曲一线®科学备考

5年高考3年模拟

2020 B版 专项测试

命题规律探究 | 题组分层精练

高考理数 (课标Ⅱ专用)

第四章　三角函数及三角恒等变换

§4.1　三角函数的概念、同角三角函数的关系式和诱导公式

五年高考

五年高考 分类真题

A组　统一命题·课标卷题组

考点　三角函数的概念、同角三角函数的关系式和诱导公式

1.(2016课标全国III,5,5分)若$\tan\alpha=\frac{3}{4}$,则$\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$　(　　)

A.$\frac{64}{25}$　　B.$\frac{48}{25}$

C.1　　D.$\frac{16}{25}$

答案　A　当$\tan\alpha=\frac{3}{4}$时,原式$=\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1+4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1+4\times\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}+1}=\frac{64}{25}$,

故选A.

思路分析　将所求的关系式的分母“1”化为$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$,再将“弦”化“切”即可得到答案.

方法总结　三角函数的化简求值问题,往往遵循以下原则:高次化低次,异角化同角,切化弦,若可化为齐次式,则优先考虑.

2.(2018课标全国Ⅱ,15,5分)已知$\sin\alpha+\cos\beta=1$,$\cos\alpha+\sin\beta=0$,则$\sin(\alpha+\beta)=$________.

答案　$-\frac{1}{2}$

解析　本题主要考查两角和的正弦公式.

由$\sin\alpha+\cos\beta=1$,$\cos\alpha+\sin\beta=0$,

两式平方相加,得$2+2\sin\alpha\cos\beta+2\cos\alpha\sin\beta=1$,

整理得$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$.

解题技巧　利用平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,进行整体运算是求解三角函数问题时常用的技巧,应熟练掌握.

B组　自主命题·省(区、市)卷题组

考点　三角函数的概念、同角三角函数的关系式和诱导公式

1.(2017北京,12,5分)在平面直角坐标系xOy中,角α与角β均以Ox为始边,它们的终边关于y轴对称.若$\sin\alpha=\frac{1}{3}$,则$\cos(\alpha-\beta)$=________.

答案　$-\frac{7}{9}$

解析 本题考查同角三角函数的基本关系式,诱导公式,两角差的余弦公式.

解法一:由已知得$\beta=(2k+1)\pi-\alpha(k\in Z)$.

$\because \sin\alpha=\frac{1}{3}$,$\therefore \sin\beta=\sin[(2k+1)\pi-\alpha]=\sin\alpha=\frac{1}{3}$ $(k\in Z)$.

当$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$时,$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{7}{9}$.

当$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$时,$\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{7}{9}$.综上,$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{7}{9}$.

解法二:由已知得$\beta=(2k+1)\pi-\alpha(k\in Z)$.

$\therefore \sin\beta=\sin[(2k+1)\pi-\alpha]=\sin\alpha,\cos\beta=\cos[(2k+1)\pi-\alpha]=-\cos\alpha,k\in Z$.

当$\sin\alpha=\frac{1}{3}$时,$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=-(1-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha-1=2\times\frac{1}{9}-1=-\frac{7}{9}$

.

2.(2019江苏,15,14分)在△ABC中,角A,B,C的对边分别为a,b,c.

(1)若$a=3c,b=\sqrt{2}$,$\cos B=\frac{2}{3}$,求c的值;

(2)若$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$,求$\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)$的值.

解析 本小题主要考查正弦定理、余弦定理、同角三角函数关系、诱导公式等基础知识,考查运算求解能力.满分14分.

(1)因为$a=3c$,$b=\sqrt{2}$,$\cos B=\frac{2}{3}$,

由余弦定理$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,得$\frac{2}{3}=\frac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\times 3c\times c}$,

即$c^2=\frac{1}{3}$.所以$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$,

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\frac{\cos B}{2b}=\frac{\sin B}{b}$,

所以$\cos B=2\sin B$.从而$\cos^2B=(2\sin B)^2$,

即$\cos^2B=4(1-\cos^2B)$,故$\cos^2B=\frac{4}{5}$.

因为$\sin B>0$,所以$\cos B=2\sin B>0$,

从而$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此$\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.(2018浙江,18,14分)已知角α的顶点与原点O重合,始边与x轴的非负半轴重合,它的终边过点$P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

(1)求$\sin(\alpha+\pi)$的值;

(2)若角β满足$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$,求$\cos\beta$的值.

解析　本题主要考查三角函数及其恒等变换等基础知识,同时考查运算求解能力.

(1)由角α的终边过点$P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$得$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$,

所以$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

(2)由角α的终边过点$P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$得$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,

由$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$得$\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$.

由$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$得

$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$,

所以$\cos\beta=-\frac{56}{65}$或$\cos\beta=\frac{16}{65}$.

思路分析　(1)由三角函数的定义得$\sin\alpha$的值,由诱导公式得$\sin(\alpha+\pi)$的值.

(2)由三角函数的定义得$\cos\alpha$的值,由同角三角函数的基本关系式得$\cos(\alpha+\beta)$的值,由两角差的余弦公式得$\cos\beta$的值.

4.(2015广东,16,12分)在平面直角坐标系xOy中,已知向量$m=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$n=(\sin x,\cos x)$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)若$m\perp n$,求$\tan x$的值;

(2)若m与n的夹角为$\frac{\pi}{3}$,求x的值.

解析 (1)因为$m\perp n$,

所以$m\cdot n=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0$.

即$\sin x=\cos x$,又$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=1$.

(2)易求得$|m|=1$,$|n|=\sqrt{\sin^2x+\cos^2x}=1$.

因为m与n的夹角为$\frac{\pi}{3}$,

所以$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{1\times1}$.

则$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

又因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

所以$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$,

解得$x=\frac{5\pi}{12}$.