

湖北省武汉市青山区 2022-2023 学年第二学期高三年级统练三数学试题试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\tan(\alpha - \pi) = -\frac{3}{4}$, 则 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 等于 ().

- A. $\pm\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{7}{5}$

2. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 2, \\ 3x-y \leq 6, \\ x-y \geq 0, \end{cases}$ 则 $3x+y$ 的最小值等于 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

3. 在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k

的星的亮度为 E_k ($k=1,2$). 已知太阳的星等是 -26.7 , 天狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ()

- A. $10^{10.1}$ B. 10.1 C. $\lg 10.1$ D. $10^{-10.1}$

4. 我国古代有着辉煌的数学研究成果，其中的《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《缉古算经》，有丰富多彩的内容，是了解我国古代数学的重要文献. 这 5 部专著中有 3 部产生于汉、魏、晋、南北朝时期. 某中学拟从这 5 部专著中选择 2 部作为“数学文化”校本课程学习内容，则所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的概率为 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{9}{10}$

5. 复数 $z = \frac{i}{2-i}$ (i 是虚数单位) 在复平面内对应的点在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

6. 已知函数 $f(x) = \sin(2019x + \frac{\pi}{4}) + \cos(2019x - \frac{\pi}{4})$ 的最大值为 M , 若存在实数 m, n , 使得对任意实数 x 总有

$f(m) \leq f(x) \leq f(n)$ 成立, 则 $M \cdot |m-n|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{2019}$ B. $\frac{2\pi}{2019}$ C. $\frac{4\pi}{2019}$ D. $\frac{\pi}{4038}$

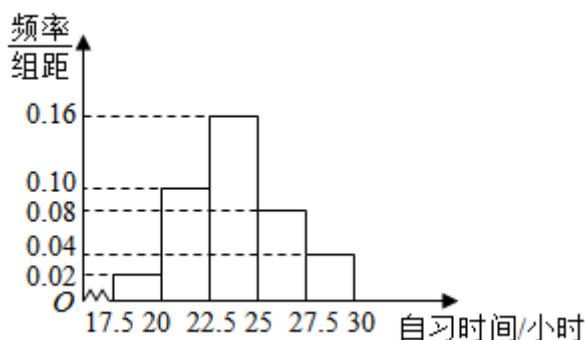
7. 若 $z = \frac{i^{2020} + 3i}{1+i}$, 则 z 的虚部是 ()

- A. i B. $2i$ C. -1 D. 1

8. 从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学, 物理, 化学, 生物四科竞赛, 其中甲不能参加生物竞赛, 则不同的参赛方案种数为

- A. 48 B. 72 C. 90 D. 96

9. 某学校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $17.5, 30]$, 样本数据分组为 $17.5, 20)$, $20, 22.5)$, $22.5, 25)$, $25, 27.5)$, $27.5, 30)$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ()



- A. 56 B. 60 C. 140 D. 120

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 3$, $S_5 = 35$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 ()

- A. -2 B. 2 C. 4 D. 7

11. 某市政府决定派遣 8 名干部 (5 男 3 女) 分成两个小组, 到该市甲、乙两个县去检查扶贫工作, 若要求每组至少 3 人, 且女干部不能单独成组, 则不同的派遣方案共有 () 种

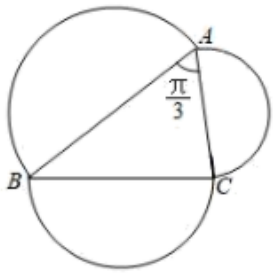
- A. 240 B. 320 C. 180 D. 120

12. 函数 $f(x) = 2\cos^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 2$ 的一个单调递增区间是 ()

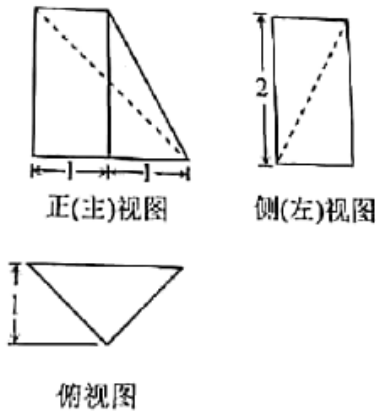
- A. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ B. $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ C. $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ D. $\left[\frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 定义在封闭的平面区域 D 内任意两点的距离的最大值称为平面区域 D 的“直径”. 已知锐角三角形的三个点 A , B , C , 在半径为 $\sqrt{3}$ 的圆上, 且 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, 分别以 $\triangle ABC$ 各边为直径向外作三个半圆, 这三个半圆和 $\triangle ABC$ 构成平面区域 D , 则平面区域 D 的“直径”的最大值是_____.



14. 某四棱锥的三视图如图所示, 那么此四棱锥的体积为_____.



15. 若向量 $\vec{a} = (x-1, 2)$ 与向量 $\vec{b} = (2, 1)$ 垂直, 则 $x =$ _____.

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数, 且 $f(x) > 0$, 对任意 $a > 0, b > 0$, 若经过点 $(a, f(a)), (b, -f(b))$ 的一次函数与 x 轴的交点为 $(c, 0)$, 且 a, b, c 互不相等, 则称 c 为 a, b 关于函数 $f(x)$ 的平均数, 记为 $M_f(a, b)$. 当

$f(x) =$ _____ ($x > 0$) 时, $M_f(a, b)$ 为 a, b 的几何平均数 $\sqrt{ab}$. (只需写出一个符合要求的函数即可)

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln x - \frac{1}{x} + 2$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 单调性;

(2) 当 $a = -2$ 时, 求证: $f(x) < e^x - 2x - \frac{1}{x}$.

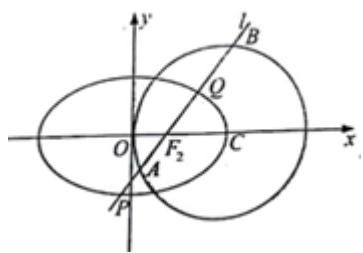
18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 点 $P(x_0, y_0)$ 为半圆 $x^2 + y^2 = 3$ ($y \geq 0$) 上一动点, 若过 P 作椭圆 C 的两切线分别交 x 轴于 M, N 两点.

(1) 求证: $PM \perp PN$;

(2) 当 $x_0 \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 时, 求 $|MN|$ 的取值范围.

19. (12 分) 如图, 设点 $F_2(1, 0)$ 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点, 圆 $C: (x-a)^2 + y^2 = a^2$, 过 F_2 且斜率为

$k(k > 0)$ 的直线 l 交圆 C 于 A, B 两点, 交椭圆 E 于点 P, Q 两点, 已知当 $k = \sqrt{3}$ 时, $AB = 2\sqrt{6}$.



(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 当 $PF_2 = \frac{10}{3}$ 时, 求 $\triangle PQC$ 的面积.

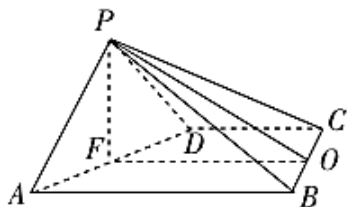
20. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = -3 + \frac{t}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半

轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta + 3 = 0$.

(1) 求 l 的普通方程及 C 的直角坐标方程;

(2) 求曲线 C 上的点 P 到 l 距离的取值范围.

21. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \perp BC$, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $BC = CD = 2$, $PA = PD$, 点 F, O 分别为 AD, BC 的中点, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 求证: $BC \perp$ 平面 POF .

(2) 若 $PF = \sqrt{3}$, 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + \ln x$.

(1) 若函数 $g(x) = f(x) + (a-1)\ln x$ 的图象与 x 轴有且只有一个公共点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x) - (2m-1)x < (1-m)x^2$ 对任意 $x \in (1, +\infty)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. B

【解析】

由已知条件利用诱导公式得 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ，再利用三角函数的平方关系和象限角的符号，即可得到答案.

【详解】

由题意得 $\tan(\alpha - \pi) = \tan \alpha = -\frac{3}{4}$,

又 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ，所以 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ， $\cos \alpha < 0, \sin \alpha > 0$ ，结合 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 解得 $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ，

所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$ ，

故选 B.

【点睛】

本题考查三角函数的诱导公式、同角三角函数的平方关系以及三角函数的符号与位置关系，属于基础题.

2. A

【解析】

首先画出可行域，利用目标函数的几何意义求 z 的最小值.

【详解】

解：作出实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 2 \\ 3x-y \leq 6 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域（如图示：阴影部分）

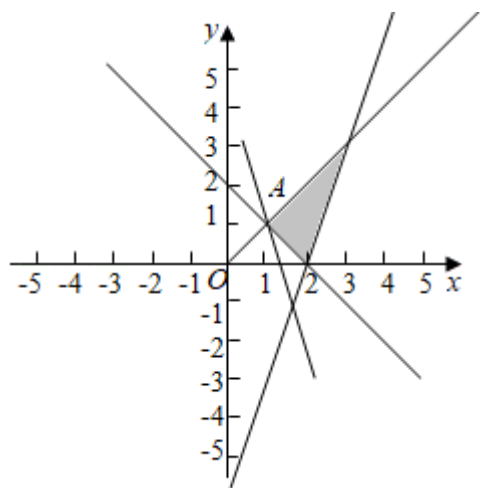
由 $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ 得 $A(1,1)$ ，

由 $z=3x+y$ 得 $y=-3x+z$ ，平移 $y=-3x$ ，

易知过点 A 时直线在 y 上截距最小，

所以 $z_{\min} = 3 \times 1 + 1 = 4$ 。

故选：A.



【点睛】

本题考查了简单线性规划问题，求目标函数的最值先画出可行域，利用几何意义求值，属于中档题.

3. A

【解析】

由题意得到关于 E_1, E_2 的等式，结合对数的运算法则可得亮度的比值.

【详解】

两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 令 $m_2 = -1.45, m_1 = -26.7$,

$$\lg \frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{5} \cdot (m_2 - m_1) = \frac{2}{5} (-1.45 + 26.7) = 10.1, \frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}.$$

故选 A.

【点睛】

本题以天文学问题为背景,考查考生的数学应用意识、信息处理能力、阅读理解能力以及指数对数运算.

4. D

【解析】

利用列举法，从这 5 部专著中选择 2 部作为“数学文化”校本课程学习内容，基本事件有 10 种情况，所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的基本事件有 9 种情况，由古典概型概率公式可得结果.

【详解】

《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《缉古算经》，这 5 部专著中有 3 部产生于汉、魏、晋、南北朝时期. 记这 5 部专著分别为 a, b, c, d, e ，其中 a, b, c 产生于汉、魏、晋、南北朝时期. 从这 5 部专著中选择 2 部作为“数学文化”校本课程学习内容，基本事件有 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$, 共 10 种情况，所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的基本事件有 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce$,

, 共 9 种情况, 所以所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{9}{10}$. 故选 D.

【点睛】

本题主要考查古典概型概率公式的应用, 属于基础题, 利用古典概型概率公式求概率时, 找准基本事件个数是解题的关键, 基本事件的探求方法有 (1)枚举法: 适合给定的基本事件个数较少且易一一列举出的; (2)树状图法: 适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求. 在找基本事件个数时, 一定要按顺序逐个写出: 先 $(A_1, B_1), (A_1, B_2) \dots (A_1, B_n)$, 再 $(A_2, B_1), (A_2, B_2) \dots (A_2, B_n)$ 依次 $(A_3, B_1), (A_3, B_2) \dots (A_3, B_n) \dots$ 这样才能避免多写、漏写现象的发生.

5. B

【解析】

利用复数的四则运算以及几何意义即可求解.

【详解】

$$\text{解: } z = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-1+2i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i,$$

$$\text{则复数 } z = \frac{i}{2-i} \text{ (} i \text{ 是虚数单位) 在复平面内对应的点的坐标为: } \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right),$$

位于第二象限.

故选: B.

【点睛】

本题考查了复数的四则运算以及复数的几何意义, 属于基础题.

6. B

【解析】

根据三角函数的两角和差公式得到 $f(x) = 2 \sin(2019x + \frac{\pi}{4})$, 进而可以得到函数的最值, 区间(m,n)长度要大于等于半个周期, 最终得到结果.

【详解】

函数

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(2019x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2019x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2019x + \cos 2019x + \cos 2019x + \sin 2019x) \\ &= \sqrt{2}(\sin 2019x + \cos 2019x) = 2 \sin\left(2019x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

则函数的最大值为 2, $M \cdot |m-n| = 2|m-n|$

存在实数 m, n , 使得对任意实数 x 总有 $f(m) \leq f(x) \leq f(n)$ 成立, 则区间(m,n)长度要大于等于半个周期, 即

$$m-n \geq \frac{\pi}{2019} \therefore 2|m-n|_{\min} = \frac{2\pi}{2019}$$

故答案为：B.

【点睛】

这个题目考查了三角函数的两角和差的正余弦公式的应用，以及三角函数的图像的性质的应用，题目比较综合.

7. D

【解析】

通过复数的乘除运算法则化简求解复数为： $a+bi$ 的形式，即可得到复数的虚部.

【详解】

$$\text{由题可知 } z = \frac{i^{2020} + 3i}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+2i-3i^2}{1-i^2} = 2+i,$$

所以 z 的虚部是 1.

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的代数形式的混合运算，复数的基本概念，属于基础题.

8. D

【解析】

因甲不参加生物竞赛，则安排甲参加另外 3 场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外 3 场比赛时，共有 $C_3^1 \cdot A_4^3 = 72$ 种选择方案；②当甲学生不参加任何比赛时，共有 $A_4^4 = 24$ 种选择方

案. 综上所述，所有参赛方案有 $72+24=96$ 种

故答案为：96

点睛：本题以选择学生参加比赛为载体，考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识，属于基础题.

9. C

【解析】

试题分析：由题意得，自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $(0.16+0.08+0.04) \times 2.5 = 0.7$ ，故自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $0.7 \times 200 = 140$ ，故选 C.

考点：频率分布直方图及其应用.

10. B

【解析】

在等差数列中由等差数列公式与下标和的性质求得 a_3 ，再由等差数列通项公式求得公差.

【详解】

在等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 5a_3 = 35 \Rightarrow a_3 = 7$

则 $a_3 = a_1 + 2d = 3 + 2d = 7 \Rightarrow d = 2$

故选：B

【点睛】

本题考查等差数列中求由已知关系求公差，属于基础题.

11. C

【解析】

在所有两组至少都是3人的分组中减去3名女干部单独成一组的情况，再将这两组分配，利用分步乘法计数原理可得出结果.

【详解】

两组至少都是3人，则分组中两组的人数分别为3、5或4、4，

又因为3名女干部不能单独成一组，则不同的派遣方案种数为 $\left(C_8^3 + \frac{C_8^4}{A_2^2} - 1\right) A_2^2 = 180$.

故选：C.

【点睛】

本题考查排列组合的综合问题，涉及分组分配问题，考查计算能力，属于中等题.

12. D

【解析】

利用同角三角函数的基本关系式、二倍角公式和辅助角公式化简 $f(x)$ 表达式，再根据三角函数单调区间的求法，求得 $f(x)$ 的单调区间，由此确定正确选项.

【详解】

因为 $f(x) = 2\cos^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 2$

$= 1 + \cos 2x + 1 + \sin 2x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，由 $f(x)$ 单调递增，则 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，解得

$k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，当 $k=1$ 时，D 选项正确.C 选项是递减区间，A，B 选项中有部分增区间部分减区间.

故选：D

【点睛】

本小题考查三角函数的恒等变换，三角函数的图象与性质等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想，应用意识.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{9}{2}$

【解析】

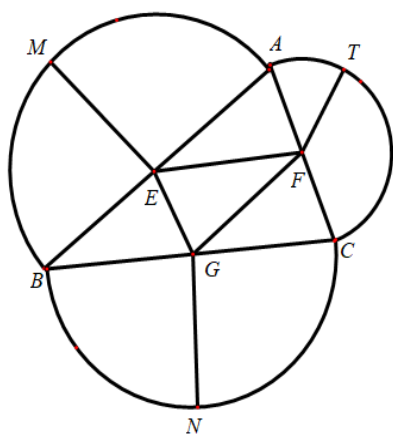
先找到平面区域 D 内任意两点的最大值为 $\frac{3}{2} + \sqrt{3} \sin B + \sqrt{3} \sin C$ ，再利用三角恒等变换化简即可得到最大值。

【详解】

由已知及正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = 2R = 2\sqrt{3}$ ，所以 $BC = 3$ ，

$AC = 2\sqrt{3} \sin B$, $AB = 2\sqrt{3} \sin C$ ，取 AB 中点 E ， AC 中点 F ， BC 中点 G ，

如图所示



显然平面区域任意两点距离最大值为 $\frac{3}{2} + \sqrt{3} \sin B + \sqrt{3} \sin C$ ，

$$\text{而 } \frac{3}{2} + \sqrt{3} \sin B + \sqrt{3} \sin C = \frac{3}{2} + \sqrt{3} [\sin B + \sin(\frac{2\pi}{3} - B)] =$$

$$\frac{3}{2} + \sqrt{3} (\frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B) = \frac{3}{2} + 3 \sin(B + \frac{\pi}{6}) \leq \frac{9}{2},$$

当且仅当 $B = \frac{\pi}{3}$ 时，等号成立。

故答案为： $\frac{9}{2}$ 。

【点睛】

本题考查正弦定理在平面几何中的应用问题，涉及到距离的最值问题，在处理这类问题时，一定要数形结合，本题属于中档题。

14. $\frac{4}{3}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/076214013105010235>