0	1	1
M6	1	1	0	1
M7	1	1	1	1

2、逻辑表达式：

——由逻辑变量、逻辑常量和运算符组成的表达式。

它是逻辑变量的函数，也是设计逻辑电路的根据。

根据真值表可以列出逻辑表达式。

方法是：把真值表中所有使函数值为1的自变量组合项“或”起来。

例如，前述三人表决真值表的逻辑表达式为：

$$F(A,B,C)=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$$

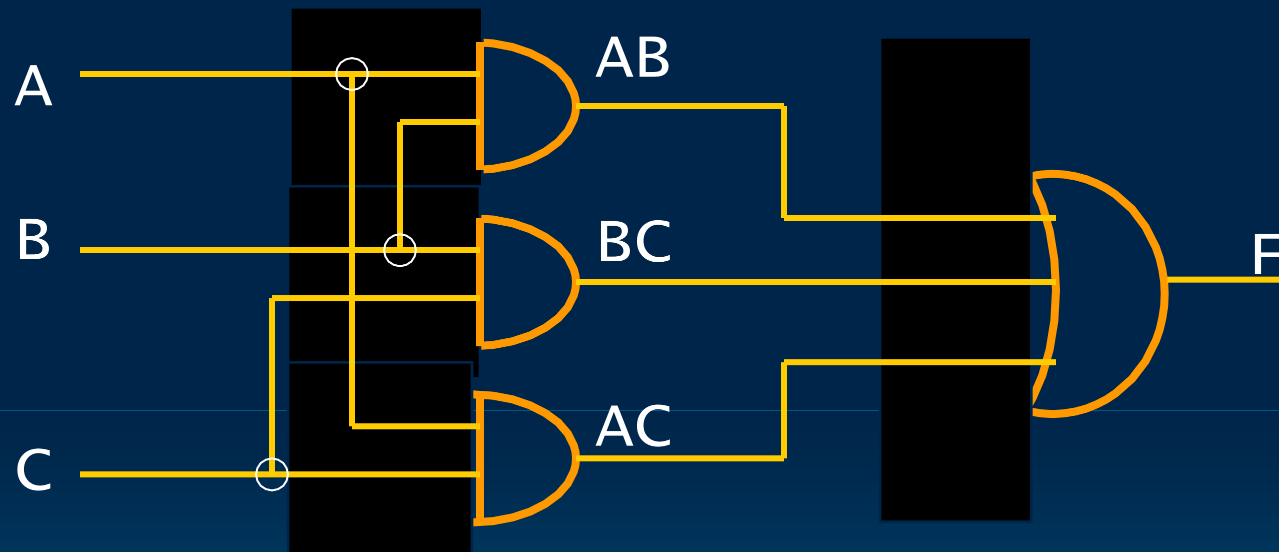
每个逻辑表达式均可用一个逻辑电路实现。如果能够用最简单的逻辑表达式描述一个逻辑关系，就可以用最简单的电路实现之。因此，化简逻辑表达式具有十分重要的意义。

下面以三人表决逻辑为例说明化简方法：

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \\
&= \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C + ABC + AB\overline{C} + ABC \\
&= (\overline{A}BC + ABC) + (A\overline{B}C + ABC) + (AB\overline{C} + ABC) \\
&= BC(A + \overline{A}) + AC(B + \overline{B}) + AB(C + \overline{C}) \\
&= BC + AC + AB
\end{aligned}
$$

根据化简后的逻辑表达式　$F=AB+BC+AC$，

可以画出相应的三人表决逻辑电路如下：



☆由逻辑表达式进行化简需要较强的技巧，
不熟练者很难判断，而卡诺图则直观方便。

3、卡诺图： ——逻辑关系的一种图形表示形式。

同时也是化简逻辑表达式的一种非常有效的方法。

卡诺图是一种直观的平面方块图。它根据输入变量的数量n将平面划分为2^n 个方格，用来表示全部输入变量组合项或者表示全部输出项。

下面举例对此进行说明。

二维卡诺图

输入为X1、X2，输出为 F。

左下图为真值表，右下图为卡诺图。

卡诺图左边和上边书写自变量的可能取值，中间则表明 Mi最小项。最小项即一行真值表中各自变量或其“非”的逻辑乘积项。

NO	X1	X2	F
M0	0	0	F0
M1	0	1	F1
M2	1	0	F2
M3	1	1	F3

X1 \ X2	0	1
0	M0	M1
1	M2	M3

三维卡诺图

输入为X1、X2、X3，输出为 F。

左下图为真值表，右下图为卡诺图。

卡诺图的左边上边书写自变量的可能取值，规则是**最小跳跃**。中间则表明最小项。

NO	X1	X2	X3	F
M0	0	0	0	F0
M1	0	0	1	F1
M2	0	1	0	F2
M3	0	1	1	F3
M4	1	0	0	F4
M5	1	0	1	F5
M6	1	1	0	F6
M7	1	1	1	F7

X_1X_2 \ X_3	0	1
00	M0	M1
01	M2	M3
11	M6	M7
10	M4	M5

卡诺图简化规则

仍以前面所述的三人表决逻辑为例。

根据真值表得到的逻辑表达式为：

$F(A,B,C)=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$

NO	A B C	F
M0	0 0 0	0
M1	0 0 1	0
M2	0 1 0	0
M3	0 1 1	1
M4	1 0 0	0
M5	1 0 1	1
M6	1 1 0	1
M7	1 1 1	1

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

BC

AC

AB

根据卡诺图化简结果：F=AB+BC+AC