

2023-2024 学年度第一学期期末学业水平考试

高二数学

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的学校、班级、姓名、座号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在答题卡上.

一、单项选择题: (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 计 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合要求的, 请在答题纸的指定位置填涂答案选项.)

1. 已知直线 $x+2y-4=0$ 与直线 $2x+my+m+3=0$ 互相垂直, 则 m 为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 1 C. -1 D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】根据两直线垂直的一般式的结论即可得出答案.

【详解】两直线垂直, 则有 $A_1A_2+B_1B_2=0$, 即 $2+2m=0$, 解得 $m=-1$.

故选: C

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5a_7a_9a_{11}=36$, 则 $a_2a_{14}=(\quad)$

- A. 6 B. 9 C. ± 6 D. -6

【答案】A

【解析】

【分析】利用等比数列的基本性质可求得 a_2a_{14} 的值.

【详解】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2a_{14}=a_8^2>0$,

由等比数列的基本性质可得 $a_5a_7a_9a_{11}=(a_2a_{14})^2=36$, 故 $a_2a_{14}=6$.

故选: A.

3. 已知函数 $f(x)=(2x-1)^2$ 的导数为 $f'(x)$, 则 $f'(1)=(\quad)$

- A. 1 B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】
【分析】 先求出导函数，再代入求值即得.

【详解】 $f'(x) = 2(2x-1) \times 2 = 8x-4$, 则 $f'(1) = 8 \times 1 - 4 = 4$.

故选: D.

 4. 已知圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ 相交于 A, B 两点, 则弦 AB 的长为
().

 A. $2\sqrt{2}$

 B. $2\sqrt{5}$

C. 4

D. 2

【答案】 A

【解析】
【分析】 判断两圆相交, 求出两圆的公共弦方程, 根据圆的弦长的几何求法, 即可求得答案.

【详解】 由题意知圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, 即圆 $O_1: (x-1)^2 + y^2 = 4$,

 圆心为 $O_1(1, 0)$, 半径 $r_1 = 2$,

 圆 $O_2: x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$, 即圆 $O_2: x^2 + (y-1)^2 = 2$,

 圆心为 $O_2(0, 1)$, 半径 $r_2 = \sqrt{2}$,

 则 $r_1 - r_2 < |O_1O_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} < r_1 + r_2$, 即两圆相交,

 将圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ 的方程相减,

 可得直线 AB 的方程为 $x - y + 1 = 0$,

 则 $O_1(1, 0)$ 到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离为 $\frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

 故弦 AB 的长为 $2\sqrt{r_1^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$,

故选: A

 5. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , $P(x_0, 2)$ 是抛物线 C 上一点, 且点 P 到 F 的距离为 3,
则该抛物线的焦点坐标为 ().

- A. $(0, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 0)$ D. $(-1, 0)$

【答案】B

【解析】

【分析】利用抛物线的定义求出 p 的值，即可得出抛物线 C 的焦点坐标.

【详解】抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的准线方程为 $y = -\frac{p}{2}$ ，焦点为 $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ，

由抛物线的定义可知，点 P 到 F 的距离为 $2 + \frac{p}{2} = 3$ ，可得 $p = 2$ ，故 $F(0, 1)$.

故选：B.

6. 在中国古代诗词中，有一道“八子分绵”的名题：“九百九十六斤绵，赠分八子做盘缠，次第每人分十七，要作第八数来言”. 题意是把 996 斤绵分给 8 个儿子做盘缠. 按照年龄从大到小的顺序依次分绵，年龄小的比年龄大的多分 17 斤绵. 则年龄最小的儿子分到的绵是 ()

- A. 65 斤 B. 82 斤 C. 184 斤 D. 201 斤

【答案】C

【解析】

【分析】首先根据题意设 8 个儿子按年龄从小到大依次分绵 a_1 斤， a_2 斤， a_3 斤， $\dots$ ， a_8 斤，从而得到数列 $\{a_n\}$ 为公差为 -17 的等差数列，再根据 $8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times (-17) = 996$ 求解即可.

【详解】设 8 个儿子按年龄从小到大依次分绵 a_1 斤， a_2 斤， a_3 斤， $\dots$ ， a_8 斤，
则数列 $\{a_n\}$ 为公差为 -17 的等差数列.

因为绵的总数为 996 斤，

所以 $8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times (-17) = 996$ ，解得 $a_1 = 184$.

故选：C.

7. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > 0, b_2 > 0)$ 的公共焦

点，它们在第一象限内交于点 M ， $\angle F_1 M F_2 = 60^\circ$ ，若双曲线 C_2 的离心率 $e_2 \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ，则椭圆 C_1 的离心率 e_1 的取值范围为 ()

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

B. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right]$

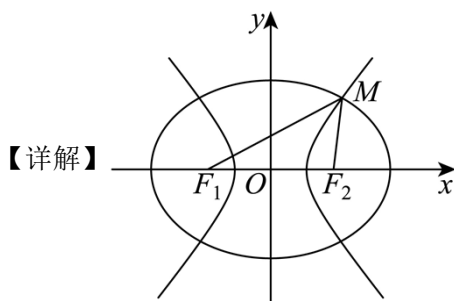
C. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

D. $\left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【答案】B

【解析】

【分析】结合椭圆和双曲线的定义得到 $\begin{cases} |MF_1| = a_1 + a_2 \\ |MF_2| = a_1 - a_2 \end{cases}$ ，然后利用余弦定理得出 e_1 与 e_2 的关系即可，然后结合 e_2 的范围即可得出答案.



如图，由椭圆和双曲线的定义得 $\begin{cases} |MF_1| + |MF_2| = 2a_1 \\ |MF_1| - |MF_2| = 2a_2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} |MF_1| = a_1 + a_2 \\ |MF_2| = a_1 - a_2 \end{cases}$ ，

在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2 = |MF_1|^2 + |MF_2|^2 - 2|MF_1||MF_2|\cos \angle F_1MF_2$ ，

$$\text{代入得 } 4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2)(a_1 - a_2) \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{整理得 } 4c^2 = a_1^2 + 3a_2^2, \text{ 同除以 } c^2 \text{ 得 } 4 = \left(\frac{a_1}{c}\right)^2 + 3\left(\frac{a_2}{c}\right)^2, \text{ 即 } 4 = \left(\frac{1}{e_1}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{e_2}\right)^2,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{1}{e_1}\right)^2 = 4 - 3\left(\frac{1}{e_2}\right)^2, \text{ 又 } e_2 \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \Rightarrow 3\left(\frac{1}{e_2}\right)^2 \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \Rightarrow \left(\frac{1}{e_1}\right)^2 \in \left[\frac{5}{2}, 3\right],$$

$$\text{所以 } e_1 \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right],$$

故选：B.

8. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + a \ln x$ ，若函数 $y = f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ，且不等式 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{x_1 + x_2} \geq t$

恒成立，则 t 的取值范围为 ().

A. $(-\infty, -1]$

B. $\left(-\infty, -\frac{9}{4}\right]$

C. $\left(-\infty, \frac{e^2}{2} - 4e\right]$

D. $(-\infty, -13]$

【答案】B

【解析】

【分析】先利用函数 $y = f(x)$ 存在两个极值点，转化为函数 $f(x)$ 的导函数在 $(0, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根，利用一元二次方程根与系数的关系，用字母 a 表示出 $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ ，然后把 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{x_1 + x_2}$ 写成关于 a 的函数，求该函数的最小值即可得到问题答案.

【详解】函数的定义域为： $(0, +\infty)$ ，且 $f'(x) = x - 4 + \frac{a}{x} = \frac{x^2 - 4x + a}{x}$ ， $x > 0$.

因为函数 $y = f(x)$ 存在两个极值点，

所以方程： $x^2 - 4x + a = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同的解，

$$\text{所以: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 4a > 0 \\ x_1 x_2 = a > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 4,$$

且 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = a$.

$$\begin{aligned} \text{所以: } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{x_1 + x_2} &= \frac{\frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1 + a \ln x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 - 4x_2 + a \ln x_2}{4} \\ &= \frac{\frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - 4(x_1 + x_2) + a(\ln x_1 + \ln x_2)}{4} = \frac{a \ln a - a - 8}{4} \quad (0 < a < 4). \end{aligned}$$

设 $h(x) = a \ln a - a - 8$ ($0 < a < 4$),

则 $h'(x) = \ln a$ ，由 $h'(x) = \ln a < 0$ ，得 $0 < a < 1$ ，由 $h'(x) = \ln a > 0$ 得 $1 < a < 4$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, 4)$ 上单调递增，

所以 $h(x)$ 的最小值为： $h(1) = -9$.

所以 $t \leq -\frac{9}{4}$.

故选：B

【点睛】关键点点睛：该问题先利用函数存在两个极值点，把问题转化为二次函数在给定区间上有两个不相等的实数根的问题，再利用一元二次方程根与系数的关系，用字母 a 把 $x_1 + x_2$ ， $x_1 x_2$ 表示出来，再构造新函数，利用导数分析函数的单调性，求函数的最小值即可。

二、多项选择题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，计 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分，请在答题纸的指定位置填涂答案选项.）

9. 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ，直线 $l: x + y + \lambda = 0$ 与圆 M 交于 C, D 两点，则下列结论正确的是（ ）.

A. λ 的取值范围是 $(-2\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} - 1)$

B. 若直线 l 经过圆 M 的圆心，则 λ 的值为 -1

C. 当直线 l 过原点 O 时，圆 M 上的动点到直线 l 的最大距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. 若 $\angle CMD = 60^\circ$ ，则 $\lambda = \sqrt{6} - 1$

【答案】AB

【解析】

【分析】结合点到直线的距离公式依次判断即可.

【详解】对于 A 项，圆 $M: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 的标准方程为： $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ，

圆心为 $M(1, 0)$ ，半径 $r = 2$ ，

因为直线 $l: x + y + \lambda = 0$ 与圆 M 交于 C, D 两点，所以圆心 M 到直线 l 的距离 $d < r$ ，

即 $d = \frac{|1+0+\lambda|}{\sqrt{1^2+1^2}} < 2$ ，解得 $-2\sqrt{2}-1 < \lambda < 2\sqrt{2}-1$ ，

所以 λ 的取值范围是 $(-2\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}-1)$ ，故 A 项正确；

对于 B 项，若直线 l 经过圆 M 的圆心，则 $1+0+\lambda=0$ ，解得 $\lambda=-1$ ，故 B 项正确；

对于 C 项，当直线 l 过原点 O 时，则 $\lambda=0$ ，得直线 $l: x+y=0$ ，

则圆心 M 到直线 l 的距离 $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

得圆 M 上的动点到直线 l 的最大距离为: $d_1 + r = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$, 故 C 项错误;

对于 D 项, 因为 $\angle CMD = 60^\circ$, 所以 $\triangle CMD$ 为等边三角形,

则圆心 M 到直线 CD 的距离为: $\sqrt{3}$, 所以 $\frac{|1+0+\lambda|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{3}$,

得 $\lambda = \sqrt{6} - 1$ 或 $\lambda = -\sqrt{6} - 1$, 故 D 项错误,

故选: AB

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 项和为 S_n , 若 $a_1 = \frac{1}{8}, S_6 = 9S_3$, 则下列结论正确的是

()

A. $q = \frac{1}{2}$

B. $q = 2$

C. $S_n = 2a_n - \frac{1}{8} (n \in \mathbf{N}^*)$

D. $S_{n+1} = 2S_n + \frac{1}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据题意求出公比 q , 求出 a_n 和 S_n 代入选项验证即可.

【详解】由 $S_6 = 9S_3$ 可知 $q = 1$ 显然不合题意, 故有 $\frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{9a_1(1-q^3)}{1-q}$, 解得 $q = 2$, 故 A 错 B

对;

$$a_n = \frac{1}{8} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-4}, \quad S_n = \frac{\frac{1}{8}(1-2^n)}{1-2} = 2^{n-3} - \frac{1}{8}, \quad S_{n+1} = 2^{n-2} - \frac{1}{8}$$

代入 C, D 选项验证, C 正确;

D 选项右边 $= 2^{n-2} + \frac{1}{4}$, D 错误.

故选: BC

11. 已知直线 $y = 2x + t$ 交抛物线 $y^2 = x$ 于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点, 下列说法正确的是 ().

A. $t \in \left(-\infty, \frac{1}{8}\right)$

B. $x_1 x_2$ 为定值

C. 线段 AB 的中点在一条定直线上

D. $\frac{1}{k_{OA}} + \frac{1}{k_{OB}}$ 为定值 (O 为坐标原点, k_{OA} 、 k_{OB} 分别为直线 OA 、 OB 的斜率)

【答案】ACD

【解析】

【分析】对 A: 联立直线方程抛物线方程, 根据判别式即可求得 t 的范围; 对 B: 根据 A 中所求, 即可判断;

对 C: 设出 AB 的中点坐标, 借助韦达定理, 即可判断; 对 D: 借助韦达定理, 求得 $\frac{1}{k_{OA}} + \frac{1}{k_{OB}}$, 即可判断.

【详解】联立直线方程 $y = 2x + t$ 与抛物线方程 $y^2 = x$, 可得 $4x^2 + (4t - 1)x + t^2 = 0$;

对 A: 由直线与抛物线交于 A, B 两点, 可得 $\Delta = (4t - 1)^2 - 16t^2 > 0$, 解得 $t \in \left(-\infty, \frac{1}{8}\right)$, 故 A 正确;

对 B: 因为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 故可得 $x_1 + x_2 = \frac{1 - 4t}{4}$, $x_1 x_2 = \frac{t^2}{4}$, 故 B 错误;

对 C: 设 AB 中点为 $C(x, y)$, 故可得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 - 4t}{8}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2(x_1 + x_2) + 2t}{2} = \frac{1}{4}$;

故 AB 中点在定直线 $y = \frac{1}{4}$ 上, 故 C 正确;

对 D: $\frac{1}{k_{OA}} + \frac{1}{k_{OB}} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = \frac{4x_1 x_2 + t(x_1 + x_2)}{(2x_1 + t)(2x_2 + t)} = \frac{4x_1 x_2 + t(x_1 + x_2)}{4x_1 x_2 + 2t(x_1 + x_2) + t^2} = \frac{\frac{1}{4}t}{\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}$ 为定值, 故 D 正确.

故选: ACD.

【点睛】关键点点睛: 本题 CD 选项解决的关键是能够熟练使用韦达定理, 从而求得 AB 中点坐标, 以及

转化 $\frac{1}{k_{OA}} + \frac{1}{k_{OB}}$, 属中档题.

12. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{e^x}$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 则 ().

A. 不等式 $f(x) \geq -e^2$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立

B. 若直线 $y = k$ 与函数 $f(x)$ 的图象有且只有两个不同的公共点, 则 k 的取值范围是 $(-e^2, 0]$

C. 方程 $f(f(x)) = 0$ 恰有 3 个实根

D. 若关于 x 的不等式 $f(x) < ax$ 恰有 1 个负整数解, 则 a 的取值范围为 $\left[e, \frac{e^2}{2} \right)$

【答案】AD

【解析】

【分析】对函数 $f(x)$ 求导, 判断其单调性, 求出其最小值, 可判断 A 选项; 作出曲线 $f(x)$ 的图象, 根据图象可判断 B 选项; 令 $f(x) = 0$, 解得 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, 数形结合可判断 C 选项; 由直线 $y = ax$ 过原点, 再结合图象分析即可判断 D 选项.

【详解】对于选项 A, $f'(x) = -\frac{x^2 + x - 2}{e^x} = -\frac{(x+2)(x-1)}{e^x}$,

当 $x < -2$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2), (1, +\infty)$ 上单调递减,

当 $-2 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-2, 1)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值, $f(-2) = -e^2$,

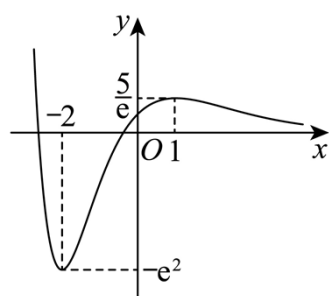
在 $x = 1$ 处取得极大值, $f(1) = \frac{5}{e}$,

而 $x > 1$ 时, 恒有 $f(x) > 0$ 成立,

所以 $f(x)$ 的最小值是 $-e^2$, 即 $f(x) \geq -e^2$, 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 故 A 正确;

对于 B 选项, 若函数 $f(x)$ 与直线 $y = k$ 有且只有两个交点,

由 A 选项分析, 函数 $f(x)$ 的大致图象如下,



由图知, 当 $-e^2 < k \leq 0$ 或 $k = \frac{5}{e}$ 时,

函数 $f(x)$ 与直线 $y = k$ 有且只有两个交点, 故 B 错误;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/075031113031012033>