浙江省十校联盟选考学考 2024 届高三第二学期综合练习（一）数学试题

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2．答题时请按要求用笔。

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)$，$(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，若 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒有 $f(x)\le\left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$，在区间 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个 x_1 使 $f(x_1)=3$，则 ω 的最大值为（　　）

A．$\frac{123}{4}$　　B．$\frac{111}{4}$　　C．$\frac{105}{4}$　　D．$\frac{117}{4}$

2．如果直线 $ax+by=1$ 与圆 $C:x^2+y^2=1$ 相交，则点 $M(a,b)$ 与圆 C 的位置关系是（　　）

A．点 M 在圆 C 上　　B．点 M 在圆 C 外

C．点 M 在圆 C 内　　D．上述三种情况都有可能

3．某单位去年的开支分布的折线图如图 **1** 所示，在这一年中的水、电、交通开支（单位：万元）如图 **2** 所示，则该单位去年的水费开支占总开支的百分比为（　　）

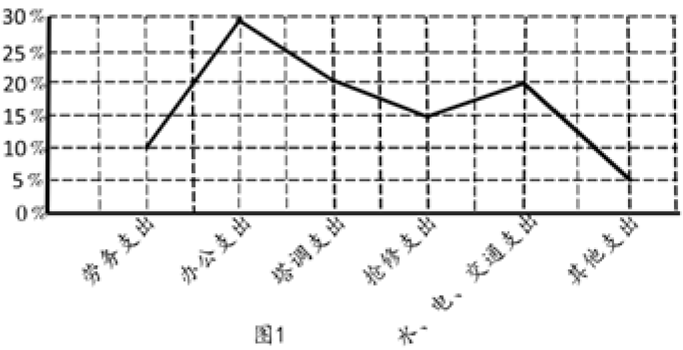


图1

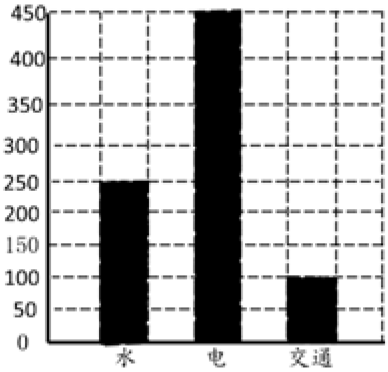


图2

A．6.25%　　B．7.5%　　C．10.25%　　D．31.25%

4．已知角 α 的顶点与坐标原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P(-3,-4)$，则 $\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为（　　）

A．$-\frac{24}{7}$　　B．$-\frac{17}{31}$　　C．$\frac{24}{7}$　　D．$\frac{17}{31}$

5．已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g\left(x\right)=xe^{-x}$.若存在$x_1\in\left(0,+\infty\right)$，$x_2\in R$使得$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=k\left(k<0\right)$成立，则$\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2e^k$的最大值为（　　）

A．e^2　　B．e

C．$\dfrac{4}{e^2}$　　D．$\dfrac{1}{e^2}$

6．下列函数中，既是奇函数，又在$(0,1)$上是增函数的是（　　）.

A．$f(x)=x\ln x$　　B．$f(x)=e^x-e^{-x}$

C．$f(x)=\sin 2x$　　D．$f(x)=x^3-x$

7．在ΔABC中，点***D***是线段***BC***上任意一点，$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．-2　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．2

8．已知复数z满足$z(1+i)=4-3i$，其中i是虚数单位，则复数z在复平面中对应的点到原点的距离为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{5}{2}$　　D．$\dfrac{5}{4}$

9．集合$P=\left\{x\in N\,|\,-2<x-1<2\right\}$的子集的个数是（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．8

10．已知数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1,a_2=2$，且当n为奇数时，$a_{n+2}-a_n=2$；当n为偶数时，$a_{n+2}+1=3\left(a_n+1\right)$．则此数列的前20项的和为（　　）

A．$\dfrac{3^{11}-3}{2}+90$　　B．$\dfrac{3^{11}-3}{2}+100$　　C．$\dfrac{3^{12}-3}{2}+90$　　D．$\dfrac{3^{12}-3}{2}+100$

11．在钝角$\vee ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，B为钝角，若$a\cos A=b\sin A$，则$\sin A+\sin C$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\dfrac{9}{8}$　　C．1　　D．$\dfrac{7}{8}$

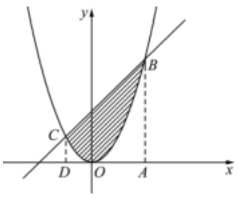
12．已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，以线段$F_1F_2$为直径的圆与双曲线在第二象限的交点为$P$，若直线$PF_2$与圆$E:\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{b^2}{16}$相切，则双曲线的渐近线方程是（　　）

A．$y=\pm x$　　B．$y=\pm 2x$　　C．$y=\pm\sqrt{3}x$　　D．$y=\pm\sqrt{2}x$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．过抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F 且倾斜角为锐角的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，过线段 AB 的中点 N 且垂直于 l 的直线与 C 的准线交于点 M，若 $|MN|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}|AB|$，则 l 的斜率为______.

14. 如图梯形 $ABCD$ 为直角梯形，$AB\perp AD,CD\perp AD$，图中阴影部分为曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=x+2$ 围成的平面图形，向直角梯形 $ABCD$ 内投入一质点，质点落入阴影部分的概率是____________



15．直线 $mx+ny-2=0$（$m>0$，$n>0$）过圆 C：$x^2+y^2-2x-2y-1=0$ 的圆心，则 $\dfrac{2}{m}+\dfrac{4}{n}$ 的最小值是______.

16．若实数□, □满足不等式组 $\begin{cases} □+□-4\le 0, \\ 2□-3□-8\le 0, \\ □\ge 1, \end{cases}$ 则目标函数□ = 3□ − □的最大值为__________.

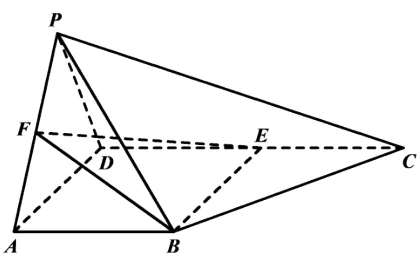
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3+a_6=20$，$S_5=35$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列$\{\dfrac{1}{S_n+n+2}\}$的前 n 项和为 T_n，求使 $T_n>\dfrac{9}{20}$ 成立的 n 的最小值.

18．（12 分）如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=AB=\dfrac{1}{2}CD,\angle DAB=60°$，点 E,F 分别为 CD,AP 的中点.



（1）证明：$PC\parallel$面 BEF；

（2）若 $PA\perp PD$，且 $PA=PD$，面 $PAD\perp$面 $ABCD$，求二面角 $F-BE-A$ 的余弦值.

19．（12 分）已知函数 $f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$.

（1）若 $x_1\ne x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$；

（2）若 $x\in\mathbf{R}$ 时，恒有 $f\left(x\right)\geq\frac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $ab+b$ 的最大值.

20.（12 分）等差数列 $\left\{a_n\right\}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 中，a_1，a_2，a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数，且其中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	**5**	**8**	**2**
第二行	**4**	**3**	**12**
第三行	**16**	**6**	**9**

（1）请选择一个可能的 $\left\{a_1,a_2,a_3\right\}$ 组合，并求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）记（1）中您选择的 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，判断是否存在正整数 k，使得 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列，若有，请求出 k 的值；若没有，请说明理由.

21.（12 分）已知 $a>0$，$b>0$，函数 $f\left(x\right)=\left|2x+a\right|+\left|x-b\right|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

（1）求证：$a+2b=1$；

（2）若 $2a+b\geq tab$ 恒成立，求实数 t 的最大值.

22.（10 分）“绿水青山就是金山银山”，为推广生态环境保护意识，高二一班组织了环境保护兴趣小组，分为两组，讨论学习．甲组一共有 4 人，其中男生 3 人，女生 1 人，乙组一共有 5 人，其中男生 2 人，女生 3 人，现要从这 9 人的两个兴趣小组中抽出 4 人参加学校的环保知识竞赛.

（1）设事件 A 为“选出的这 4 个人中要求两个男生两个女生，而且这两个男生必须来自不同的组”，求事件 A 发生的概率；

（2）用 X 表示抽取的 4 人中乙组女生的人数，求随机变量 X 的分布列和期望

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

【解析】

根据 $f\left(x\right)$ 的零点和最值点列方程组，求得 ω,φ 的表达式（用 k 表示），根据 $f\left(x_1\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值，求得 ω 的取值范围，求得对应 k 的取值范围，由 k 为整数对 k 的取值进行验证，由此求得 ω 的最大值.

【详解】

由题意知 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k_1,k_2\in Z$，则 $\begin{cases}\omega=\frac{3\left(2k+1\right)}{4},\\ \varphi=\frac{\left(2k'+1\right)\pi}{4},\end{cases}$ 其中 $k=k_1-k_2$，$k'=k_2+k_1$.

又 $f\left(x_1\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值，所以 $\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}=\frac{2\pi}{15}\le 2T$，得 $0<\omega\le 30$，即 $\frac{3\left(2k+1\right)}{4}\le 30$，所以 $k\le 19.5$，又 $k\in Z$，因此 $k\le 19$.

①当 $k=19$ 时，$\omega=\frac{117}{4}$，此时取 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ 可使 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 成立，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{117}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in\left(2.7\pi,6.6\pi\right)$，所以当 $\frac{117}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=4.5\pi$ 或 6.5π 时，$f\left(x_1\right)=3$ 都成立，舍去；

②当 $k=18$ 时，$\omega=\frac{111}{4}$，此时取 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 可使 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 成立，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{111}{4}x+\frac{\pi}{4}\in\left(2.1\pi,5.8\pi\right)$，所以当 $\frac{111}{4}x_1+\frac{\pi}{4}=2.5\pi$ 或 4.5π 时，$f\left(x_1\right)=3$ 都成立，舍去；

③当 $k=17$ 时，$\omega=\frac{105}{4}$，此时取 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ 可使 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 成立，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{105}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in\left(2.5\pi,6\pi\right)$，所以当 $\frac{105}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=4.5\pi$ 时，$f\left(x_1\right)=3$ 成立；

综上所得 ω 的最大值为 $\frac{105}{4}$.

故选:C

【点睛】

本小题主要考查三角函数的零点和最值，考查三角函数的性质，考查化归与转化的数学思想方法，考查分类讨论的数学思想方法，属于中档题.

2、**B**

【解析】

根据圆心到直线的距离小于半径可得a,b满足的条件，利用$M\left(a,b\right)$与圆心的距离判断即可.

【详解】

Q直线$ax+by=1$与圆$C:x^2+y^2=1$相交，

$\therefore$圆心$(0,0)$到直线$ax+by=1$的距离$d=\frac{|-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$，

即$\sqrt{a^2+b^2}>1$.

也就是点$M(a,b)$到圆C的圆心的距离大于半径.

即点$M(a,b)$与圆C的位置关系是点M在圆C外.

故选：B

【点睛】

本题主要考查直线与圆相交的性质，考查点到直线距离公式的应用，属于中档题.

3、**A**

【解析】

由折线图找出水、电、交通开支占总开支的比例，再计算出水费开支占水、电、交通开支的比例，相乘即可求出水费开支占总开支的百分比.

【详解】

水费开支占总开支的百分比为$\frac{250}{250+450+100}\times 20\%=6.25\%$.

故选：**A**

【点睛】

本题考查折线图与柱形图，属于基础题.

4、**B**

【解析】

根据三角函数定义得到$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，故$\tan 2\alpha=-\frac{24}{7}$，再利用和差公式得到答案.

【详解】

$\because$角α的终边过点$P(-3,-4)$，$\therefore \tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

$$\therefore \tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{24}{7}+1}{1+\frac{24}{7}\times 1}=-\frac{17}{31}.$$

故选：B．

【点睛】

本题考查了三角函数定义，和差公式，意在考查学生的计算能力.

5、C

【解析】

由题意可知，$g(x)=f(e^x)$，由$f(x_1)=g(x_2)=k(k<0)$可得出$0<x_1<1$，$x_2<0$，利用导数可得出函数$y=f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，函数$y=g(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递增，进而可得出$x_1=e^{x_2}$，由此可得出$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=g(x_2)=k$，可得出$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^k=k^2e^k$，构造函数$h(k)=k^2e^k$，利用导数求出函数$y=h(k)$在$k\in(-\infty,0)$上的最大值即可得解.

【详解】

$\because f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=\frac{x}{e^x}=\frac{\ln e^x}{e^x}=f(e^x)$，

由于$f(x_1)=\frac{\ln x_1}{x_1}=k<0$，则$\ln x_1<0\Rightarrow 0<x_1<1$，同理可知，$x_2<0$，

函数$y=f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$对$\forall x\in(0,1)$恒成立，所以，函数$y=f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，同理可知，函数$y=g(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递增，

$\therefore f(x_1)=g(x_2)=f(e^{x_2})$，则$x_1=e^{x_2}$，$\therefore \frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=g(x_2)=k$，则$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^k=k^2e^k$，

构造函数$h(k)=k^2e^k$，其中$\mathrm{k}<0$，则$h'(k)=(k^2+2k)e^k=k(k+2)e^k$．

当$k<-2$时，$h'(k)>0$，此时函数$y=h(k)$单调递增；当$-2<k<0$时，$h'(k)<0$，此时函数$y=h(k)$单调递减.

所以，$h(k)_{\max}=h(-2)=\frac{4}{e^2}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查代数式最值的计算，涉及指对同构思想的应用，考查化归与转化思想的应用，有一定的难度.

6、**B**

【解析】

奇函数满足定义域关于原点对称且 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0$，在 $(0,1)$ 上 $f'\left(x\right)\geq 0$ 即可.

【详解】

A：因为 $f(x)=x\ln x$ 定义域为 $x>0$，所以不可能时奇函数，错误；

B： $f(x)=e^{x}-e^{-x}$ 定义域关于原点对称，且 $f(x)+f\left(-x\right)=e^{x}-e^{-x}+e^{-x}-e^{x}=0$

满足奇函数，又 $f'\left(x\right)=e^{x}+e^{-x}>0$，所以在 $(0,1)$ 上 $f'\left(x\right)\geq 0$，正确；

C： $f(x)=\sin 2x$ 定义域关于原点对称，且 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sin 2x+\sin -2x=0$

满足奇函数， $f'\left(x\right)=2\cos 2x$，在 $(0,1)$ 上，因为 $f'\left(0\right)f'\left(1\right)=2\times 2\cos 2<0$，所以在 $(0,1)$ 上不是增函数，错误；

D： $f(x)=x^{3}-x$ 定义域关于原点对称，且 $f(x)+f\left(-x\right)=x^{3}-x+\left(-x^{3}+x\right)=0$，

满足奇函数， $f'\left(x\right)=3x^{2}-1$ 在 $(0,1)$ 上很明显存在变号零点，所以在 $(0,1)$ 上不是增函数，错误；

故选：**B**

【点睛】

此题考查判断函数奇偶性和单调性，注意奇偶性的前提定义域关于原点对称，属于简单题目.

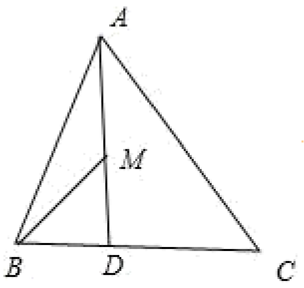
7、**A**

【解析】

设 $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BC}$，用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 表示出 $\overrightarrow{BM}$，求出 λ,μ 的值即可得出答案.

【详解】

设 $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AC}-k\overrightarrow{AB}$



由 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}$

$\therefore\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \lambda=-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}, \mu=\frac{k}{2}$，

$\therefore \lambda+\mu=-\frac{1}{2}$.

故选：A

【点睛】

本题考查了向量加法、减法以及数乘运算，需掌握向量加法的三角形法则以及向量减法的几何意义，属于基础题.

8、B

【解析】

利用复数的除法运算化简 z, 复数z在复平面中对应的点到原点的距离为$|z|$,利用模长公式即得解.

【详解】

由题意知复数z在复平面中对应的点到原点的距离为$|z|$,

$$z=\frac{4-3i}{1+i}=\frac{(4-3i)(1-i)}{2}=\frac{1-7i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i,$$

$$\therefore |z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

故选：B

【点睛】

本题考查了复数的除法运算，模长公式和几何意义，考查了学生概念理解，数学运算，数形结合的能力，属于基础题.

9、D

【解析】

先确定集合P中元素的个数，再得子集个数.

【详解】

由题意$P=\{x \in N \mid -1<x<3\}=\{0,1,2\}$，有三个元素，其子集有 8 个.

故选：D.

【点睛】

本题考查子集的个数问题，含有n个元素的集合其子集有2^n个，其中真子集有2^n-1个.

10、A

【解析】

根据分组求和法，利用等差数列的前n项和公式求出前20项的奇数项的和，利用等比数列的前n项和公式求出前20