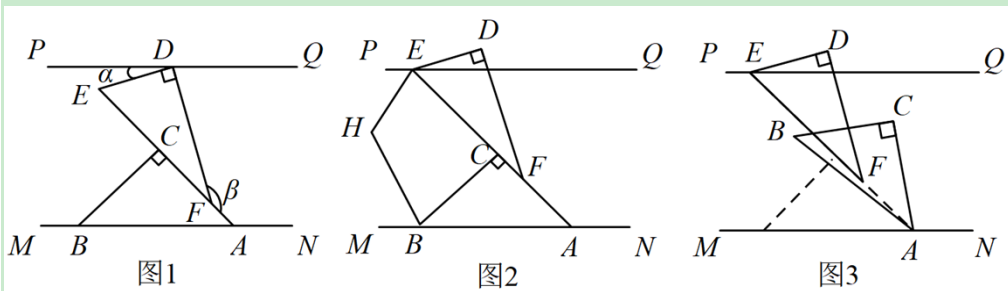


专题 5.2 平行线中的几何综合



典例精析

【典例 1】将一副三角板中的两块直角三角板如图 1 放置，已知 $PQ \parallel MN$ ， $\angle ACB = \angle EDF = 90^\circ$ ， $\angle ABC = \angle BAC = 45^\circ$ ， $\angle DFE = 30^\circ$ ， $\angle DEF = 60^\circ$ 。



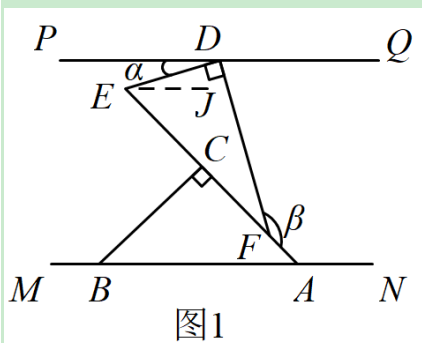
- (1) 若三角板如图 1 摆放时，则 $\angle \alpha = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle \beta = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。
- (2) 现固定 $\triangle ABC$ 位置不变，将 $\triangle DEF$ 沿 AC 方向平移至点 E 正好落在 PQ 上，如图 2 所示，作 $\angle PEA$ 和 $\angle MBC$ 的角平分线交于点 H ，求 $\angle EHB$ 的度数；
- (3) 将 (2) 中的 $\triangle DEF$ 固定，在 $\triangle ABC$ 绕点 A 以每秒 15° 的速度顺时针旋转至 AB 与直线 AN 首次重合的过程中，当 $\triangle ABC$ 的某条边与 $\triangle DEF$ 的一条边平行时，请求出符合条件 t 的值。

【思路点拨】

- (1) 如图 1 中，过点 E 作 $EJ \parallel PQ$ ，证明 $\angle DEF = \alpha + \angle BAC$ ，可得结论；
- (2) 如图 2 中，根据 (1) 可证 $\angle EHB = \angle PEH + \angle MBH$ 。利用角平分线的定义求出 $\angle PEH$ ， $\angle MBH$ ，可得结论；
- (3) 分 9 种情形：当 $AC \parallel DF$ 时，当 $AC \parallel DE$ 时，当 $AC \parallel EF$ 时，当 $BC \parallel DF$ 时，当 $BC \parallel ED$ 时，当 $BC \parallel EF$ 时，当 $AB \parallel DF$ 时，当 $AB \parallel ED$ 时，当 $AB \parallel EF$ 时，分别讨论求出 $\angle MBA$ 的度数，可得结论。

【解题过程】

(1) 解：如图 1 中，过点 E 作 $EJ \parallel PQ$ ，



$$\because PQ \parallel MN, \quad PQ \parallel EJ,$$

$$\therefore EJ \parallel MN,$$

$$\therefore \angle \alpha = \angle DEJ, \quad \angle JEA = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = \alpha + \angle BAC,$$

$$\because \angle DEF = 60^\circ,$$

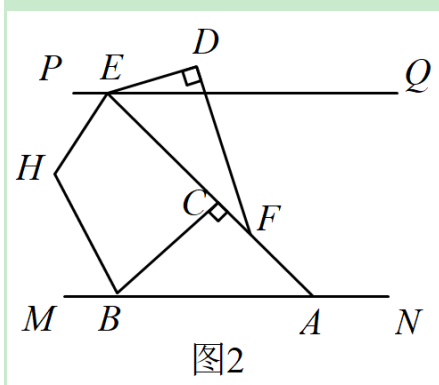
$$\therefore \alpha = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ,$$

$$\because \angle DFE = 30^\circ, \quad \beta + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ,$$

故答案为: 45, 150 ;

(2) 解: 如图 2 中,



利用 (1) 可证 $\angle EHB = \angle PEH + \angle MBH$.

$$\because PQ \parallel MN,$$

$$\therefore \angle QEA = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\because \angle CBA = 45^\circ,$$

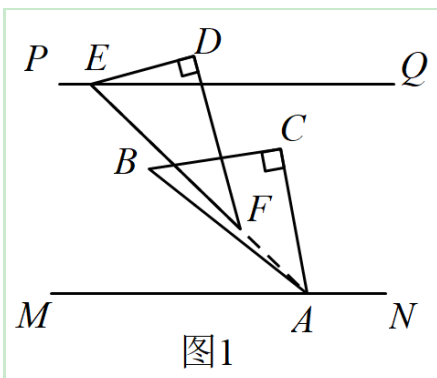
$$\therefore \angle CBM = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\because HE, \quad HB \text{ 分别平分 } \angle AEP, \angle CBM,$$

$$\therefore \angle PEH = \frac{1}{2} \angle PEA = 67.5^\circ, \quad \angle MBH = \frac{1}{2} \angle FBM = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle EHB = \angle PEH + \angle MBH = 135^\circ;$$

(3) 解: ①当 $AC \parallel DF$ 时, 如图 1,

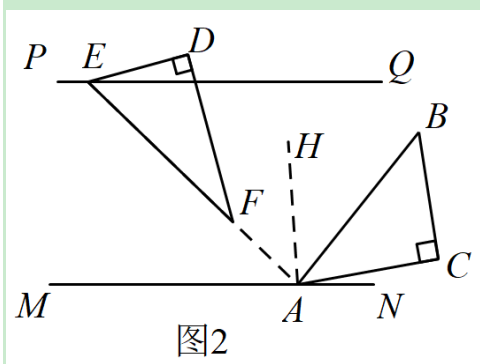


易得此时 $BC \parallel ED$,

$\because AC \parallel DF$, 易知 E, F, A 三点共线, $\angle DFE = \angle FAC = 30^\circ$,

$\therefore \angle FAB = \angle BAC - \angle FAC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, $\angle BAM = \angle FAM - \angle FAB = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, 即 $15t = 30$, 解得 $t = 2$;

②当 $AC \parallel DE$ 时, 如图 2,



易得此时 $BC \parallel DF$. 过点 A 作 $AH \parallel BC$, 则 $AH \parallel BC \parallel DF$,

$\therefore \angle EAB = \angle EAH + \angle BAH = \angle EFD + \angle ABC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$,

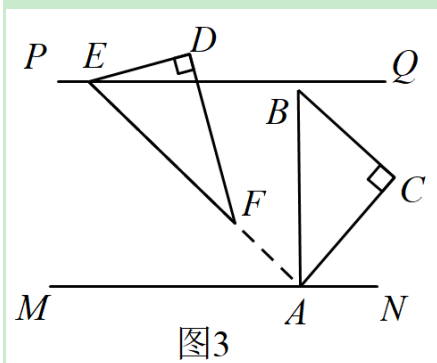
$\therefore \angle MAB = \angle MAE + \angle EAB = 45^\circ + 75^\circ = 120^\circ$.

$\therefore 15t = 120$,

$\therefore t = 8$,

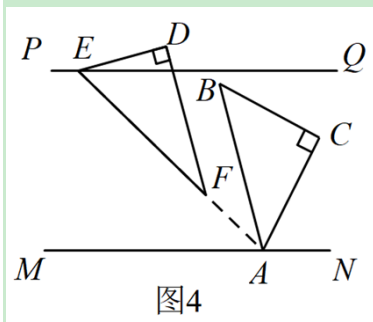
③当 $AC \parallel EF$ 时, 情况不存在; ④当 $BC \parallel DF$ 时, 同②; ⑤当 $BC \parallel ED$ 时, 同①;

⑥当 $BC \parallel EF$ 时, 如图 3,



此 $\angle MAB=90^\circ$ ，即 $15t=90$ ，解得 $t=6$ ；

⑦当 $AB \parallel DF$ 时，如图 4，

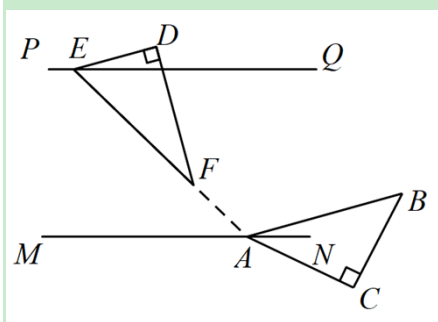


$\because AB \parallel DF$

$\therefore \angle BAF = \angle DFE = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle MAB = \angle MAF + \angle BAF = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ ，即 $15t=75$ ，解得 $t=5$ ；

⑧当 $AB \parallel ED$ 时，



$\because AB \parallel ED$ ，

$\therefore \angle FAB = 180^\circ - \angle DEF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle MAB = \angle MAF + \angle FAB = 120^\circ + 45^\circ = 165^\circ$ ，

$\therefore 15t=165$ ，

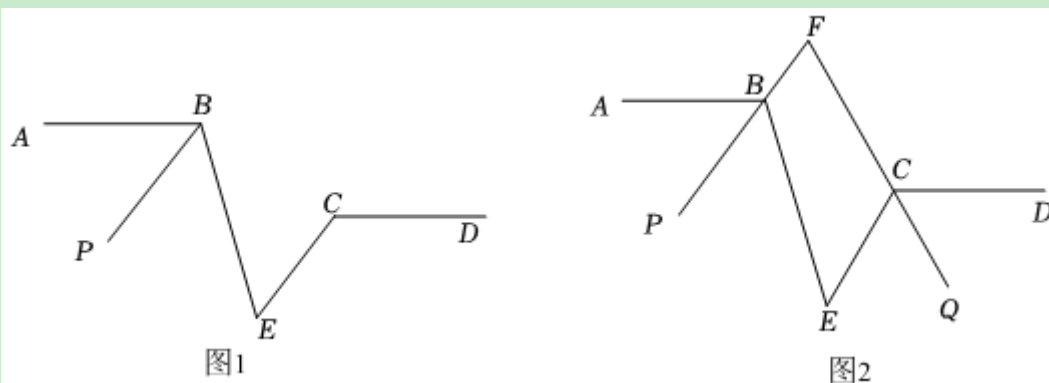
解得 $t=11$ ；

⑨当 $AB \parallel EF$ 时，此情况不存在．

综上所述， t 的值为 2 或 5 或 6 或 8 或 11．



1. (2022 春·湖北武汉·七年级统考期末) 直线 $AB \parallel CE$, $BE-EC$ 是一条折线段, BP 平分 $\angle ABE$.



(1) 如图 1, 若 $BP \parallel CE$, 求证: $\angle BEC + \angle DCE = 180^\circ$;

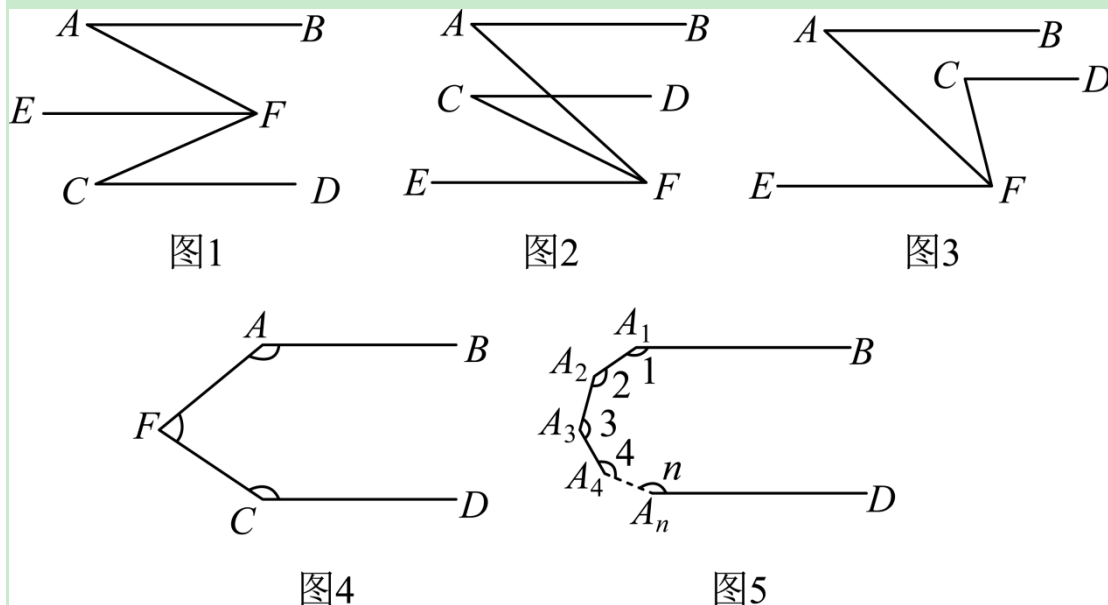
(2) CQ 平分 $\angle DCE$, 直线 BP , CQ 交于点 F .

①如图 2, 写出 $\angle BEC$ 和 $\angle BFC$ 的数量关系, 并证明;

②当点 E 在直线 AB , CD 之间时, 若 $\angle BEC = 40^\circ$, 直接写出 $\angle BFC$ 的大小.

2. (2022 春·河南安阳·七年级统考期末) 猜想说理:

(1) 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 分别就图 1、图 2、图 3 写出 $\angle A$, $\angle C$, $\angle AFC$ 的关系, 并任选其中一个图形说明理由:

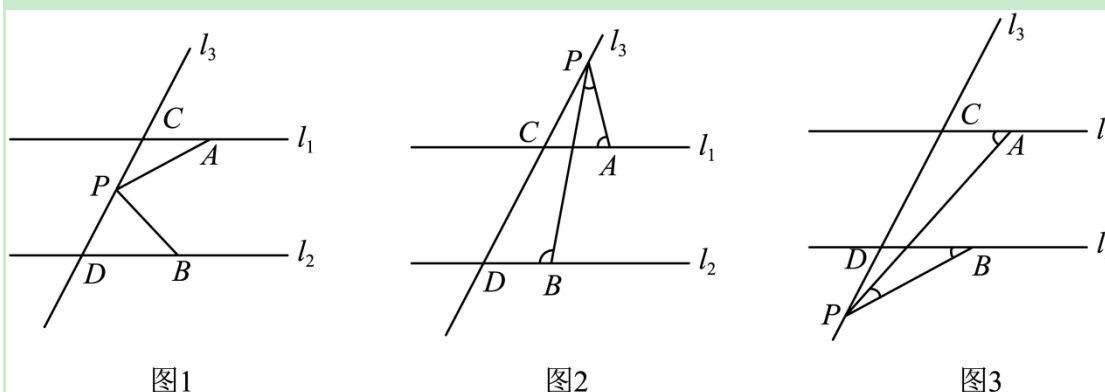


拓展应用:

(2) 如图 4, 若 $AB \parallel CD$, 则 $\angle A + \angle C + \angle AFC =$ _____ 度;

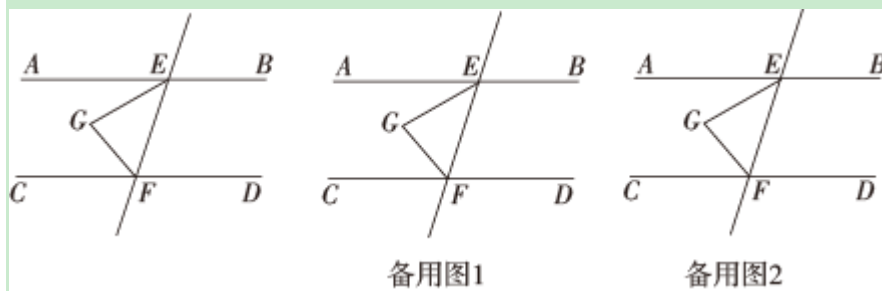
(3) 在图 5 中, 若 $A_1B \parallel A_nD$, 请你用含 n 的代数式表示 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \dots + \angle n$ 的度数.

3. (2022 春·四川广元·七年级统考期末) 已知直线 $l_1 \parallel l_2$, 直线 l_3 和 l_1, l_2 分别交于 C, D 两点, 点 A, B 分别在直线 l_1, l_2 上, 且位于直线 l_3 的右侧, 动点 P 在直线 l_3 上, 且不和点 C, D 重合.



- (1) 如图 1, 当动点 P 在线段 CD 上运动时, 求证: $\angle APB = \angle CAP + \angle DBP$.
- (2) 如图 2, 当动点 P 在点 C 上方运动时 (P, A, B 不在同一直线上), 请写出 $\angle APB, \angle CAP, \angle DBP$ 之间的数量关系, 并说明理由.
- (3) 如图 3, 当动点 P 在点 D 下方运动时 (P, A, B 不在同一直线上), 直接写出 $\angle APB, \angle CAP, \angle DBP$ 之间的数量关系.

4. （2022 春·全国·七年级期末）已知：如图， $AB \parallel CD$ ， BG 、 FG 分别是 $\angle AEF$ 和 $\angle CFE$ 的角平分线， BG 、 FG 交于点 G 。



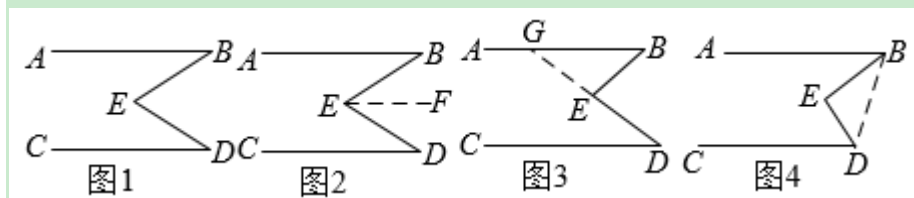
（1）求证： $\angle BGF = 90^\circ$ ；

（2）点 M 是直线 AB 上的动点，连接 MG ，过点 G 作 $GN \perp MG$ ，交直线 CD 于点 N ，画出图形直线，写出 $\angle MGE$ 和 $\angle NGF$ 的数量关系_____；

（3）在（2）的条件下，当 $\angle MGE = 20^\circ$ ， $\angle AEG = 40^\circ$ 时，求 $\angle CNG$ 的度数。

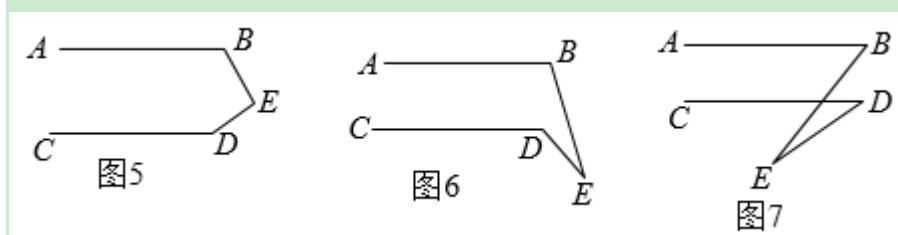
5. (2022 春·重庆永川·七年级统考期末) 已知: 如图, $AB \parallel CD$.

(1) 如图 1, 猜想并写出 $\angle B$ 、 $\angle D$ 、 $\angle E$ 之间的数量关系. 以下图 2、图 3、图 4 是三种不同角度思考采用的不同添加辅助线的方式, 请你选择其中的两种方式说明理由.

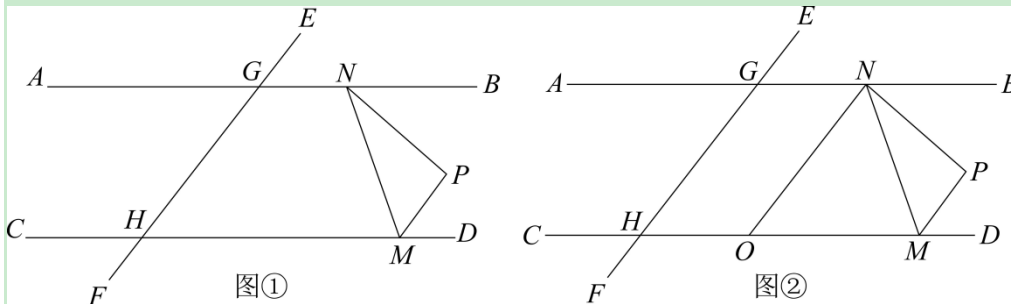


(2) 在图 4 中, 如果 BE 、 DE 分别平分 $\angle ABD$ 、 $\angle CDB$, 则 $\angle E$ 的度数是多少? (直接写出答案)

(3) 根据以上推理, 直接写出图 5、图 6、图 7 中的 $\angle B$ 、 $\angle D$ 、 $\angle E$ 之间的数量关系.



6. (2022 春·江苏扬州·七年级校联考阶段练习) 如图, 直线 $AB \parallel CD$, 直线 EF 与 AB 、 CD 分别交于点 G 、 H , $\angle EHD = \alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. 一个含 30° 角的直角三角板 PMN 中 $\angle MPN = 90^\circ$, $\angle PMN = 60^\circ$.



(1) 小安将直角三角板 PMN 按如图①放置, 使点 N 、 M 分别在直线 AB 、 CD 上, 且在点 G 、 H 的右侧, 证明: $\angle PNB + \angle PMD = \angle MPN$;

(2) 若 $\angle MNG$ 的平分线 NO 交直线 CD 于点 O , 点 N 、 M 分别在直线 AB 、 CD 上, 如图②.

①当 $NO \parallel EF$, $PM \parallel EF$ 时, 求 α 的度数;

②小安将三角板 PMN 保持 $PM \parallel EF$ 并向左平移, 请直接写出在平移的过程中 $\angle MON$ 的度数 $\angle MON =$ _____ (用含 α 的式子表示).

7. (2022 春·上海宝山·七年级校考阶段练习) 已知 $AB \parallel CD$, 点 M 为平面内的一点, $\angle AMD = 90^\circ$.

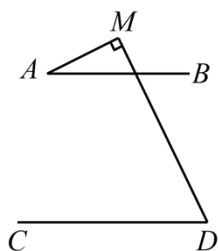


图 1

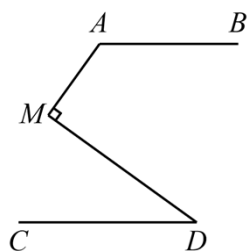


图 2

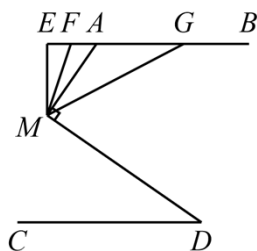


图 3

- (1) 当点 M 在如图 1 的位置时, 求 $\angle MAB$ 与 $\angle D$ 的数量关系 (写出说理过程);
- (2) 当点 M 在如图 2 的位置时, 则 $\angle MAB$ 与 $\angle D$ 的数量关系是_____ (直接写出答案);
- (3) 在 (2) 条件下, 如图 3, 过点 M 作 $ME \perp AB$, 垂足为 E , $\angle EMA$ 与 $\angle EMD$ 的角平分线分别交射线 EB 于点 F 、 G , 回答下列问题 (直接写出答案): 图中与 $\angle MAB$ 相等的角是_____, $\angle FMG =$ _____度.

8. (2022 春·河北石家庄·七年级统考期中) 【问题情景】 (1) 如图1, $AB \parallel CD$, $\angle PAB = 140^\circ$, $\angle PCD = 135^\circ$, 求 $\angle APC$ 的度数;

【问题迁移】 (2) 如图2, 已知 $\angle MON$, $AD \parallel BC$, 点 P 在射线 OM 上运动, 当点 P 在 A, B 两点之间运动时, 连接 PD, PC , $\angle ADP = \angle \alpha$, $\angle BCP = \angle \beta$, 求 $\angle CPD$ 与 $\angle \alpha, \angle \beta$ 之间的数量关系, 并说明理由;

【知识拓展】 (3) 在 (2) 的条件下, 若将“点 P 在 A, B 两点之间运动”改为“点 P 在 A, B 两点外侧运动(点 P 与点 A, B, O 三点不重合)”其他条件不变, 请直接写出 $\angle CPD$ 与 $\angle \alpha, \angle \beta$ 之间的数量关系.

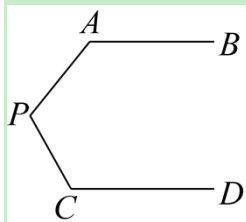


图 1

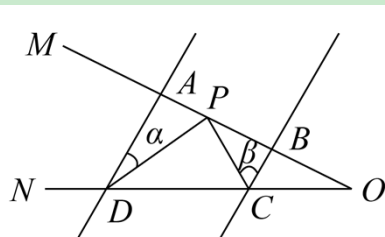
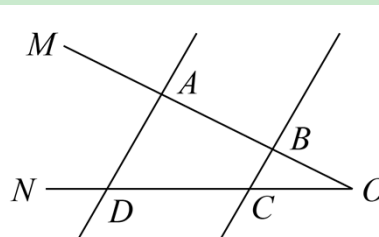


图 2



备用图

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/077133121035006201>