

## 《高等代数》试题 1

一、选择题：（ $2 \times 3 = 6$  分）

1、A, B, C 是同阶方阵，且  $ABC = I$ ，则必有（ ）

- (A)  $ACB = I$                       (B)  $BAC = I$   
 (C)  $CAB = I$                       (D)  $CBA = I$

2、设  $\alpha$  为任意非零向量，则  $\alpha$  （ ）。

- (A) 线性相关    (B) 线性无关    (C) 线性相关或线性无关

3、设向量组 I ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ), II ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s$ ) 则必须有（ ）。

- (A) I 无关  $\Rightarrow$  II 无关                      (B) II 无关  $\Rightarrow$  I 无关  
 (C) I 无关  $\Rightarrow$  II 相关                      (D) II 相关  $\Rightarrow$  I 相关

二、填空：

1、单个向量  $\alpha$  线性无关的充要条件是\_\_\_\_\_。

2、A 是  $n \times n$  矩阵，对任何  $b_{n \times 1}$  矩阵，方程  $AX=b$  都有解的充要条件是

\_\_\_\_\_。

3、叙述替换定理\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_。

三、计算题：

$$4、\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

四、证明题：

1、证明向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  ( $r \geq 2$ ) 线性相关必要且只要其中某一个向量是其余向量的线性组合。

2、设在向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  中， $\alpha_1 \neq 0$  并且每一  $\alpha_i$  都不能表成它的前  $i-1$  个向量

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$  的线性组合，证明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关。

3、设向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示，证明表法唯一的充要条件是

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关。

## 《高等代数》试题 2

### 一、单选题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设  $A, B$  为数域  $F$  上的  $n$  阶方阵，下列等式成立的是（ ）。

- A、 $\det(A+B) = \det A + \det B$                       B、 $\det(kA) = k \det A$   
C、 $\det(kA) = k^{n-1} \det A$                       D、 $\det(AB) = \det A \det B$

2、如果  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ，那么矩阵  $A$  的行列式  $|A|$  应该有（ ）。

- A、 $|A| = 0$                       B、 $|A| \neq 0$   
C、 $|A| = k, k > 1$                       D、 $|A| = k, k < -1$

3、设  $A$  为数域  $F$  上的  $n$  阶方阵，满足  $A^2 - 2A = 0$ ，则下列矩阵哪个可逆（ ）。

- A、 $A$                       B、 $A - I$                       C、 $A + I$                       D、 $A - 2I$

4、以下乘积中（ ）是 5 阶行列式  $D = |a_{ij}|$  中取负号的项。

- A、 $a_{31} a_{45} a_{12} a_{24} a_{53}$                       B、 $a_{45} a_{54} a_{42} a_{12} a_{33}$   
C、 $a_{23} a_{51} a_{32} a_{45} a_{14}$                       D、 $a_{13} a_{32} a_{24} a_{45} a_{54}$

5、设  $A^*$  为  $n$  阶方阵  $A$  的伴随矩阵，则  $||A^*|A| =$ （ ）。

- A、 $|A|^2$                       B、 $|A|^n$                       C、 $|A|^{n^2-n}$                       D、 $|A|^{n^2-n+1}$

### 二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设  $n$  级排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  的反数的反序数为  $k$ ，则  $(i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n \dots i_2 i_1) =$  \_\_\_\_\_。

2、设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & - \\ 3 & 4 & - \\ 5 & - & 3 \end{pmatrix}$ ， $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵，则

$(A^*)^{-1} =$  \_\_\_\_\_。

3、设  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  使得  $\partial^0(f(x)) \leq 2$ , 且  $f(1)=1, f(-1)=3, f(2)=3$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$\underline{\hspace{2cm}}^\circ$ .

4、设  $f(x) = x^4 + x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = x^3 + x - 2$  若  $(f(x), g(x)) = (g(x), f(x))$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$

$\underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

5、设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ , 则  $R(A) = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ .

### 三、计算题 (共 59 分)

1、令  $F$  是有理数域, 求出  $F[x]$  的多项式  $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ ,  $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$  的最大公因式  $(f(x), g(x))$ , 并求出  $u(x), v(x)$  使得  $f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f(x), g(x))$ . (12 分)

2、求多项式  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$  的有理根. (7 分)

3、用初等对称多项式表示  $n$  元对称多项式  $f = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^3 x_j^2$ . (10 分)

4、问当  $\lambda$  取何值时, 线性方程组  $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$  有唯一解? 无解? 有无

穷多解? 并在有解时写出解. (10 分)

5、计算  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & a\Lambda a \\ a & x & a\Lambda a \\ M & M & M \\ & & M \\ a & a & a\Lambda x \end{vmatrix}$$

(6 分)

6、设矩阵  $A=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

, 问矩阵  $A$  是否可逆? 若可逆, 求出  $A^{-1}$ 。(8 分)

7、问  $\lambda$  取何值时, 多项式  $f(x)=x^3-\lambda x+2$ ,

$g(x)=x^2+\lambda x+2$

有公根。

(6 分)

四、证明题 (共 6 分)

设  $p(x)$  是  $F[x]$  中的一个次数大于零的多项式。如果  $\forall f(x), g(x) \in F[x]$ , 只要  $p(x) \mid f(x)g(x)$  就有  $p(x) \mid f(x)$  或  $p(x) \mid g(x)$ , 证明:  $p(x)$  不可约。

(6 分)

《高等代数》试题 3

一、单选题 (每小题 4 分, 共 20 分)

- 1、设  $A, B$  为数域  $F$  上的  $n$  阶方阵, 下列等式成立的是 ( )。

A、 $\det(A+B) = \det A + \det B$

C、 $\det(kA) = k^{n-1} \det A$

B、 $\det(kA) = k \det A$

D、 $\det(AB) = \det A \det B$
- 2、若矩阵  $A, B$  满足  $AB=0$ , 则 ( )。

A、 $A=0$  或  $B=0$

B、 $A \neq 0$  且  $B \neq 0$

C、 $A=0$  且  $B=0$  D、以上结论都不正确

3、如果矩阵  $A$  的秩等于  $r$ ，则（ ）。

- A、至多有一个  $r$  阶子式不为零
B、所有  $r$  阶子式都不为零
- C、所有  $r+1$  阶子式全为零，而至少有一个  $r$  阶子式不为零
- D、所有低于  $r$  阶子式都不为零

4、设  $n$  阶矩阵  $A$  可逆( $n \geq 2$ ),  $A^*$  是矩阵  $A$  的伴随矩阵, 则结论正确的是( )。

- A、 $(A^*)^* = A^{|n-1|} A$ 
B、 $(A^*)^* = |A|^{n+1} A$
- C、 $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ 
D、 $(A^*)^* = |A|^{n+2} A$

5、以下乘积中（ ）是 4 阶行列式  $D=|a_{ij}|$  中取负号的项。

- A、 $a_{11} a_{23} a_{33} a_{44}$ 
B、 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$
- C、 $a_{12} a_{23} a_{31} a_{44}$ 
D、 $a_{23} a_{41} a_{32} a_{11}$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设  $n$  级排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  的反数的反序数为  $k$ ，则  $\tau(i_n i_{n-1} \dots i_2 i_1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵，则

$(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3、设  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  使得  $\partial^0(f(x)) \leq 2$ ，且  $f(1) = 1$ ， $f(-1) = 3$ ， $f(2) = 3$ ，  
 则  $f(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。  
 \_\_\_\_\_。

4、当  $a, b$  满足条件\_\_\_\_\_时，多项式  $f(x) = x^3 + 3ax + b$  才能有重因式。

5、设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ , 则  $R(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、计算题 (共 59 分)

1、设  $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ ,  $g(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x^2$  求出  $u(x), v(x)$ , 使得  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$ 。(12 分)

2、求多项式  $f(x) = x^5 - x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x - 3$  的有理根。(7 分)

3、用初等对称多项式表示  $n$  元对称多项式  $f = \sum x_1^2 x_2^2$ 。(10 分)

4、问  $\lambda$  取何值时, 线性方程组  $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$  有唯一解? 无解?

有无穷多解? 并在有解时写出解。(10 分)

5、计算  $n$  阶行列式  $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \Lambda & a_n \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & 1+a_n \end{vmatrix}$  (6 分)

6、设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , 问矩阵  $A$  是否可逆? 若可逆, 求出  $A^{-1}$ 。(8 分)

7、问  $\lambda$  取何值时，多项式  $f(x) = x^3 - \lambda x + 2$ ， $g(x) = x^2 + \lambda x + 2$  有公根。

(6 分)

#### 四、证明题 (共 6 分)

设  $p(x)$  是多项式  $f(x)$  的一个  $k$  ( $k > 1$ ) 重因式，那么  $p(x)$  是  $f(x)$  的导数的一个  $k-1$  重因式。(6 分)

### 《高等代数》试题 4

#### 一、选择题。(每小题 5 分，共 15 分)

1、下列集合中，是  $R^3$  的子空间的为 ( )，其中  $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$

(A)  $\{\alpha \mid x_3 \geq 0\}$

(B)  $\{\alpha \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

(C)  $\{\alpha \mid x_3 = 1\}$

(D)  $\{\alpha \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\}$

2、设  $\alpha, \beta$  是相互正交的  $n$  维实向量，则下列各式中错误的是 ( )。

(A)  $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$

(B)  $|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta|$

(C)  $|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$

(D)  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

3、设  $A$  是  $m \times n$  矩阵，若 ( )。则  $AX=0$  有非零解。

(A)  $m < n$

(B) 秩  $A = n$

(C)  $m > n$

(D) 秩  $A = m$

4、对于  $n$  阶实对称矩阵  $A$ ，以下结论正确的是 ( )。

(A) 一定有  $n$  个不同的特征根。 (B)  $\exists$  正交矩阵  $P$ ，使  $P'AP$  成对角

形。

(C) 它的特征根一定是整数。 (D) 属于不同特征根的特征向量必线

性无关，但不一定正交

5、设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  线性相关，则 ( )。

(A)  $\alpha_1$  必可由  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示。

(B)  $\alpha_4$  必可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示

(C)  $\alpha_4$  必可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

(D)  $\alpha_4$  必不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表

示。

#### 二、填空题 (每小题 3 分共 15 分)

$\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_<sup>o</sup>  
 2 、 设  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  , 则 在  
 $R^n$  中,  $\langle \alpha, \beta \rangle =$  \_\_\_\_\_<sup>o</sup>

(不同构, 同构)

5、令  $S$  是数域  $F$  上一切满足条件  $A^1 = A$  的  $n$  阶矩阵  $A$  所成的向量空间, 则  $\dim S =$

1、 (15 分) 设非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + a x_3 = b_1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

试问 (1)  $a, b$  取何值时, 方程组有唯一解? 并求出唯一解。

(2)  $a, b$  取何值时, 方程组有无穷多解? 并用基础解系表示出来。

(3)  $a_1, b_1$  取何值时, 方程组无解?

2、 (5 分) 问  $t$  取何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \text{ 正定?}$$

3、(10 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , 求一个正交矩阵  $u$ , 使  $u^T A u$  为对角形矩阵。

4、(10 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , 用初等变换求一可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1} A P$  是

对角形式。

5、(15 分) 设  $R^3$  中的两个基分别为  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求由基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵。

已知向量  $\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的坐标为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 求  $\alpha$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标。

#### 四、证明题 (共 15 分)

1、设  $u$  是一个正交矩阵, 证明(1) $u$  的行列等于 1 或-1; (2)  $u$  的特征根的模等于 1; (3)  $u$  的伴随矩阵  $U^*$  也是正交矩阵。(8 分)

2、全  $t$  是数域  $F$  上向量空间  $V$  的一个线性变换, 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  分别是  $t$  的属于互不相同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的特征向量, 那么  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  线性无关。(7 分)

#### 《高等代数》试题 5

##### 一、选择题。(每小题 5 分, 共 15 分)

1、设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  都是三维向量空间  $V$  的基，且

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \text{ 则矩阵 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 是由基}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到 ( ) 的过渡矩阵。

- (A)  $\beta_2, \beta_1, \beta_3$       (B)  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$       (C)  $\beta_2, \beta_3, \beta_1$       (D)  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$

2、 $n$  阶方阵  $A$  具有  $n$  个不同的特征值是  $A$  与对角阵相似的 ( )。

- (A) 充分必要条件      (B) 充分而非必要条件  
(C) 必要而非充分条件      (D) 既非充分也非必要条件

3、设  $\alpha, \beta$  是相互正交的  $n$  维实向量，则下列各式中错误的是 ( )。

- (A)  $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$       (B)  $|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta|$   
(C)  $|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$       (D)  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

4、对于  $n$  阶实对称矩阵  $A$ ，以下结论正确的是 ( )。

- (A) 一定有  $n$  个不同的特征根。      (B)  $\exists$  正交矩阵  $P$ ，使  $P'AP$  成对角形。  
(C) 它的特征根一定是整数。      (D) 属于不同特征根的特征向量必线性无关，但不一定正交

5、设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  线性相关，则 ( )。

- (A)  $\alpha_1$  必可由  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示。      (B)  $\alpha_4$  必可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。  
(C)  $\alpha_4$  必可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。      (D)  $\alpha_4$  必不可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

二、填空题 (每小题 3 分共 15 分)

1、设 $\sigma$  为变换， $V$  为欧氏空间，若 $\forall \xi, \eta \in V$  都有  $\langle \sigma(\xi), \sigma(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ ，  
 则 $\sigma$  为

\_\_\_\_\_变换。

2、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_在  
 $R_3$ 中,  $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (0, 1, 2)$ , 则  $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle =$   
 \_\_\_\_\_。

3、令  $S$  是数域  $F$  上一切满足条件  $A^T = -A$  的  $n$  阶矩阵  $A$  所成的向量空间，  
 则  $\dim S =$

\_\_\_\_\_。

4、 $n+1$  个  $n$  维向量构成的向量的一定线性的。  
 \_\_\_\_\_。

5、设  $V$  与  $W$  都是  $F$  上的两个有限维向量空间，则  
 $V \cong W \Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_。

三、计算题 （共 55 分）

1、（15）设非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + a_1 x_3 = b_1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

- 试问（1） $a_1, b_1$  取价值时，方程组有唯一解？并求出唯一解。  
 （2） $a_1, b_1$  取价值时，方程组有无穷多解？并用基础解系表示出来。  
 （3） $a_1, b_1$  取价值时，方程组无解？

2、（5 分） $\lambda$  取何值时，

实二次型  $f = \lambda (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1 x_3 - 2x_2 x_3 - 2x_3 x_1 + x_4^2$  是正定的？

3、(10 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ , 求一个正交矩阵  $u$ , 使  $u^T A u$  为对角

形矩阵。

4、(10 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ , 用初等变换求一可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1} A P$

是对角形式。

5、(15 分) 设  $R^3$  中的两个基分别为  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) 求由基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵。

(2) 已知向量  $\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的坐标为  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 求  $\alpha$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

下的坐标。

#### 四、证明题 (共 15 分)

1、(8 分) 设  $u$  是一个正交矩阵, 且  $u \neq 1$ , 证明

①  $u$  有一个特征根等于 1。

②  $u$  的特征多项式有形状  $f(x) = x^3 - tx^2 + tx - 1$ , 这里  $-1 \leq t \leq 3$

2、(7 分) 全  $\sigma$  是数域  $F$  上向量空间  $V$  的一个线性变换, 如果  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  分

别是  $\sigma$  的属于互不相同的特征值  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  的特征向量, 那么  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  线性无关。

## 《高等代数》试题 6

### 一、选择题 ( $2 \times 3 = 6$ 分)

1、A 是 n 阶矩阵, K 是非零常数, 则  $|KA| = ( \quad )$

- (A)  $K|A|$       (B)  $|K||A|$       (C)  $K^n|A|$       (D)  $|K|^n|A|$

2、A, B, C 是同阶方阵, 且  $ABC = I$ , 则必有 ( )

- (A)  $ACB = I$       (B)  $BAC = I$   
(C)  $CAB = I$       (D)  $CBA = I$

3、A, B 是 n 阶方阵, 则下列结论成立得是 ( )

- (A)  $AB \neq 0 \Leftrightarrow A \neq 0$  且  $B \neq 0$       (B)  $|A|=0 \Leftrightarrow A=0$   
(C)  $|AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0$  或  $|B|=0$       (D)  $A=I \Leftrightarrow |A|=1$

### 二、填空 ( $3 \times 4 = 12$ 分)

$$1、D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \Lambda & 2 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & n-1 & \Lambda & 0 & 0 \\ n & 0 & \Lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$2、f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}, \text{ 则 } f(4) = \underline{\hspace{10cm}}$$

3、A, B, C 是同阶矩阵,  $A \neq 0$ , 若  $AB=AC$ , 必有  $B=C$ , 则 A 应是                     

$$4、\text{已知 } A = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } k \neq 0, \text{ 则 } A^{-1} = \underline{\hspace{10cm}}$$

三、证明，行列式
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
(10 分)

四 计算 n 阶行列式 （6×9=54 分）

1
$$\begin{vmatrix} x-a & a & a & \Lambda & a \\ a & x-a & a & \Lambda & a \\ a & a & x-a & \Lambda & a \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a & a & a & \Lambda & x-a \end{vmatrix}$$

2
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

3 把行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
依第三行展开然后加以计算

4
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}.$$

5
$$\begin{vmatrix} 0 & y & 0 & x \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$6、D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \Lambda & 1 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_1 a_2 \Lambda a_n \neq 0)$$

五、 $\lambda$  取怎样的数值时,线性方程组 
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有唯一解, 没有解,

有无穷多解? (10 分)

六 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  的逆矩阵. (8 分)

### 《高等代数》试题 7

一、问下列向量组是否线性相关?

(1)  $(3, 1, 4), (2, 5, -1), (4, -3, 7)$

(2)  $(2, 0, 1), (0, 1, -2), (1, -1, 1)$

二、设  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关, 证明  $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$  也线性无关。

三、考虑  $R^3$  中以下两组向量  $\{\alpha_1 = (-3, 1, -2), \alpha_2 = (1, -1, 1), \alpha_3 = (2, 3, -1)\};$

$\{\beta_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = (1, 2, 3), \beta_3 = (2, 0, 1)\}$  容易证明,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  和  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  都

是  $R^3$  的基. 求出由基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  到  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  的过渡矩阵.

四 求齐次线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$
 的一个基础解系.

五. 设  $F$  上三维向量空间的线性变换  $\sigma$  关于基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix},$$

求 $\sigma$ 关于基 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$ 的矩阵.

六 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ , 求矩阵 $T$ , 使 $T^{-1}AT$ 是对角形矩阵.

七 判断实二次形  $10x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$  是不是正定的.

八  $\lambda$ 取什么值时, 实二次形  $\lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_4^2$  是正定的.

九 证明:两个对称变换的和还是一个对称变换, 两个对称变换的乘积是不是对称变换?

找出两个对称变换的乘积是对称变换的一个充要条件.

十 证明题:设向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 线性无关, 而 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta\}$ 线性相关, 那么

$\beta$ 一定可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

### 《高等代数》试题 8

一、(10分) 设  $(f(x), g(x)) = 1$ , 试证

(1)  $(f(x), f(x) + g(x)) = 1$

(2)  $(f(x)g(x), f(x) + g(x)) = 1$

二、(10分) 求  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$  的有理根。

三、(20分) 计算下列行列式

(1)  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$

(2)  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix},$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \Lambda & a \\ a & x-a & a & \Lambda & a \\ a & a & x-a & \Lambda & a \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a & a & a & \Lambda & x-a \end{vmatrix}$$

四 (10 分) 试证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

五 (15 分) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ , 请用两种方法 (行初等变换, 伴随矩阵)

求  $A^{-1}$ 。

六 (10 分) 用克莱姆规则解方程组  $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

七 (15 分) 设  $P = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$  是一个  $n$  阶方阵, 其中  $A, B$  分别

是  $r$  阶,  $s$  阶可逆阵,  $r+s=n$ ,

(1) 证明  $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$ ,

(2) 设  $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 求  $P^{-1}$ 。

八、计算 (10 分)

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & a+b \end{vmatrix}, \text{ (其中 } a \neq b \text{)}$$

九、计算 (10 分)

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \Lambda & y & y \\ z & x & y & \Lambda & y & y \\ z & z & x & \Lambda & y & y \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ z & z & z & \Lambda & x & y \\ z & z & z & \Lambda & z & x \end{vmatrix}$$

### 《高等代数》试题 9

一、选择题: (2×4=8 分)

1、A, B, C 是同阶方阵, 且  $ABC = I$ , 则必有 ( )

- (A)  $ACB = I$  (B)  $BAC = I$   
(C)  $CAB = I$  (D)  $CBA = I$

2、A, B 都是 n 阶方阵, 且 A 与 B 有相同的特征值, 则 ( )

- (A) A 相似于 B (B)  $A = B$   
(C) A 合同于 B (D)  $|A| = |B|$

3、A 是 n 阶实方阵, 则 A 是正交矩阵的充要条件是 ( )

- (A)  $AA^{-1} = I$  (B)  $A = A'$   
(C)  $A^{-1} = A'$  (D)  $A^2 = I$

4、设 A 是 n 阶方阵, 那么  $AA'$  是 ( )

- (A) 对称矩阵 (B) 反对称矩阵  
(C) 可逆矩阵 (D) 对角矩阵

二、填空题: (3×5=15 分)

1、A 相似于单位矩阵, 则  $A =$ \_\_\_\_\_.

2、A 满足  $A^2 + 2A + I = 0$ , 则 A 有特征值\_\_\_\_\_.

3、  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}$  是正定阵，则 k 满足条件\_\_\_\_\_.

4、 任一个有限维的向量空间的基是\_\_\_\_\_的，但任两个基所含向量个数是\_\_\_\_\_.

三、计算题：

1、 判断实二次型  $10x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$  是不是正定的。

(8 分)

2、 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$  的特征根和相应的特征向量。(10 分)

3、 设 A 为 n 阶方阵，  $A^2 - 5A + 6E = 0$ ， 判断  $A+3E$  与  $A-3E$  是否一定可逆，如果可逆，求出其逆。(9 分)

4、 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$  求一个可逆矩阵 T，使  $T^{-1}AT$  是对角形矩

阵。(12 分)

5、 已知  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$ ,  $g(x) = x^2 - 3x - 1$ ，求  $f(x)$  被  $g(x)$  除所得的商式和余式。(8 分)

6、 令 F 是有理数域，求  $F[x]$  的多项式  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ ,  $g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$  的最大公因式。(12 分)

7、 在有理数域上分解多项式  $x^3 - 2x^2 - 2x + 1$  为不可约因式的乘积。(8 分)

8、 求多项式  $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$  的有理根。(10 分)

### 《高等代数》试题 10

一、选择题（每题 3 分，共 12 分）

1、 下列集合有（ ）个是  $R^n$  的子空间；

$$w_1 = \{\alpha = (x_1, x_2, \Lambda, x_n) \mid x_i \in R, x_1 + x_2 + \Lambda + x_n = 0\};$$

$$w_2 = \{\alpha = (x_1, x_2, \Lambda, x_n) \mid x_i \in R, x_1 = x_2 = \Lambda = x_n\};$$

$$w_3 = \{\alpha = (a, b, a, b, \Lambda, a, b) \mid a, b \in R\};$$

$$w_4 = \{\alpha = (x_1, x_2, \Lambda, x_n) \mid x_i \text{ 为整数}\};$$

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

2、(1) 若两个向量组等价，则他们所含向量的个数相同；

(2) 若向量组  $\{\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_r\}$  线性无关， $\alpha_{r+1}$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_r$  线性表出，

则向量组  $\{\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_{r+1}\}$  也线性无关；

(3) 设  $\{\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_r\}$  线性无关，则  $\{\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_{r-1}\}$  也线性无关；

(4)  $\{\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_r\}$  线性相关，则  $\alpha_r$  一定可由  $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_{r-1}$  线性表出；

以上说法正确的有 ( ) 个。

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

3、(1)  $n$  维向量空间  $V$  的任意  $n$  个线性无关的向量都可构成  $V$  的一个基；

(2) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n$  是向量空间  $V$  中的  $n$  个向量，且  $V$  中的每个向量都可由之

线性表示，则  $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n$  是  $V$  的一个基；

(3) 设  $\{\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n\}$  是向量空间  $V$  的一个基，如果  $\{\beta_1, \beta_2, \Lambda, \beta_n\}$  与

$\{\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n\}$  等价，则  $\{\beta_1, \beta_2, \Lambda, \beta_n\}$  也是  $V$  的一个基；

(4)  $n$  维向量空间  $V$  的任意  $n+1$  个向量线性相关；

以上说法中正确的有 ( ) 个。

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

4、(1) 线性变换  $\sigma$  的本征向量之和仍为  $\sigma$  的本征向量；

② 属于线性变换  $\sigma$  的同一本征值  $\lambda_0$  的本征向量的任一线性组合仍是  $\sigma$  的本征向量；

③ 相似矩阵有相同的特征多项式；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/076153225223010145>