

§2.1 函数的概念及其表示

考试要求

- 1.了解函数的含义.
- 2.在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数.
- 3.了解简单的分段函数,并会简单的应用.

内容索引

第一部分

落实主干知识

第二部分

探究核心题型

第三部分

课时精练

第一部分

落实主干知识

1.函数的概念

一般地，设 A ， B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x ，按照某种确定的对应关系 f ，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$ ， $x \in A$ 。

2.函数的三要素

(1)函数的三要素：定义域、对应关系、值域。

(2)如果两个函数的定义域相同，并且对应关系完全一致，则这两个函数为同一个函数。

3.函数的表示法

表示函数的常用方法有解析法、图象法和列表法.

4.分段函数

若函数在其定义域的不同子集上，因对应关系不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数.

常用结论

1. 直线 $x=a$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象至多有1个交点.
2. 在函数的定义中, 非空数集 A, B , A 即为函数的定义域, 值域为 B 的子集.
3. 分段函数虽由几个部分组成, 但它表示的是一个函数. 分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集, 值域等于各段函数的值域的并集.

判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若两个函数的定义域和值域相同,则这两个函数是同一个函数.

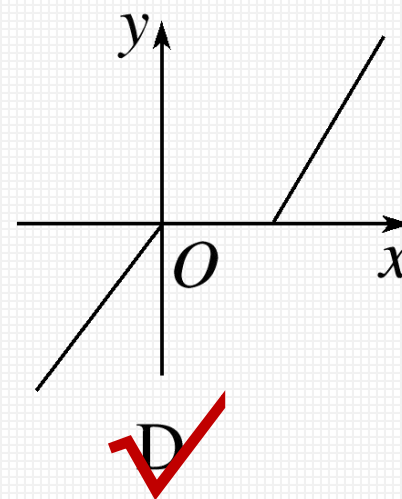
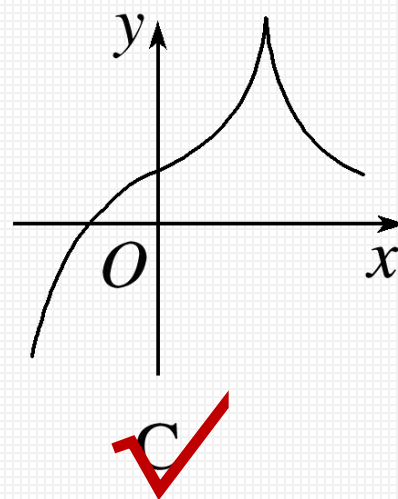
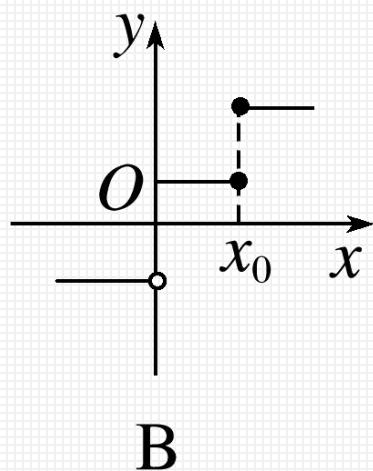
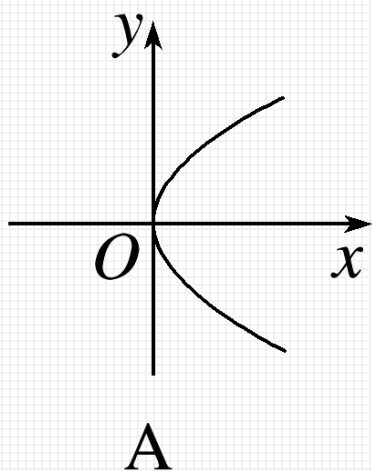
(×)

(2)函数 $y=f(x)$ 的图象可以是一条封闭曲线.(×)

(3) $y=x^0$ 与 $y=1$ 是同一个函数.(×)

(4)函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\geq 0, \\ x^2, & x<0 \end{cases}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.(✓)

1.(多选)下列所给图象是函数图象的是



解析

A中，当 $x > 0$ 时，每一个 x 的值对应两个不同的 y 值，因此不是函数图象；

B中，当 $x = x_0$ 时， y 的值有两个，因此不是函数图象；

CD中，每一个 x 的值对应唯一的 y 值，因此是函数图象.

2. 下列各组函数表示同一个函数的是

A. $y = x - 1$ 与 $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

B. $y = x^{-1}$ 与 $y = -\frac{1}{x}$

C. $y = 2\sqrt{x^2}$ 与 $y = 2x$

 D. $y = \frac{2}{x-1}$ 与 $v = \frac{2}{t-1}$

解析

$y=x-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ 的定义域为 $\{x|x \neq -1\}$, 定义域不同, 不是同一个函数, 故选项 A 不正确;

$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 的对应关系不同, 不是同一个函数, 故选项 B 不正确;

$y=2\sqrt{x^2}=2|x|$ 与 $y=2x$ 的对应关系不同, 不是同一个函数, 故选项 C 不正确;

解析

$y = \frac{2}{x-1}$ 与 $v = \frac{2}{t-1}$ 的定义域都是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 对应关系也相同, 所以是同一个函数, 故选项 D 正确.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ e^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 则函数 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ 等于

- A. 3 B. -3 ☒ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

解析

由题意可知, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$,

所以 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f(-\ln 3) = e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$.

第二部分

探究核心题型

例1 (1)函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为

A. $(-4, -1)$

B. $(-4, 1)$

 C. $(-1, 1)$

D. $(-1, 1]$

解析

由题意得 $\begin{cases} x+1>0, \\ -x^2-3x+4>0, \end{cases}$ 解得 $-1<x<1$, 故定义域为 $(-1, 1)$.

(2) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-4, -2)$, 则函数 $g(x) = f(x-1) + \sqrt{x+2}$ 的定义域为 $[-2, -1)$.

解析

$\because f(x)$ 的定义域为 $(-4, -2)$,

要使 $g(x) = f(x-1) + \sqrt{x+2}$ 有意义,

$$\text{则} \begin{cases} -4 < x-1 < -2, \\ x+2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } -2 \leq x < -1,$$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的定义域为 $[-2, -1)$.

- (1) 无论抽象函数的形式如何，已知定义域还是求定义域，均是指其中的 x 的取值集合；
- (2) 若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则复合函数 $f(g(x))$ 的定义域由不等式 $a \leq g(x) \leq b$ 求出；
- (3) 若复合函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域.

跟踪训练1 (1)函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{3-x}$ 的定义域为

A.(1,3]

 B.(1,2) ∪ (2,3]

C.(1,3) ∪ (3, +∞)

D.(−∞, 3)

解析

由题意知
$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ 3-x\geq 0, \end{cases}$$

所以 $1<x<2$ 或 $2<x\leq 3$,

所以函数的定义域为 $(1,2)\cup(2,3]$.

(2)(2023·南阳检测)已知函数 $f(x)=\lg \frac{1-x}{1+x}$, 则函数 $g(x)=f(x-1)+\sqrt{2x-1}$

的定义域是

A. $\{x|x>2 \text{ 或 } x<0\}$

 B. $\left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x < 2\right\}$

C. $\{x|x>2\}$

D. $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$

解析

要使 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 有意义, 则 $\frac{1-x}{1+x} > 0$,

即 $(1-x)(1+x) > 0$, 解得 $-1 < x < 1$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$.

要使 $g(x) = f(x-1) + \sqrt{2x-1}$ 有意义,

则 $\begin{cases} -1 < x-1 < 1, \\ 2x-1 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2} \leq x < 2$,

所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $\left\{ x \mid \frac{1}{2} \leq x < 2 \right\}$.

例2 (1)已知 $f(1 - \sin x) = \cos^2 x$, 求 $f(x)$ 的解析式;

解

(换元法)设 $1 - \sin x = t$, $t \in [0, 2]$,

则 $\sin x = 1 - t$, $\therefore f(1 - \sin x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

$\therefore f(t) = 1 - (1 - t)^2 = 2t - t^2$, $t \in [0, 2]$.

即 $f(x) = 2x - x^2$, $x \in [0, 2]$.

(2) 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$ 的解析式;

解

$$(\text{配凑法}) \because f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

$$\therefore f(x)=x^2-2, \quad x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

(3) 已知 $f(x)$ 是一次函数且 $3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$, 求 $f(x)$ 的解析式.

解

(待定系数法) $\because f(x)$ 是一次函数, 可设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$,

$$\therefore 3[a(x+1)+b]-2[a(x-1)+b]=2x+17.$$

$$\text{即 } ax+(5a+b)=2x+17,$$

$$\therefore \begin{cases} a=2, \\ 5a+b=17, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=7. \end{cases}$$

$\therefore f(x)$ 的解析式是 $f(x)=2x+7$.

(4) 已知 $f(x)$ 满足 $2f(x) + f(-x) = 3x$, 求 $f(x)$ 的解析式.

解

(解方程组法) $\because 2f(x) + f(-x) = 3x,$ ①

$\therefore$ 将 x 用 $-x$ 替换, 得 $2f(-x) + f(x) = -3x,$ ②

由 ①② 解得 $f(x) = 3x.$

函数解析式的求法

- (1)配凑法;
- (2)待定系数法;
- (3)换元法;
- (4)解方程组法.

跟踪训练2 (1)已知 $f(x-1)=x^2+4x-5$, 则 $f(x)$ 的解析式是

✓ A. $f(x)=x^2+6x$

B. $f(x)=x^2+8x+7$

C. $f(x)=x^2+2x-3$

D. $f(x)=x^2+6x-10$

解析

$f(x-1)=x^2+4x-5$, 设 $x-1=t$, $x=t+1$,

则 $f(t)=(t+1)^2+4(t+1)-5=t^2+6t$,

故 $f(x)=x^2+6x$.

(2) 若 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1-x}$, 则 $f(x) = \frac{1}{x-1} (x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1)$.

解析

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1} (x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1).$$

(3) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x$, 则 $f(2)$ 等于

✓ A. -3

B. 3

C. -1

D. 1

解析

$$f(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x, \quad \text{①}$$

$$\text{则 } f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = -\frac{3}{x}, \quad \text{②}$$

$$\text{联立①②解得 } f(x) = -\frac{2}{x} - x, \text{ 则 } f(2) = -\frac{2}{2} - 2 = -3.$$

例3 (1) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} f(x-1), & x > 0, \\ -\ln(x+e) + 2, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(2\ 024)$ 的值为

A. -1

B. 0

 C. 1

D. 2

解析

因为 $f(x) = \begin{cases} f(x-1), & x > 0, \\ -\ln(x+e) + 2, & x \leq 0, \end{cases}$

所以 $f(2\ 024) = f(2\ 023) = f(2\ 022) = \cdots = f(1)$,

又 $f(1) = f(1-1) = f(0) = -\ln(0+e) + 2 = -1 + 2 = 1$, 所以 $f(2\ 024) = 1$.

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 2, & x < -1, \\ 2^{x-3}, & x \geq -1, \end{cases}$ 若 $f(a) = 4$, 则实数 a 的值是 -2或5; 若 $f(a) \geq 2$, 则实数 a 的取值范围是 $[-3, -1) \cup [4, +\infty)$.

解析

若 $f(a)=4$,

$$\text{则} \begin{cases} a < -1, \\ -a^2 - 3a + 2 = 4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a \geq -1, \\ 2^{a-3} = 4, \end{cases}$$

解得 $a = -2$ 或 $a = 5$.

若 $f(a) \geq 2$,

$$\text{则} \begin{cases} a < -1, \\ -a^2 - 3a + 2 \geq 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a \geq -1, \\ 2^{a-3} \geq 2, \end{cases}$$

解得 $-3 \leq a < -1$ 或 $a \geq 4$,

$\therefore a$ 的取值范围是 $[-3, -1) \cup [4, +\infty)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/075110034213011330>