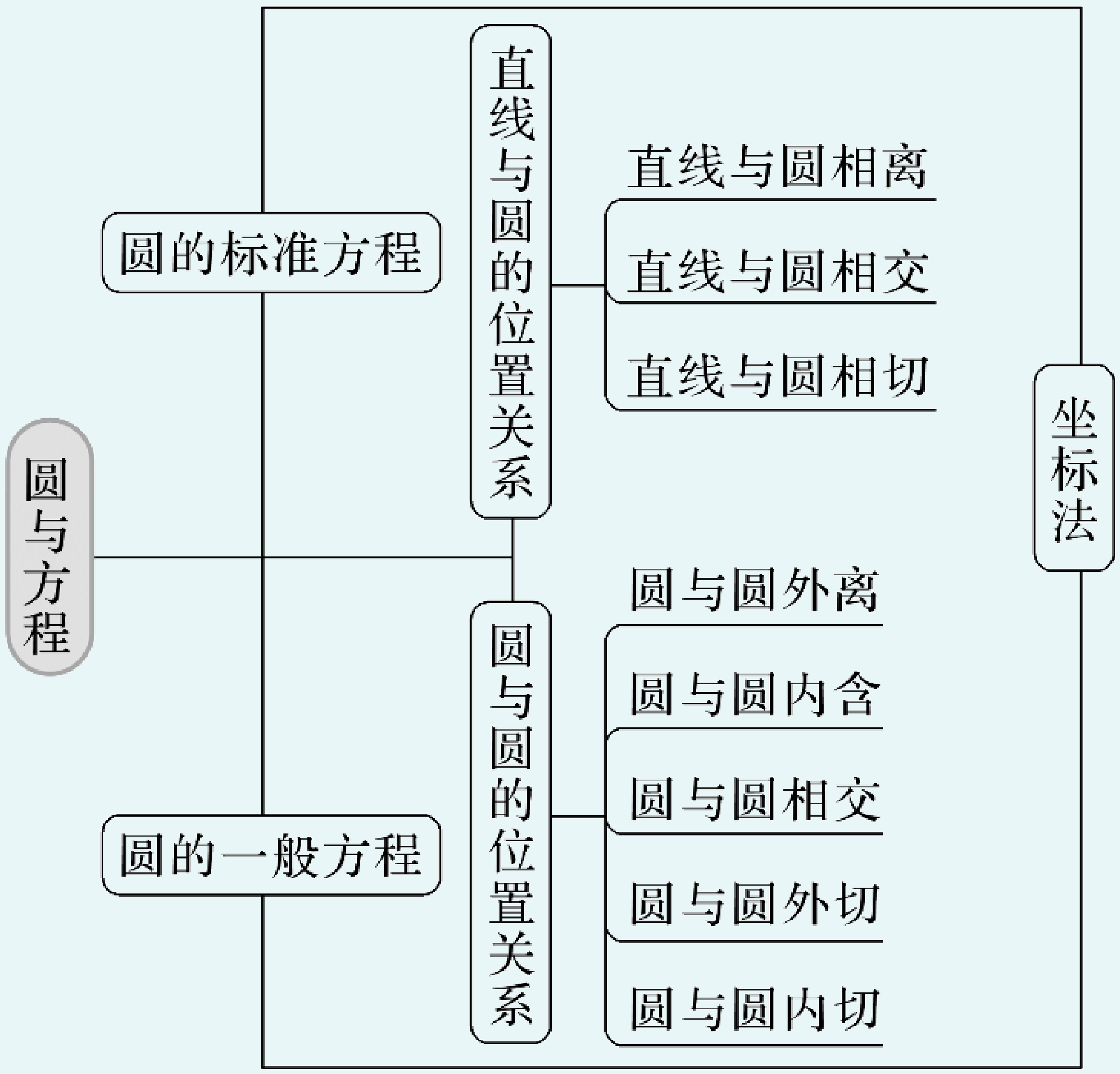
苏教版2019高二数学（选修一）　　单元复习

第二章 圆与方程(单元复习）

目录/CONTENTS

知识导图


圆与方程
圆的标准方程
圆的一般方程
直线与圆的位置关系
直线与圆相离
直线与圆相交
直线与圆相切
圆与圆的位置关系
圆与圆外离
圆与圆内含
圆与圆相交
圆与圆外切
圆与圆内切
坐标法

核心归纳

1.圆的定义

在平面内，到定点的距离等于定长的点的轨迹叫做圆.确定一个圆最基本的要素是圆心和半径.

2.圆的标准方程

(1)方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$表示圆心为__(a, b)__，半径为 r 的圆的标准方程.

(2)特别地，以原点为圆心，半径为 $r(r>0)$的圆的标准方程为__$x^2+y^2=r^2$__.

3.圆的一般方程

方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 可变形为 $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$.故有：

(1)当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程表示以 $\left(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，以 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ 为半径的圆；

(2)当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2}\right)$；

(3)当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程不表示任何图形.

2.点与圆的位置关系

点 $M(x_0,y_0)$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系.

(1)若 $M(x_0,y_0)$在圆外，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$__ $>$ __r^2.

(2)若 $M(x_0,y_0)$在圆上，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$__ $=$ __r^2.

(3)若 $M(x_0,y_0)$在圆内，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$__ $<$ __r^2.

3．直线与圆的位置关系

设直线 l：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0)$，

圆：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，

d 为圆心$(a，b)$到直线 l 的距离，联立直线和圆的方程，消元后得到的一元二次方程的判别式为 Δ.

方法 位置关系	几何法	代数法
相交	$d\underline{\quad<\quad}r$	$\Delta\underline{\quad>\quad}0$
相切	$d\underline{\quad=\quad}r$	$\Delta\underline{\quad=\quad}0$
相离	$d\underline{\quad>\quad}r$	$\Delta\underline{\quad<\quad}0$

4.两圆的位置关系的判定

设圆O_1的方程为$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R^2(R>0)$,圆$O_2$的方程为$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r^2(r>0)$,其中$R>r$.

位置关系	判断方法		公共点个数	公切线条数
	几何法(判断圆心距$\lvert O_1O_2\rvert$与R,r的关系)	代数法(联立两圆方程,判断解的个数)		
外离	$\lvert O_1O_2\rvert>R+r$	无解	0	4
外切	$\lvert O_1O_2\rvert=R+r$	一解	1	3
相交	$R-r<\lvert O_1O_2\rvert<R+r$	两解	2	2
内切	$\lvert O_1O_2\rvert=R-r$	一解	1	1
内含	$0\leqslant\lvert O_1O_2\rvert<R-r$	无解	0	0

常用结论

1．圆心在坐标原点，半径为 r 的圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$.

2．以 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$为直径端点的圆的方程为$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

3．圆的切线方程常用结论

(1)过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0，y_0)$的圆的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

(2)过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0，y_0)$的圆的切线方程为$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

(3)过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $M(x_0，y_0)$作圆的两条切线，则两切点所在直线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

4．两圆相交时公共弦所在直线的方程

设圆 C_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，①

圆 C_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$，②

若两圆相交，则有一条公共弦，其公共弦所在直线方程由①－②所得，

$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$.

5．直线与圆相交时，弦心距 d，半径 r，弦长的一半$\frac{1}{2}l$ 满足关系式

$r^2=d^2+\left(\frac{1}{2}l\right)^2$.

常见误区

1．对于方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆时易忽视 $D^2+E^2-4F>0$ 这一条件．

2．解答与圆有关的最值问题要注意数形结合，充分运用圆的性质．

3．求圆的切线方程时，易忽视切线斜率 k 不存在的情形．

4．对于圆与圆的位置关系，从交点的个数，也就是方程组的解的个数来判断，不一定能得到确切的结论．如当 $\Delta<0$ 时，需要再根据图形判断两圆是外离，还是内含；当 $\Delta=0$ 时，还需要判断两圆是外切，还是内切．

题型突破

题型一：求圆的方程

1.求圆的方程的两种方法

直接法	根据圆的几何性质，直接求出圆心坐标和半径，进而写出方程
待定系数法	(1)若已知条件与圆心$(a，b)$和半径r有关，则设圆的标准方程，依据已知条件列出关于$a，b，r$的方程组，从而求出$a，b，r$的值； (2)若已知条件没有明确给出圆心或半径，则选择设圆的一般方程，依据已知条件列出关于$D，E，F$的方程组，进而求出$D，E，F$的值

2.确定圆心位置的三种方法

(1)圆心在过切点且与切线垂直的直线上.

(2)圆心在圆的任意弦的垂直平分线上.

(3)当两圆相切时，切点与两圆圆心共线.

3.通过求圆的方程，体现了数学运算与逻辑推理的核心素养.

例1 求圆心在直线$3x+4y-1=0$上，且经过两圆$x^2+y^2-x+y-2=0$与$x^2+y^2=5$的交点的圆的方程.

方法一 设所求圆的方程为$x^2+y^2-x+y-2+\lambda(x^2+y^2-5)=0$，

化为一般方程得 $x^2+y^2-\frac{1}{1+\lambda}x+\frac{1}{1+\lambda}y-\frac{2+5\lambda}{1+\lambda}=0$.

故圆心坐标为$\left(\frac{1}{2(1+\lambda)}, -\frac{1}{2(1+\lambda)}\right)$，

代入直线 $3x+4y-1=0$，得 $\lambda=-\frac{3}{2}$.

再把λ代入所设方程，得$x^2+y^2+2x-2y-11=0$，

故所求圆的方程为$x^2+y^2+2x-2y-11=0$.

方法二 解方程组$\begin{cases}x^2+y^2-x+y-2=0,\\x^2+y^2=5,\end{cases}$

得两圆的交点为$A(1,-2)$和$B(2,-1)$.

设所求圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

因为A，B在圆上，且圆心$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$在直线$3x+4y-1=0$上，

所以$\begin{cases}5+D-2E+F=0,\\5+2D-E+F=0,\\3\cdot\left(-\frac{D}{2}\right)+4\cdot\left(-\frac{E}{2}\right)-1=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}D=2,\\E=-2,\\F=-11.\end{cases}$

故所求圆的方程是$x^2+y^2+2x-2y-11=0$.

题型二：直线与圆、圆与圆的位置关系

1.直线与圆位置关系的判断方法

(1)几何法：设圆心到直线的距离为d，圆的半径长为r.若$d<r$，则直线与圆相交；若$d=r$，则直线与圆相切；若$d>r$，则直线与圆相离.

(2)代数法：联立直线方程与圆的方程组成方程组，消元后得到一个一元二次方程，其判别式为Δ.$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与圆相切；$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与圆相交；$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与圆相离.

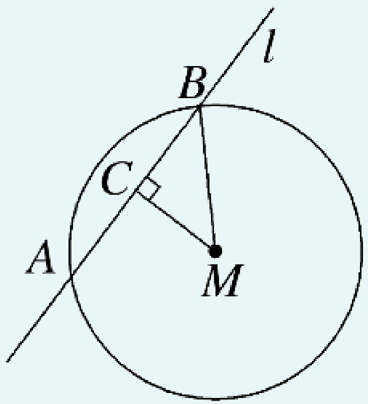
2.圆与圆的位置关系：一般利用圆心距与两半径的和、差的绝对值的大小关系来判断两圆的位置关系.

3.直线与圆、圆与圆的位置关系的转化，体现了直观想象、逻辑推理的核心素养.

例2 已知圆M：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$，直线l过点$P(2,3)$且与圆M交于A，B两点，且$AB=2\sqrt{3}$，求直线l的方程.

(1)当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y-3=k(x-2)$，

即$kx-y+3-2k=0$.



示意图如图所示，作$MC\perp AB$于点C.

在 Rt$\triangle MBC$ 中，$BC=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$，$MB=2$，

故 $MC=\sqrt{MB^2-BC^2}=1$，

又$M(1,1)$，

故由点到直线的距离公式得$\frac{|k-1+3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

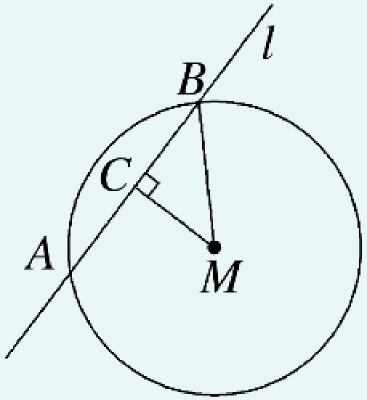
解得 $k=\frac{3}{4}$.

故直线l的方程为$3x-4y+6=0$.

(2)当直线l的斜率不存在时，其方程为$x=2$，

且 $AB=2\sqrt{3}$，所以符合题意.

综上所述，直线l的方程为$3x-4y+6=0$或$x=2$.



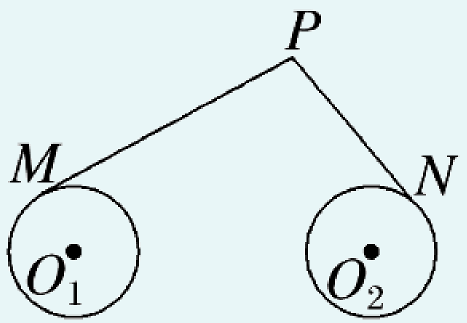
题型三：轨迹问题

1.求与圆有关的轨迹问题的四种方法

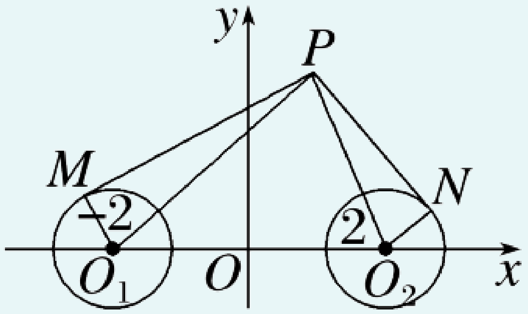
方法	说明
直接法	直接根据题设给定的条件列出方程求解的方法
定义法	根据圆的定义列方程求解的方法
几何法	利用圆的几何性质，得出方程的方法
代入法(相关点法)	找出要求的点与已知点的关系，代入已知点满足的关系式的方法

2.通过求圆的轨迹问题，体现了直观想象、逻辑推理的核心素养.

例3 如图所示，圆O_1与圆O_2的半径都是1，$O_1O_2=4$，过动点P分别作圆O_1、圆O_2的切线PM，PN(M，N分别为切点)，使得$PM=\sqrt{2}\,PN$，试建立适当的坐标系，并求动点P的轨迹方程.



如图所示，以O_1O_2所在直线为x轴，线段O_1O_2的垂直平分线为y轴，



建立平面直角坐标系，则$O_1(-2,0)$，$O_2(2,0)$，

设动点P的坐标为$(x，y)$，连接MO_1，NO_2，

在Rt△PMO_1中，$PM^2=PO_1^2-1$，

在Rt△PNO_2中，$PN^2=PO_2^2-1$.

又因为 $PM=\sqrt{2}PN$，

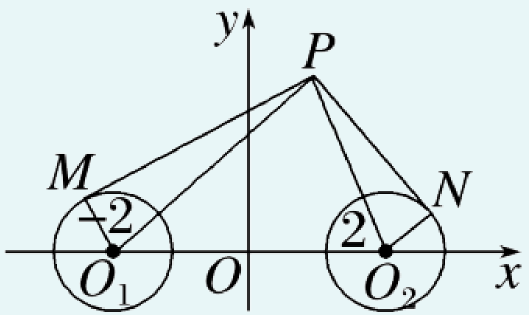
所以$PM^2=2PN^2$，

即 $PO_1^2-1=2(PO_2^2-1)$，即 $PO_1^2+1=2PO_2^2$，

所以$(x+2)^2+y^2+1=2[(x-2)^2+y^2]$，

整理得$x^2+y^2-12x+3=0$，

即为所求点P的轨迹方程.



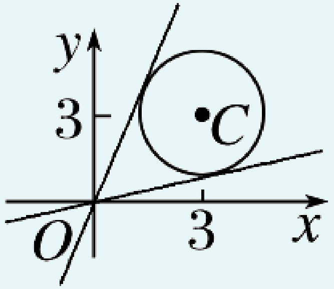
题型四：利用数学式的几何意义解圆的最值问题

例4 已知点$P(x,y)$在圆C：$x^2+y^2-6x-6y+14=0$上.

(1)求$\dfrac{y}{x}$的最大值和最小值；

方程$x^2+y^2-6x-6y+14=0$可化为$(x-3)^2+(y-3)^2=4$.

$\dfrac{y}{x}$表示圆上的点P与原点连线所在直线的斜率，如图(1)所示，



(1)

显然PO(O为坐标原点)与圆相切时，斜率最大或最小.

设切线方程为$y=kx$(由题意知，斜率一定存在)，

即$kx-y=0$，由圆心$C(3,3)$到切线的距离等于半径2，

可得$\dfrac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=\dfrac{9\pm2\sqrt{14}}{5}$，

所以$\dfrac{y}{x}$的最大值为$\dfrac{9+2\sqrt{14}}{5}$，最小值为$\dfrac{9-2\sqrt{14}}{5}$.

(2)求x^2+y^2+2x+3的最大值与最小值；

$x^2+y^2+2x+3=(x+1)^2+y^2+2$，它表示圆上的点$P$到$E(-1,0)$的距离的平方再加2，所以当点$P$与点$E$的距离最大或最小时，所求式子取得最大值或最小值，如图(2)所示，显然点E在圆C的外部，

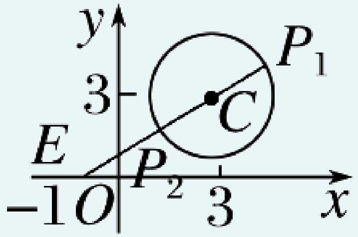
所以点P与点E距离的最大值为$P_1E=CE+2$，

点P与点E距离的最小值为$P_2E=CE-2$.

又 $CE=\sqrt{(3+1)^2+3^2}=5$，

所以x^2+y^2+2x+3的最大值为$(5+2)^2+2=51$，

最小值为$(5-2)^2+2=11$.



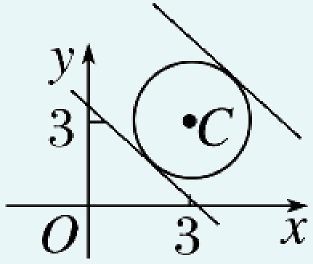
(2)

(3)求$x+y$的最大值与最小值.

设$x+y=b$，则b表示动直线$y=-x+b$在y轴上的截距，如图(3)所示，

显然当动直线$y=-x+b$与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=4$相切时，

b取得最大值或最小值，



(3)

此时圆心$C(3,3)$到切线$x+y=b$的距离等于圆的半径2，

则$\dfrac{|3+3-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$，即$|b-6|=2\sqrt{2}$，解得 $b=6\pm2\sqrt{2}$，

所以 $x+y$ 的最大值为 $6+2\sqrt{2}$，最小值为 $6-2\sqrt{2}$.

一、单项选择题(本题共8小题，每小题5分，共40分)

1.直线$x+y-1=0$被圆$(x+1)^2+y^2=3$截得的弦长等于

A.$\sqrt{2}$　　B.2　　C.$2\sqrt{2}$　　D.4

解析

由题意得，圆心为$(-1,0)$，半径$r=\sqrt{3}$，圆心到直线的距离$d=\dfrac{|-1+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$=\sqrt{2}$，

所以所求的弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=2$.

2.若点$P(1,1)$为圆A：$x^2+y^2-6x=0$的弦MN的中点，则弦MN所在直线的方程为

A.$2x+y-3=0$　　B.$x-2y+1=0$

C.$x+2y-3=0$　　D.$2x-y-1=0$

解析

由题意，知圆的标准方程为$(x-3)^2+y^2=9$，圆心$A(3,0)$.

因为点$P(1,1)$为弦MN的中点，所以$AP\perp MN$.

又AP的斜率$k=\dfrac{1-0}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$,

所以直线MN的斜率为2，

所以弦MN所在直线的方程为$y-1=2(x-1)$，

即$2x-y-1=0$.

3.圆C：$x^2+y^2-ax+2=0$与直线l相切于点$A(3,1)$，则直线l的方程为

A.$2x-y-5=0$

B.$x-2y-1=0$

C.$x-y-2=0$

D.$x+y-4=0$

解析

由已知条件，得$3^2+1^2-3a+2=0$，解得$a=4$，

则圆C：$x^2+y^2-4x+2=0$的圆心为$C(2,0)$，半径为$\sqrt{2}$，直线AC的斜率$k=1$，则直线l的斜率为-1，

故直线l的方程为$y-1=-(x-3)=-x+3$，即$x+y-4=0$.

4.已知直线l过点$(-2,0)$，当直线l与圆$x^2+y^2=2x$有两个交点时，其斜率k的取值范围是

A.$(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$　　B.$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

C.$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$　　D.$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$

解析

易知圆心坐标是(1,0)，半径是1，直线l的斜率存在，

设直线l的方程为$y=k(x+2)$，即$kx-y+2k=0$，直线l与圆有两个交点，则由点到直线的距离公式，

得$\frac{|k+2k|}{\sqrt{k^2+1}}<1$，即 $k^2<\frac{1}{8}$，解得$-\frac{\sqrt{2}}{4}<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5.如果圆$(x-a)^2+(y-1)^2=1$上总存在两个点到原点的距离为2，则实数a的取值范围是

A.$(-2\sqrt{2}，0)\cup(0,2\sqrt{2})$

B.$(-2\sqrt{2}，2\sqrt{2})$

C.$(-1,0)\cup(0,1)$

D.$(-1,1)$

解析

∵圆$(x-a)^2+(y-1)^2=1$上总存在两个点到原点的距离为2，

∴圆O：$x^2+y^2=4$与圆C：$(x-a)^2+(y-1)^2=1$相交.

$OC=\sqrt{a^2+1}$，

由 $2-1<OC<2+1$，得 $1<\sqrt{a^2+1}<3$，

∴$0<|a|<2\sqrt{2}$，

∴$-2\sqrt{2}<a<0$ 或 $0<a<2\sqrt{2}$.

6.已知圆C_1：$(x+a)^2+(y-2)^2=1$与圆C_2：$(x-b)^2+(y-2)^2=4$外切，a，b为正实数，则ab的最大值为

A.$2\sqrt{3}$　　B.$\frac{9}{4}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{6}}{2}$

解析

因为圆C_1：$(x+a)^2+(y-2)^2=1$的圆心$C_1(-a,2)$，半径$r_1=1$，

圆C_2：$(x-b)^2+(y-2)^2=4$的圆心$C_2(b,2)$，半径$r_2=2$，圆C_1与圆C_2外切，

所以 $C_1C_2=\sqrt{(-a-b)^2+(2-2)^2}=|a+b|=3$，

所以$a^2+b^2+2ab=9$，所以$(a-b)^2+4ab=9$，

所以 $ab=\frac{9}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}\leqslant\frac{9}{4}$，

即当 $a=b$ 时，ab 取得最大值，最大值为$\frac{9}{4}$.

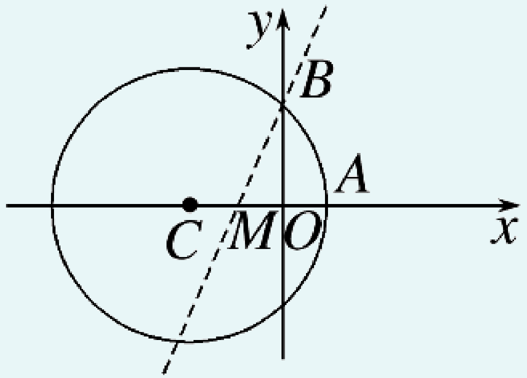
7.若过定点$M(-1,0)$且斜率为k的直线与圆C：$x^2+4x+y^2-5=0$在第一象限内的部分有交点，则实数k的取值范围是

A.$(0，\sqrt{5})$　　B.$(-\sqrt{5}，0)$

C.$(0，\sqrt{13})$　　D.$(0,5)$

解析

圆C的方程$x^2+4x+y^2-5=0$化为$(x+2)^2+y^2=9$，



圆C与x轴正半轴交于点$A(1,0)$，

与y轴正半轴交于点$B(0,\sqrt{5})$，如图所示，

因为过定点$M(-1,0)$且斜率为k的直线与圆C：$x^2+4x+y^2-5=0$在第一象限内的部分有交点，

所以$k_{MA}<k<k_{MB}$，所以$0<k<\sqrt{5}$.

8.已知圆C：$x^2+y^2-2x=0$，直线l：$x+y+1=0$，P为l上的动点，过点P作圆C的两条切线PA，PB，切点分别为A，B，当$PC\cdot AB$最小时，直线AB的方程为

A.$x+y=0$　　　　B.$x-y=0$

C.$2x-2y+1=0$　　　　D.$2x+2y+1=0$

解析

由圆的知识可知，P，A，B，C四点共圆，且$AB\perp PC$，圆C的圆心$C(1,0)$，半径$r=1$，

所以 $PC\cdot AB=4S_{\triangle PAC}=4\times\frac{1}{2}\times PA\cdot AC=2PA$，而 $PA=\sqrt{PC^2-1}$，

当直线$PC\perp l$时，PC最小，从而PA最小，此时$PC\cdot AB$最小，

直线PC的方程为$y-0=x-1$，即$y=x-1$，

联立$\begin{cases}y=x-1,\\x+y+1=0,\end{cases}$ 解得 $P(0,-1)$，

解析

所以 PC 的中点坐标为$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，$PC=\sqrt{2}$，

所以以PC为直径的圆的方程为$x^2+y^2-x+y=0$，

又圆C：$x^2+y^2-2x=0$，

两圆的方程相减可得$x+y=0$，

即直线AB的方程为$x+y=0$.

二、多项选择题(本题共4小题，每小题5分，共20分.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分)

9.半径长为6的圆与x轴相切，且与圆$x^2+(y-3)^2=1$内切，则此圆的方程为

A.$(x-4)^2+(y-6)^2=6$

B.$(x+4)^2+(y-6)^2=6$

C.$(x-4)^2+(y-6)^2=36$

D.$(x+4)^2+(y-6)^2=36$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/076234224032010224