第七章

随机有限元法

目　录

7.1 概述

在各类工程结构中，存在着很多不确定性因素的影响。这些因素可以采用随机变量、随机过程或随机场来描述。随机分析理论与传统的有限元法相结合而产生的随机有限元法，是分析结构可靠性的最有效的方法之一。

根据对结构进行随机分析的方法与手段不同，随机有限元法可分为两类：一类是统计的方法，就是通过大量的随机抽样，对结构反复进行有限元计算，将得到的结果作统计分析，得到该结构的失效概率或可靠度，这种方法称为蒙特卡罗 **(Monte Carlo)** 随机有限元法。Monte Carlo 随机有限元法需要进行大量的模拟计算，工作量很大。

另一类是分析的方法，就是以数学、力学分析作为工具，找出结构系统（确定的或随机的）的响应与输入信号（确定的或随机的）之间的关系，并据此得到结构内力、应力或位移的统计规律，得到结构的失效概率或可靠度。

按照随机分析的目的与结果不同，可分为两种。一种是分析结构响应的统计特性及其分布规律，如摄动随机有限元法（PSFEM）、纽曼（**Neumann**）随机有限元法等；另一种是直接分析结构的可靠度或失效概率，如验算点展开随机有限元法等。

返回目录

7.2摄动随机有限元法

设有限元位移法的支配方程为：

$$K\delta = F \qquad (7\text{-}1)$$

式中为K劲度矩阵，δ 为结点位移向量，F为结点荷载向量。若材料特性、所受荷载或几何现状有一微小扰动，则结点位移对此将产生扰动响应。

设结构的某一参数Z为随机摄动量，则摄动量Z可以表示为确定部分和随机部分之和，即：

$$Z = Z_0(1+\varepsilon) \qquad (7\text{-}2)$$

式中Z_0为均值；ε是均值为零的随机量，它反映了参数Z的随机性。

采用摄动随机有限元法分析结构的可靠度，可以在均值点进行泰勒级数展开，并取至二次项，得到：

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \alpha_i \alpha_j \qquad (7\text{-}3)$$

$$F = F_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \alpha_i \alpha_j \qquad (7\text{-}4)$$

$$\delta = \delta_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \alpha_i \alpha_j \qquad (7\text{-}5)$$

式中K_0、F_0、δ_0分别为K、F、δ在各随机变量均值点的值，$\alpha_i = X_i - m_{Xi}$为随机变量X_i在均值点m_{Xi}处的微小摄动量。

将式(7-3)、(7-4)、(7-5)代入支配方程(7-1), 根据二阶摄动法得到如下方程：

$$\delta_0 = K_0^{-1} F_0 \qquad (7\text{-}6)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i} = K_0^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} - \delta_0 \frac{\partial K}{\partial \alpha_i}\right) \qquad (7\text{-}7)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = K_0^{-1}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \delta_0 \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial K}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial \alpha_j}\right)$$

(7−8)

若取式(7-5)的线性项分析，可得结点位移一阶近似的均值和协方差为：

$$E[\delta] = \delta_0 \qquad (7-9)$$

$$Cov\left(\delta,\delta^{T}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\delta}{\partial\alpha_{i}}\cdot\frac{\partial\delta^{T}}{\partial\alpha_{j}}E\left[\alpha_{i}\alpha_{j}\right] \qquad (7-10)$$

在式(7-5)中保留二次项，可得结点位移二阶近似的均值和协方差为：

$$E\left[\delta\right]=\delta_{0}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{2}\delta}{\partial\alpha_{i}\partial\alpha_{j}}E\left[\alpha_{i}\alpha_{j}\right] \qquad (7-11)$$

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\delta,\delta^{T}\right)= & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\delta}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial\delta^{T}}{\partial\alpha_j}E\left[\alpha_i\alpha_j\right]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\delta}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial^{2}\delta^{T}}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}E\left[\alpha_i\alpha_j\alpha_k\right] \\
& +\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^{2}\delta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\cdot\frac{\partial^{2}\delta^{T}}{\partial\alpha_k\partial\alpha_l}\left(E\left[\alpha_i\alpha_l\right]E\left[\alpha_j\alpha_k\right]+E\left[\alpha_i\alpha_k\right]E\left[\alpha_j\alpha_l\right]\right)
\end{aligned}
\qquad (7\text{–}12)
$$

摄动随机有限元法是通过随机变量在其均值附近产生的随机扰动，得到结构位移响应的均值和协方差。因此概念明确，方法清楚。又因为是用泰勒级数将随机函数展开，故可根据对问题的精度要求取舍非线性项，所以该方法应用较广。

应用摄动随机有限元法分析工程实际问题，由式(7-6)求得确定性位移δ_0以后，再求解式(7-7)中的n阶线性方程组和式(7-8)中的n^2阶的线性方程组，得到结点位移对各随机变量的一阶、二阶偏导数，然后代入式(7-11)和式(7-12)求得位移的均值和方差。

注意到各线性方程组中的系数矩阵 K_0 均相同，因此求解上述递归方差组的计算工作量并不是很大。显然，采用一阶近似的方法计算响应的均值和协方差比较简单，计算效率也高，但要求摄动量是微小的（一般不超过均值的20%或30%），否则，得到的结果误差较大。

二阶近似得到的结果精度较高，对摄动量的要求亦可适当放宽，特别是对于非线性问题，能够得到较好的结果，但是二阶近似算法的公式复杂，对于随机变量较多的情况，计算效率较低，使这一算法的实际应用受到影响。

返回目录

7.3 纽曼（Neumann）随机有限元法

Neumann随机有限元法是将Neumann级数展开式与随机有限元相结合而形成的一种方法。Neumann级数展开式的形式如下：

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \ldots + T^k + \ldots \qquad (7\text{–}13)$$

式中I为恒同算子，T为 $\|T\| \prec 1$ 的线性算子。

对于有限元支配方程$K\delta = F$，不妨设荷载F为确定性量。设劲度矩阵K可表示为 $K = K_0 + \Delta K$ 则 $K^{-1} = (K_0 + \Delta K)$ 将其展开为Neumann级数得：

$$
\begin{aligned}
K^{-1} &= (K_0 + \Delta K)^{-1} = K_0^{-1}\left(I + K_0^{-1}\Delta K\right)^{-1} \\
&= K_0^{-1}(I + P)^{-1} = K_0^{-1}\left(I - P + P^2 - P^3 + \ldots\right)
\end{aligned}
\quad (7\text{−}14)
$$

式中K_0为随机变量均值处的劲度矩阵，ΔK为劲度矩阵K_0在附近的波动量，$P = K_0^{-1}\Delta K$