湖南省邵阳县第一中学 2024 年高考适应性考试数学试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2+9}+\frac{y^2}{a^2}=1$，直线 $l_1:mx+y+3m=0$ 与直线 $l_2:x-my-3=0$ 相交于点 P，且 P 点在椭圆内恒成立，则椭圆 C 的离心率取值范围为（　　）

A．$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$　　C．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{2},1\right)$

2．复数 $z=\frac{i}{1+2i}$ 的共轭复数在复平面内所对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-1\le 0\\x-y+3\le 0\\x+2\ge 0\end{cases}$，则 x^2+y^2 的最大值是（　　）

A．$\frac{9}{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．13　　D．$\sqrt{13}$

4．已知四棱锥 $E-ABCD$，底面 **ABCD** 是边长为 **1** 的正方形，$ED=1$，平面 $ECD\perp$ 平面 **ABCD**，当点 **C** 到平面 **ABE** 的距离最大时，该四棱锥的体积为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．1

5．已知 A,B 是球 O 的球面上两点,$\angle AOB=90^\circ$,C 为该球面上的动点.若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 **36**,则球 O 的表面积为（ ）

A．36π　　B．64π　　C．144π　　D．256π

6．在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，且 $|\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=120^\circ$，则 $|\overrightarrow{EB}|=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{19}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{11}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{7}}{4}$

7．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x$，$g\left(x\right)=\left(2m+3\right)x+n$，若对任意的 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 总有 $f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ 恒成立，记 $\left(2m+3\right)n$ 的最小值为 $f\left(m,n\right)$，则 $f\left(m,n\right)$ 最大值为（　　）

A．1　　　B．$\frac{1}{e}$　　　C．$\frac{1}{e^2}$　　　D．$\frac{1}{\sqrt{e}}$

8．已知集合$A=\left\{x\left|x^2-3x-4>0\right.\right\},B=\left\{x\left|-1\le x\le 3\right.\right\}$，则$(\complement_R A)\cap B=$(　　)

A．$(-1,3)$　　　B．$[-1,3]$

C．$[-1,4]$　　　D．$(-1,4)$

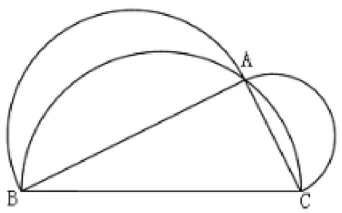
9．在ΔABC中，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{AC}\right|$，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则实数$\lambda=$(　　)

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

10．在ΔABC中，D在边AC上满足$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，$E$为$BD$的中点，则$\overrightarrow{CE}=$（　　）．

A．$\frac{7}{8}\overrightarrow{BA}-\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$　　　B．$\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}-\frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$　　　C．$\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}+\frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$　　　D．$\frac{7}{8}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$

11．如图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形ABC的斜边BC，直角边AB,AC.已知以直角边AC,AB为直径的半圆的面积之比为$\frac{1}{4}$，记$\angle ABC=\alpha$，则$\sin 2\alpha=$（　　）



A．$\frac{9}{25}$　　　B．$\frac{12}{25}$　　　C．$\frac{3}{5}$　　　D．$\frac{4}{5}$

12．已知$2^a=3^b=6$，则a，b不可能满足的关系是()

A．$a+b=ab$　　　B．$a+b>4$　　　C．$(a-1)^2+(b-1)^2<2$　　D．$a^2+b^2>8$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．二项式$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中$x^6$项的系数为_____.

14．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱AA_1的中点，F是棱A_1B_1上的点，且$A_1F=\frac{1}{3}FB_1$，则异面直线EF与BC_1所成角的余弦值为__________.

15．某部队在训练之余，由同一场地训练的甲、乙、丙三队各出三人，组成3×3小方阵开展游戏，则来自同一队的战士既不在同一行，也不在同一列的概率为______.

16．若随机变量ξ的分布列如表所示，则$E(\xi)=$______，$D\left(2\xi-1\right)=$______.

ξ	**-1**	**0**	**1**
P	a	$\frac{1}{4}$	a^2

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）选修 **4-5**：不等式选讲

已知函数$f\left(x\right)=\left|x-m\right|-\left|x+2m\right|$的最大值为 **3**，其中$m>0$.

（**1**）求m的值；

（**2**）若$a,b\in R$，$ab>0$，$a^2+b^2=m^2$，求证：$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\geq 1$

18．（12 分）在锐角ΔABC中，a，b，c分别是角A，B，C所对的边，ΔABC的面积$S=2$，且满足$a\cos B=b(1+\cos A)$，则$(c+a-b)(c+b-a)$的取值范围是（　　）

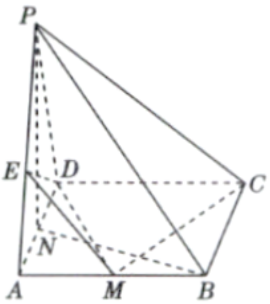
A．$\left(8\sqrt{2}-8,8\right)$　　**B．**$(0,8)$　　**C．**$\left(\frac{8\sqrt{3}-8}{3},8\sqrt{3}\right)$ **D．**$\left(\frac{8\sqrt{3}-8}{3},8\right)$

19．（12 分）某大型公司为了切实保障员工的健康安全，贯彻好卫生防疫工作的相关要求，决定在全公司范围内举行一次NCP普查，为此需要抽验 **1000** 人的血样进行化验，由于人数较多，检疫部门制定了下列两种可供选择的方案.方案①：将每个人的血分别化验，这时需要验 **1000** 次.方案②：按k个人一组进行随机分组，把从每组k个人抽来的血混合在一起进行检验，如果每个人的血均为阴性，则验出的结果呈阴性，这k个人的血只需检验一次（这时认为每个人的血化验$\frac{1}{k}$次）；否则，若呈阳性，则需对这k个人的血样再分别进行一次化验，这样，该组k个人的血总共需要化验$k+1$次.假设此次普查中每个人的血样化验呈阳性的概率为p，且这些人之间的试验反应相互独立.

（**1**）设方案②中，某组k个人的每个人的血化验次数为X，求X的分布列；

（**2**）设$p=0.1$，试比较方案②中，分别取 **2**，**3**，**4** 时，各需化验的平均总次数；并指出在这三种分组情况下，相比方案①，化验次数最多可以平均减少多少次？（最后结果四舍五入保留整数）

20．（12 分）如图，四棱锥$P-ABCD$的底面 ***ABCD*** 是正方形，$\triangle PAD$为等边三角形，***M***，***N*** 分别是 ***AB***，***AD*** 的中点，且平面$PAD\perp$平面 ***ABCD***.



（1）证明：$CM \perp$ 平面 ***PNB***；

（2）问棱 ***PA*** 上是否存在一点 ***E***，使 $PC//$ 平面 ***DEM***，求 $\dfrac{PE}{EA}$ 的值

21．（12 分）为了拓展城市的旅游业，实现不同市区间的物资交流，政府决定在 A 市与 B 市之间建一条直达公路，中间设有至少 **8** 个的偶数个十字路口，记为 $2m$ ，现规划在每个路口处种植一颗杨树或者木棉树，且种植每种树木的概率均为 $\dfrac{1}{2}$．

（1）现征求两市居民的种植意见，看看哪一种植物更受欢迎，得到的数据如下所示：

	A 市居民	***B*** 市居民
喜欢杨树	**300**	**200**
喜欢木棉树	**250**	**250**

是否有 99.9% 的把握认为喜欢树木的种类与居民所在的城市具有相关性；

（2）若从所有的路口中随机抽取 **4** 个路口，恰有 X 个路口种植杨树，求 X 的分布列以及数学期望；

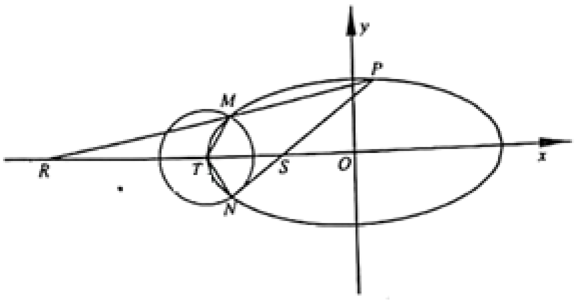
（3）在所有的路口种植完成后，选取 **3** 个种植同一种树的路口，记总的选取方法数为 M ，求证：

$3M \ldots m(m-1)(m-2)$．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P\left(K^2 \ldots k\right)$	**0.100**	**0.050**	**0.010**	**0.001**
k	**2.706**	**3.841**	**6.635**	**10.828**

22．（10 分）如图，在平面直角坐标系 ***xOy*** 中，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，以椭圆 ***C*** 左顶点 ***T*** 为圆心作圆 $T:(x+2)^2+y^2=r^2(r>0)$，设圆 ***T*** 与椭圆 ***C*** 交于点 ***M*** 与点 ***N***.



（1）求椭圆 C 的方程；

（2）求 $\overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{TN}$ 的最小值，并求此时圆 T 的方程；

（3）设点 P 是椭圆 C 上异于 M，N 的任意一点，且直线 MP，NP 分别与 x 轴交于点 R，S，O 为坐标原点，求证：$|OR|\cdot|OS|$ 为定值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

先求得椭圆焦点坐标，判断出直线 l_1,l_2 过椭圆的焦点.然后判断出 $l_1\perp l_2$，判断出 P 点的轨迹方程，根据 P 恒在椭圆内列不等式，化简后求得离心率 e 的取值范围.

【详解】

设 $F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$ 是椭圆的焦点，所以 $c^2=a^2+9-a^2=9,c=3$.直线 l_1 过点 $F_1\left(-3,0\right)$，直线 l_2 过点 $F_2\left(3,0\right)$，由于 $m\times1+1\times\left(-m\right)=0$，所以 $l_1\perp l_2$，所以 P 点的轨迹是以 F_1,F_2 为直径的圆 $x^2+y^2=9$.由于 P 点在椭圆内恒成立，所以椭圆的短轴大于 3，即 $a^2>3^2=9$，所以 $a^2+9>18$，所以双曲线的离心率 $e^2=\dfrac{9}{a^2+9}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $e\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查直线与直线的位置关系，考查动点轨迹的判断，考查椭圆离心率的取值范围的求法，属于中档题.

2、D

【解析】

由复数除法运算求出z，再写出其共轭复数，得共轭复数对应点的坐标．得结论．

【详解】

$z=\frac{i}{1+2i}=\frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{i+2}{5}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$，$\bar{z}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$，对应点为$(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$，在第四象限．

故选：**D.**

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查共轭复数的概念，考查复数的几何意义．掌握复数的运算法则是解题关键．

3、**C**

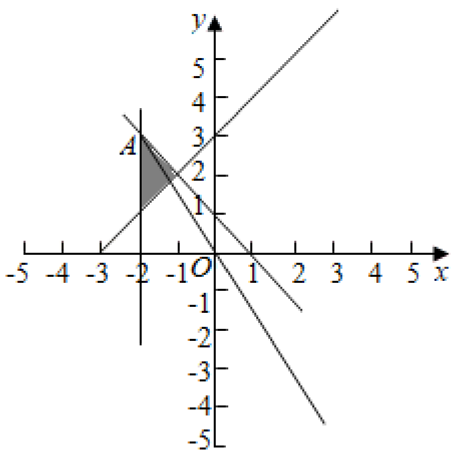
【解析】

由已知画出可行域，利用目标函数的几何意义求最大值．

【详解】

解：x^2+y^2表示可行域内的点(x,y)到坐标原点的距离的平方，画出不等式组表示的可行域，如图，由$\begin{cases}x+y-1=0\\x+2=0\end{cases}$

解得$\begin{cases}y=3\\x=-2\end{cases}$即$A\left(-2,3\right)$



点$A\left(-2,3\right)$到坐标原点$(0,0)$的距离最大，即$(x^2+y^2)_{max}=(-2)^2+3^2=13$．

故选：C．

【点睛】

本题考查线性规划问题，考查数形结合的数学思想以及运算求解能力，属于基础题．

4、**B**

【解析】

过点 ***E*** 作$EH\perp CD$，垂足为 ***H***，过 ***H*** 作$HF\perp AB$，垂足为 ***F***，连接 ***EF***.因为$CD//$平面 ***ABE***，所以点 ***C*** 到平面 ***ABE***

的距离等于点 **H** 到平面 **ABE** 的距离 h.设 $\angle CDE=\theta(0<\theta\le\frac{\pi}{2})$，将 h 表示成关于 θ 的函数，再求函数的最值，即可得答案.

【详解】

过点 **E** 作 $EH\perp CD$，垂足为 **H**，过 **H** 作 $HF\perp AB$，垂足为 **F**，连接 **EF**.

因为平面 $ECD\perp$ 平面 **ABCD**，所以 $EH\perp$ 平面 **ABCD**，

所以 $EH\perp HF$.

因为底面 **ABCD** 是边长为 **1** 的正方形，$HF//AD$，所以 $HF=AD=1$.

因为 $CD//$ 平面 **ABE**，所以点 **C** 到平面 **ABE** 的距离等于点 **H** 到平面 **ABE** 的距离.

易证平面 $EFH\perp$ 平面 **ABE**，

所以点 **H** 到平面 **ABE** 的距离，即为 **H** 到 **EF** 的距离 h.

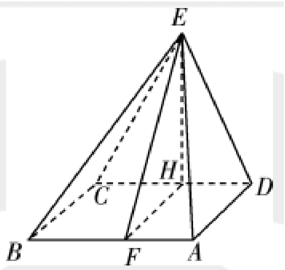
不妨设 $\angle CDE=\theta(0<\theta\le\frac{\pi}{2})$，则 $EH=\sin\theta$，$EF=\sqrt{1+\sin^2\theta}$.

因为 $S_{\triangle EHF}=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot h=\frac{1}{2}\cdot EH\cdot FH$，所以 $h\cdot\sqrt{1+\sin^2\theta}=\sin\theta$，

所以 $h=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}+1}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，等号成立.

此时 **EH** 与 **ED** 重合，所以 $EH=1$，$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}\times1^2\times1=\frac{1}{3}$.

故选：**B.**

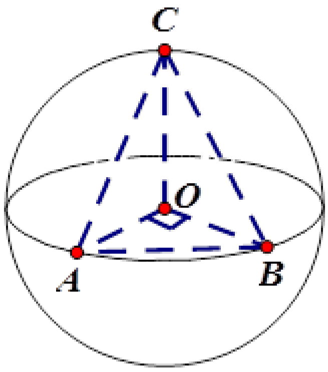


【点睛】

本题考查空间中点到面的距离的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查空间想象能力和运算求解能力，求解时注意辅助线及面面垂直的应用.

5、C

【解析】



如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大，设球 O 的半径为 R，此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}R^2\times R=\frac{1}{6}R^3=36$，故 $R=6$，则球 O 的表面积为 $S=4\pi R^2=144\pi$，故选 C.

考点：外接球表面积和椎体的体积.

6、A

【解析】

根据向量的线性运算可得 $\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,利用 $|\overrightarrow{EB}|^2=\overrightarrow{EB}^2$ 及 $|\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=120°$ 计算即可.

【详解】

因为 $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,

所以 $|\overrightarrow{EB}|^2=\overrightarrow{EB}^2=\frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2-2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2$

$=\frac{9}{16}\times1^2-\frac{3}{8}\times1\times2\times(-\frac{1}{2})+\frac{1}{16}\times2^2$

$=\frac{19}{16}$,

所以 $|\overrightarrow{EB}|=\frac{\sqrt{19}}{4}$,

故选：A

【点睛】

本题主要考查了向量的线性运算，向量数量积的运算，向量数量积的性质，属于中档题.

7、C

【解析】

对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 总有 $f(x)\le g(x)$ 恒成立，因为 $\ln x\le(2m+3)x+n$，对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，可得 $2m+3>0$，令 $y=\ln x-(2m+3)x-n$，可得 $y'=\frac{1}{x}-(2m+3)$，结合已知，即可求得答案.

【详解】

$\because$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 总有 $f(x)\le g(x)$ 恒成立

$\therefore \ln x\le(2m+3)x+n$，对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore 2m+3>0$

令 $y=\ln x-(2m+3)x-n$，

可得 $y'=\dfrac{1}{x}-(2m+3)$

令 $y'=0$，得 $x=\dfrac{1}{2m+3}$

当 $x>\dfrac{1}{2m+3}$， $y'<0$

当 $0<x<\dfrac{1}{2m+3}$ $y'>0$

$\therefore x=\dfrac{1}{2m+3}$， $y_{\max}=\ln\dfrac{1}{2m+3}-1-n\le 0$， $2m+3\ge e^{-1-n}$

故 $(2m+3)n\ge\dfrac{n}{e^{n+1}}=f(m,n)$

$\because f'(m,n)=\dfrac{1-n}{e^{n+1}}$

令 $\dfrac{1-n}{e^{n+1}}=0$，得　　$n=1$

$\therefore$ 当 $n>1$ 时， $f'(m,n)<0$

当 $n<1$， $f'(m,n)>0$

$\therefore$ 当 $n=1$ 时， $f(m,n)_{\max}=\dfrac{1}{e^2}$

故选：**C.**

【点睛】

本题主要考查了根据不等式恒成立求最值问题，解题关键是掌握不等式恒成立的解法和导数求函数单调性的解法，考查了分析能力和计算能力,属于难题.

8、**B**

【解析】

先由 $x^2-3x-4>0$ 得 $x>4$ 或 $x<-1$，再计算 $(\complement_R A)\cap B$ 即可.

【详解】

由 $x^2-3x-4>0$ 得 $x>4$ 或 $x<-1$，

$\therefore A=(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$， $\complement_R A=[-1,4]$，

又$B=\{x|-1\le x\le 3\}$，$\therefore (\complement_R A)\cap B=[-1,3]$.

故选：**B**

【点睛】

本题主要考查了集合的交集，补集的运算，考查学生的运算求解能力.

9、**D**

【解析】

将$\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{EC}$用$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$表示，再代入$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$中计算即可.

【详解】

由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，知$O$为$\Delta ABC$的重心，

所以$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，又$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，

所以$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$9\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}^2+3\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，所以$2\overrightarrow{AB}^2=3\overrightarrow{AC}^2$，$\lambda=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选：**D**

【点睛】

本题考查平面向量基本定理的应用，涉及到向量的线性运算，是一道中档题.

10、**B**

【解析】

由$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，可得$\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA})$，再将$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$代入即可.

【详解】

因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$，故$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA})=$

$\frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC})=\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}-\frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查平面向量的线性运算性质以及平面向量基本定理的应用，是一道基础题.

11、**D**

【解析】

由半圆面积之比，可求出两个直角边AB,AC 的长度之比，从而可知$\tan\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$