

2024 届新疆乌鲁木齐市 70 中高三下学期 4 月联考数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $g(x) = f(2x) + x^2$ 为奇函数, 且 $f(2) = 3$, 则 $f(-2) =$ ()
A. 2 B. 5 C. 1 D. 3
2. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | x^2 - 7x + 10 < 0\}$, 则 $\complement_U(A \cap B) =$ ()
A. $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ B. $(-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$
C. $(-\infty, 3] \cup [5, +\infty)$ D. $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$
3. $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^6$ 的展开式中, 含 x^3 项的系数为 ()
A. -60 B. -12 C. 12 D. 60
4. 已知七人排成一排拍照, 其中甲、乙、丙三人两两不相邻, 甲、丁两人必须相邻, 则满足要求的排队方法数为 ()。
A. 432 B. 576 C. 696 D. 960
5. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 $f(x)$ 的最小值为 ()
A. $2 - \sqrt{2}$ B. 1 C. 0 D. $-\sqrt{2}$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) < 0$ 恰有 1 个整数解, 则实数 a 的最大值为 ()
A. 2 B. 3 C. 5 D. 8
7. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, $a_4 = 8$, 则 $a_5 =$ ()
A. $\frac{21}{2}$ B. 9 C. $\frac{17}{2}$ D. 7

8. 若 $\left(2x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的二项式展开式中二项式系数的和为 32, 则正整数 n 的值为 ()

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

9. 已知角 α 的顶点与坐标原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P(-3, -4)$, 则 $\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{24}{7}$ B. $-\frac{17}{31}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $\frac{17}{31}$

10. 已知 $A = \{x \mid |x| < 1\}$, $B = \{x \mid 2^x < 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

11. 已知 $A = \frac{\sin(k\pi + \alpha)}{\sin \alpha} + \frac{\cos(k\pi + \alpha)}{\cos \alpha} (k \in \mathbf{Z})$, 则 A 的值构成的集合是 ()

- A. $\{1, -1, 2, -2\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{2, -2\}$ D. $\{1, -1, 0, 2, -2\}$

12. M 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点, N 是圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称圆上的一点, 则 $|MN|$ 最小值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{11}}{2} - 1$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $2\sqrt{2} - 1$ D. $\frac{3}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在回归分析的问题中, 我们可以通过对数变换把非线性回归方程 $y = c_1 e^{c_2 x}$, ($c_1 > 0$) 转化为线性回归方程, 即两边取对数, 令 $z = \ln y$, 得到 $z = c_2 x + \ln c_1$. 受其启发, 可求得函数 $y = x^{\log_3(9x)}$ ($x > 0$) 的值域是_____.

14. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AD = AC = BC = BD = 3$, $AB = CD = 2$, 则该三棱锥的外接球的表面积是_____.

15. 袋中装有两个红球、三个白球, 四个黄球, 从中任取四个球, 则其中三种颜色的球均有的概率为_____.

16. 已知 m, n 为正实数, 且 $m + n = mn$, 则 $m + 2n$ 的最小值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{2bx}$, 其中 $a > 0, b > 0$.

(1) ①求函数 $f(x)$ 的单调区间;

②若 x_1, x_2 满足 $|x_i| > \frac{1}{\sqrt{a}} (i=1, 2)$, 且 $x_1 + x_2 > 0, x_2 > 0$. 求证: $f(x_1) + 2f(x_2) > \frac{\sqrt{a}}{b}$.

(2) 函数 $g(x)=\frac{1}{2}ax^2-\ln x$. 若 $x_1,x_2\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 对任意, $x_1\neq x_2$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|>|g(x_1)-g(x_2)|$, 求 $b-a$ 的最大值.

18. (12 分) 唐诗是中国文学的瑰宝.为了研究计算机上唐诗分类工作中检索关键字的选取, 某研究人员将唐诗分成 7 大类别, 并从《全唐诗》48900 多篇唐诗中随机抽取了 500 篇, 统计了每个类别及各类别包含“花”、“山”、“帘”字的篇数, 得到下表:

	爱情婚姻	咏史怀古	边塞战争	山水田园	交友送别	羁旅思乡	其他	总计
篇数	100	64	55	99	91	73	18	500
含“山”字的篇数	51	48	21	69	48	30	4	271
含“帘”字的篇数	21	2	0	0	7	3	5	38
含“花”字的篇数	60	6	14	17	32	28	3	160

(1) 根据上表判断, 若从《全唐诗》含“山”字的唐诗中随机抽取一篇, 则它属于哪个类别的可能性最大, 属于哪个类别的可能性最小, 并分别估计该唐诗属于这两个类别的概率;

(2) 已知检索关键字的选取规则为:

- ①若有超过 95%的把握判断“某字”与“某类别”有关系, 则“某字”为“某类别”的关键字;
- ②若“某字”被选为“某类别”关键字, 则由其对应列联表得到的 K^2 的观测值越大, 排名就越靠前;

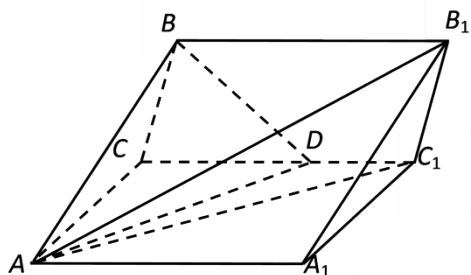
设“山”“帘”“花”和“爱情婚姻”对应的 K^2 观测值分别为 k_1 , k_2 , k_3 .已知 $k_1\approx 0.516$, $k_2\approx 31.962$, 请完成下面列联表, 并从上述三个字中选出“爱情婚姻”类别的关键字并排名.

	属于“爱情婚姻”类	不属于“爱情婚姻”类	总计
含“花”字的篇数			
不含“花”的篇数			
总计			

附: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.05	0.025	0.010
k	3.841	5.024	6.635

19. (12分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知四边形 AA_1C_1C 为矩形, $AA_1 = 6$, $AB = AC = 4$, $\angle BAC = \angle BAA_1 = 60^\circ$, $\angle A_1AC$ 的角平分线 AD 交 CC_1 于 D .



(1) 求证: 平面 $BAD \perp$ 平面 AA_1C_1C ;

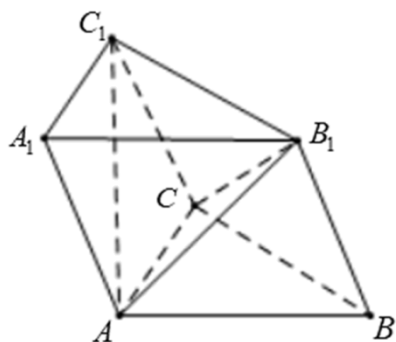
(2) 求二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的余弦值.

20. (12分) 已知点 P 是抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2 - 3$ 的顶点, A, B 是 C 上的两个动点, 且 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = -4$.

(1) 判断点 $D(0,1)$ 是否在直线 AB 上? 说明理由;

(2) 设点 M 是 $\triangle PAB$ 的外接圆的圆心, 点 M 到 x 轴的距离为 d , 点 $N(1,0)$, 求 $|MN| - d$ 的最大值.

21. (12分) 如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle B_1BC$ 是全等的等边三角形.



(1) 求证: $BC \perp AB_1$;

(2) 若 $\cos \angle B_1BA = \frac{1}{4}$, 求二面角 $B-B_1C-A$ 的余弦值.

22. (10分) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程是 $\rho \cos^2 \theta - 4 \sin \theta = 0$

, 直线 l_1 和直线 l_2 的极坐标方程分别是 $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 和 $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ($\rho \in \mathbf{R}$), 其中 $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

(1) 写出曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l_1 和直线 l_2 分别与曲线 C 交于除极点 O 的另外点 A , B , 求 $\triangle OAB$ 的面积最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

由函数 $g(x) = f(2x) + x^2$ 为奇函数, 则有 $g(-1) + g(1) = 0 \Rightarrow f(-2) + 1 + f(2) + 1 = 0$, 代入已知即可求得.

【详解】

$$g(-1) + g(1) = 0 \Rightarrow f(-2) + 1 + f(2) + 1 = 0 \Rightarrow f(-2) = -5.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查奇偶性在抽象函数中的应用, 考查学生分析问题的能力, 难度较易.

2、D

【解析】

先计算集合 B , 再计算 $A \cap B$, 最后计算 $\complement_U(A \cap B)$.

【详解】

$$\text{解: } \complement_U B = \{x \mid x^2 - 7x + 10 < 0\}$$

$$\therefore B = \{x \mid 2 < x < 5\},$$

$$\complement_U A = \{x \mid 3 \leq x < 7\}$$

$$\therefore A \cap B = \{x \mid 3 \leq x < 5\},$$

$$\therefore \complement_U(A \cap B) = (-\infty, 3) \cup [5, +\infty).$$

故选: D.

【点睛】

本题主要考查了集合的交，补混合运算，注意分清集合间的关系，属于基础题.

3、B

【解析】

在二项展开式的通项公式中，令 x 的幂指数等于 3，求出 r 的值，即可求得含 x^3 项的系数.

【详解】

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^6 \text{ 的展开式通项为 } T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r = C_6^r \cdot (-2)^r \cdot x^{6-3r},$$

令 $6-3r=3$ ，得 $r=1$ ，可得含 x^3 项的系数为 $C_6^1 \times (-2) = -12$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查二项式定理的应用，二项展开式的通项公式，二项式系数的性质，属于基础题.

4、B

【解析】

先把没有要求的 3 人排好，再分如下两种情况讨论：1.甲、丁两者一起，与乙、丙都不相邻，2.甲、丁一起与乙、丙二者之一相邻.

【详解】

首先将除甲、乙、丙、丁外的其余 3 人排好，共有 A_3^3 种不同排列方式，甲、丁排在一起共有 A_2^2 种不同方式；

若甲、丁一起与乙、丙都不相邻，插入余下三人产生的空档中，共有 A_4^3 种不同方式；

若甲、丁一起与乙、丙二者之一相邻，插入余下三人产生的空档中，共有 $C_2^1 A_4^2$ 种不同方式；

根据分类加法、分步乘法原理，得满足要求的排队方法数为 $A_3^3 A_2^2 (A_4^3 + C_2^1 A_4^2) = 576$ 种.

故选：B.

【点睛】

本题考查排列组合的综合应用，在分类时，要注意不重不漏的原则，本题是一道中档题.

5、B

【解析】

$$f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2, x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], -\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \text{ 利用整体换元法求最小值.}$$

【详解】

$$\text{由已知, } f(x) = 1 + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = \sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2,$$

又 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $\therefore -\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 故当 $2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 1$.

故选: B.

【点睛】

本题考查整体换元法求正弦型函数的最值, 涉及到二倍角公式的应用, 是一道中档题.

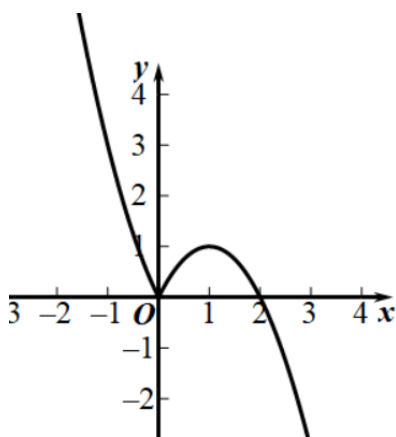
6、D

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象, 利用一元二次不等式解法可得解集, 再利用数形结合即可得出.

【详解】

解: 函数 $f(x)$, 如图所示



$$[f(x)]^2 + af(x) < 0 \Rightarrow f(x)(f(x) + a) < 0$$

当 $a > 0$ 时, $-a < f(x) < 0$,

由于关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) < 0$ 恰有 1 个整数解

因此其整数解为 3, 又 $f(3) = -9 + 6 = -3$

$\therefore -a < -3 < 0$, $-a \geq f(4) = -8$, 则 $3 < a \leq 8$

当 $a = 0$ 时, $[f(x)]^2 < 0$, 则 $a = 0$ 不满足题意;

当 $a < 0$ 时, $0 < f(x) < -a$

当 $0 < -a \leq 1$ 时, $0 < f(x) < -a$, 没有整数解

当 $-a > 1$ 时, $0 < f(x) < -a$, 至少有两个整数解

综上, 实数 a 的最大值为 8

故选：D

【点睛】

本题主要考查了根据函数零点的个数求参数范围，属于较难题.

7、A

【解析】

先由题意可得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，再根据 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ， $a_4 = 8$ ，可求出公差，即可求出 a_5 .

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

$$\text{Q } a_1 + a_2 + a_3 = 9, \quad a_4 = 8,$$

$$\therefore 3a_1 + 3d = 9, \quad a_1 + 3d = 8,$$

$$\therefore d = \frac{5}{2},$$

$$\therefore a_5 = a_4 + d = 8 + \frac{5}{2} = \frac{21}{2},$$

故选：A .

【点睛】

本题主要考查了等差数列的性质和通项公式的求法，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题.

8、C

【解析】

由二项式系数性质， $(a+b)^n$ 的展开式中所有二项式系数和为 2^n 计算.

【详解】

$$\left(2x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n \text{ 的二项展开式中二项式系数和为 } 2^n, \therefore 2^n = 32, \therefore n = 5.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查二项式系数的性质，掌握二项式系数性质是解题关键.

9、B

【解析】

根据三角函数定义得到 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ，故 $\tan 2\alpha = -\frac{24}{7}$ ，再利用和差公式得到答案.

【详解】

∵角 α 的终边过点 $P(-3, -4)$, $\therefore \tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{24}{7}$.

$$\therefore \tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{24}{7} + 1}{1 + \frac{24}{7} \times 1} = -\frac{17}{31}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查了三角函数定义, 和差公式, 意在考查学生的计算能力.

10、D

【解析】

分别解出集合 A 、 B , 然后求并集.

【详解】

$$\text{解: } A = \{x \mid |x| < 1\} = \{x \mid -1 < x < 1\}, \quad B = \{x \mid 2^x < 1\} = \{x \mid x < 0\}$$

$$A \cup B = (-\infty, 1)$$

故选: D

【点睛】

考查集合的并集运算, 基础题.

11、C

【解析】

对 k 分奇数、偶数进行讨论, 利用诱导公式化简可得.

【详解】

$$k \text{ 为偶数时, } A = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 2; \quad k \text{ 为奇数时, } A = -\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = -2, \text{ 则 } A \text{ 的值构成的集合为 } \{2, -2\}.$$

【点睛】

本题考查三角式的化简, 诱导公式, 分类讨论, 属于基本题.

12、C

【解析】

求出点 $(1, 2)$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称点 C 的坐标, 进而可得出圆 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的

对称圆 C 的方程, 利用二次函数的基本性质求出 $|MC|$ 的最小值, 由此可得出 $|MN|_{\min} = |MC|_{\min} - 1$, 即可得解.

【详解】

如下图所示:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/076023004052010211>