湖南 2024 年高三数学新改革适应性

训练一

（九省联考题型）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 现有随机选出的 20 个数据，统计如下，则（　　）

7　24　39　54　61　66　73　82　82　82

87　91　95　8　98　102　102　108　114　120

A. 该组数据的众数为 102　　　　B. 该组数据的极差为 112

C. 该组数据的中位数为 87　　　　D. 该组数据的 80%分位数为 102

【答案】D

【解析】

【分析】先将数据按从小到大的顺序排列，再根据众数，极差，百分位数的定义即可判断.

【详解】将数据按从小到大的顺序排列：

7，8，24，39，54，61，66，73，82，82，

82，87，91，95，98，102，102，108，114，120，

对于 A，出现次数最多的是 82，所以众数是 82，故 A 错误；

对于 B，极差为$120-7=113$，故 B 错误；

对于 C，$\because 20\times50\%=10$，$\therefore$第 10 个数和第 11 个数的平均数为中位数，

即$\dfrac{82+82}{2}=82$，故 C 错误；

对于 D，$\because 20\times80\%=16$，$\therefore$第 16 个数和第 17 个数的平均数为 80%分位数，

即$\dfrac{102+102}{2}=102$，故 D 正确.

故选：D.

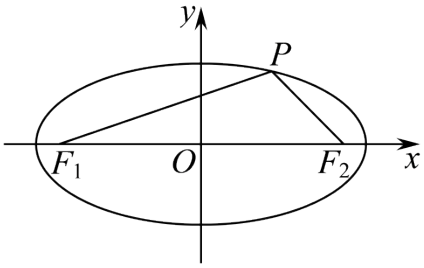
2. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$（$a>\sqrt{2}$）的两焦点分别为$F_1$、$F_2$．若椭圆上有一点 P，使$\angle F_1PF_2=120^\circ$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用点P在椭圆上得出定义表达式，运用余弦定理，联立求得mn的值，再运用三角形面积公式即得.

【详解】

如图，不妨设$|PF_1|=m,|PF_2|=n$，由点P在椭圆上可得：$m+n=2a$①，

由余弦定理可得：$m^2+n^2-2mn\cos 120^\circ=4c^2$，化简得：$m^2+n^2+mn=4c^2$②，

由①式两边平方再减去②式，得：$mn=4a^2-4c^2=4b^2=8$，

于是$\triangle PF_1F_2$的面积为$\frac{1}{2}mn\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

故选：D.

3. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$a_6^2-4a_4^2-3a_4a_6=0,S_4=15$，则$S_{2023}=$（　　）

A. $2^{2023}-1$　　　　B. $2^{2022}-1$　　　　C. 2^{2023}　　　　D. 2^{2022}

【答案】A

【解析】

【分析】利用等比数列的通项公式与求和公式计算即可.

【详解】设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为q（$q>0$）.

$\because a_6^2-4a_4^2-3a_4a_6=0$，$\therefore (a_6-4a_4)(a_6+a_4)=0$.

$\because a_n>0$，$\therefore a_6-4a_4=0$，故$\frac{a_6}{a_4}=q^2=4$，解得$q=2$（舍负值），

$\therefore S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{a_1(1-2^4)}{1-2}=15a_1=15$，

$\therefore a_1=1$，$\therefore S_{2023}=\frac{1-2^{2023}}{1-2}=2^{2023}-1$.

故选：A.

4. 已知m，n是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，下列说法正确的是（　　）

A. 若$m//n$，且$n\subset \alpha$，则$m//\alpha$　　B. 若$m\perp n$，且$n\subset \alpha$，则$m\perp \alpha$

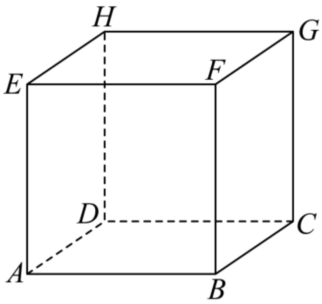
C. 若$m//\alpha$，且$m//\beta$，则$\alpha //\beta$　　D. 若$m\perp \alpha$，且$m\perp \beta$，则$\alpha //\beta$

【答案】D

【解析】

【分析】构建正方体，利用其特征结合空间中直线与平面的位置关系一一判定选项即可.

【详解】



如图所示正方体，

对于A，若m,n,α对应直线AB,CD与平面$ABCD$，显然符合条件，但$m\subset \alpha$，故A错误；

对于B，若m,n,α对应直线AB,CB与平面$ABCD$，显然符合条件，但$m\subset \alpha$，故B错误；

对于C，若m,α,β对应直线AB与平面$HGCD$，平面$HGFE$，显然符合条件，但$\beta\cap\alpha=HG$，故C错误；

对于D，若$m\perp \alpha$，且$m\perp \beta$，又α，β是两个不同的平面，则$\alpha //\beta$，故D正确.

故选：D

5. 设集合$A=\{a,b,c\}$，其中a,b,c为自然数且$a+b+c=100$，则符合条件的集合A的个数为（　　）

A. 833　　B. 884　　C. 5050　　D. 5151

【答案】A

【解析】

【分析】利用隔板法，然后排除有两个数相同的结果，再结合集合元素的无序性可得.

【详解】将100个小球排成一列，在101个空位（包括两段的空位）中插入第一个挡板，再在产生的102个空位中插入第二个挡板，将小球分成三段，分别记每段中的小球个数为a、b、c，共有$\frac{101\times 102}{2}=5151$种结果，

因为$a+b+c=100$，所以a、b、c中含有两个0,1,2，…，50各有3种结果，

所以a、b、c三个数各不相等的结果共有$5151-3\times 51=4998$个

因为三个元素的每种取值有6种不同顺序，

所以，由集合元素的无序性可知符合条件的集合 A 的个数为 $4998 \div 6 = 833$ 个.

故选：A

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，设 $A(1,0)$，$B(3,4)$，$C\left(\frac{1}{2},-1\right)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1$，则 $\tan\angle PCA$ 最大值为（　　）

A. $\frac{2\sqrt{21}}{21}$　　　　B. $\frac{4\sqrt{29}}{29}$　　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】由已知条件可得，动点 P 的轨迹为以 $D(2,2)$ 为圆心，2 为半径的圆，可得 D,A,C 三点共线，当 PC 与圆相切时，$\angle PCA$ 为锐角且最大，$\tan\angle PCA$ 最大，求出 $|PC|$，由 $\tan\angle PCA = \frac{|DP|}{|PC|}$，求值即可.

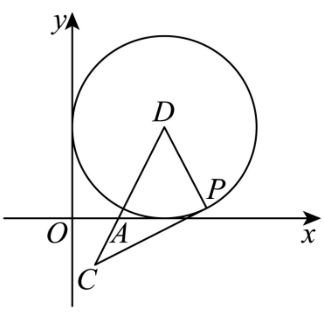
【详解】设点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA} = (1-x,-y)$，$\overrightarrow{PB} = (3-x,4-y)$，

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} = (1-x)(3-x)+(-y)(4-y) = -1$，

整理可得 $(x-2)^2+(y-2)^2 = 4$，

动点 P 的轨迹是以 $D(2,2)$ 为圆心，2 为半径的圆，

$k_{AC} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$，$k_{AD} = \frac{2-0}{2-1} = 2$，故 D,A,C 三点共线，如图所示，



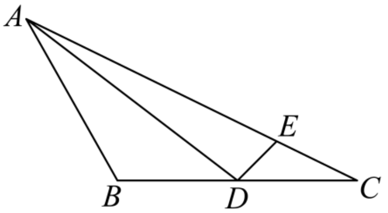
当 PC 与圆相切时，$\angle PCA$ 为锐角且最大，$\tan\angle PCA$ 最大，$\angle PCA$ 即 $\angle PCD$，

由 $|DC| = \sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+(2+1)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$，此时 $|PC| = \sqrt{|DC|^2-|DP|^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$，

则 $\tan\angle PCA=\frac{|DP|}{|PC|}=\frac{2}{\frac{\sqrt{29}}{2}}=\frac{4\sqrt{29}}{29}$.

故选：B

7. 如图，在$\triangle ABC$中，D是BC的中点，E是AC上的点，$AC=2AB$，$CD=1$，$AE=3EC$，$\angle ADB=\angle EDC=\alpha$，则$\cos\alpha=$（　　）



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　D. $\frac{3}{4}$

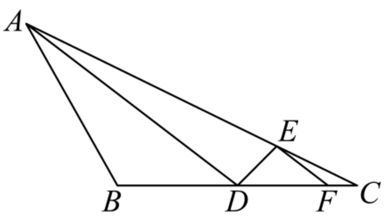
【答案】D

【解析】

【分析】作DC的四等分点，使得$EF//AD$，然后在三角形ABC与三角形ABD中，使用余弦定理表示出$AD^2=\frac{5x^2-2}{2}$，再结合$\angle ADB=\angle EDC=\alpha$，两次使用余弦定理$\cos\alpha=\frac{1+AD^2-x^2}{2AD}=\frac{\frac{9}{16}+DE^2-EF^2}{2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}AD}$，从而解得所需要的边长，解出$\cos\alpha$.

【详解】设$AB=x,AC=2x$,在三角形ABC与三角形ABD中，

$$\cos B=\frac{1+x^2-AD^2}{2x}=\frac{4+x^2-4x^2}{4x},解得：AD^2=\frac{5x^2-2}{2},$$



作DC的四等分点，且$DF=3FC$,由题意知，$DF=\frac{3}{4},FC=\frac{1}{4}$,

又因为$AE=3EC$，所以$EF//AD,\angle ADB=\angle EFD=\alpha$,

又$\angle ADB=\angle EDC=\alpha$，所以$\angle EFD=\angle EDF=\alpha$,$ED=EF=\frac{1}{4}AD$,

在三角形 ABD 与三角形 EDF 中，$\cos\alpha=\frac{1+AD^2-x^2}{2AD}=\frac{\frac{9}{16}+DE^2-EF^2}{2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}AD}$，

化简得：$AD^2-x^2=2$，代入 $AD^2=\frac{5x^2-2}{2}$，解得：$x=\sqrt{2},AD=2$，

从而解得：$\cos\alpha=\frac{1+AD^2-x^2}{2AD}=\frac{3}{4}$，

故选：D.

8. 已知直线 l：$y=kx+m$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 至多有一个公共点，则 $z=\frac{\sqrt{10}}{2}k+m$ 的取值范围是（　　）

A. $[-2,2]$　　　　B. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

C. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　　　D. $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$

【答案】D

【解析】

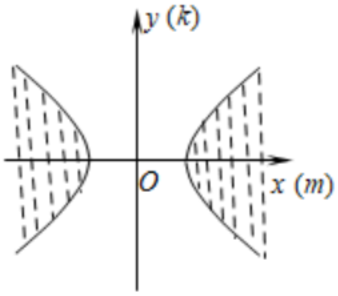
【分析】由直线 l：$y=kx+m$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 至多有一个公共点，即联立方程 $\Delta\le 0$，化简整理得 $\frac{m^2}{4}-\frac{5k^2}{4}\ge 1$，即可理解为双曲线 $\frac{m^2}{4}-\frac{5k^2}{4}=1$ 外部的点（可行域），转化为线性规划的题，然后化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到 $z=\frac{\sqrt{10}}{2}k+m$ 的取值范围.

【详解】联立方程 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，化简整理得：$(5k^2+4)x^2+10kmx+5m^2-20=0$

因为直线 l：$y=kx+m$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 至多有一个公共点，

所以 $\Delta=(10km)^2-4(5k^2+4)(5m^2-20)\le 0$，即 $\frac{m^2}{4}-\frac{5k^2}{4}\ge 1$，

即点 (m,k) 满足双曲线 $\frac{m^2}{4}-\frac{5k^2}{4}=1$ 外部的点，即可行域，如图所示，m 为 x 轴，k 为 y 轴，



将 $z=\frac{\sqrt{10}}{2}k+m$ 变形为 $k=-\frac{2}{\sqrt{10}}m+\frac{2z}{\sqrt{10}}$，平移直线 $k=-\frac{2}{\sqrt{10}}m$，

由图可知，当直线 $k=-\frac{2}{\sqrt{10}}m+\frac{2z}{\sqrt{10}}$ 与双曲线 $\frac{m^2}{4}-\frac{5k^2}{4}=1$ 相切时为临界条件.

联立 $\begin{cases}k=-\frac{2}{\sqrt{10}}m+\frac{2z}{\sqrt{10}}\\ \frac{m^2}{4}-\frac{5k^2}{4}=1\end{cases}$，化简整理得：$m^2-4zm+2z^2-4=0$

由题知，$\Delta=(4z)^2-4(2z^2-4)=8z^2-16=0$，解得 $z=\pm\sqrt{2}$

若可行域是双曲线 $\frac{m^2}{4}-\frac{5k^2}{4}=1$ 右支外部的点，即临界条件切线需要往上平移，即 $z\geq\sqrt{2}$；

若可行域是双曲线 $\frac{m^2}{4}-\frac{5k^2}{4}=1$ 左支外部的点，即临界条件切线需要往下平移，即 $z\leq-\sqrt{2}$；

综上可知，$z=\frac{\sqrt{10}}{2}k+m$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$

故选：D.

【点睛】本题考查直线与椭圆交点个数问题，考查用双曲线外部点作可行域，求线性目标函数的最值，考查学生的转化与化归思想，数形结合思想与运算求解能力，属于难题.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 正切函数是周期函数，最小正周期为 π

B. 正切函数的图象是不连续的

C. 直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$ 是正切曲线的渐近线

D. 把 $y=\tan x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的图象向左、右平行移动 $k\pi$ 个单位，就得到 $y=\tan x$ $(x\in R, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$

的图象

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据正切函数的性质，以及它的的图象的特点，即可判断 A，B。C；结合图象的平移变换规律可判断 D.

【详解】正切函数是周期函数，周期为$k\pi(k\in Z)$，最小正周期为π，

正切曲线是由相互平行的直线$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$(称为渐近线)所隔开的无穷多支曲线组成的，

因此曲线不连续，故 A，B，C 均正确.

选项 D 中，没有明确k的取值，比如$k=\dfrac{1}{2}$时，即得不到$y=\tan x\ (x\in R,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2})$的图象，故 D 错误.

故选：ABC

10. 已知复数z_1，z_2在复平面上对应的点分别为A，B，且O为复平面原点若．$z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$（i 为虚数单位)，向量$\overrightarrow{OA}$绕原点逆时针方向旋转 90°，且模伸长为原来的 2 倍后与向量$\overrightarrow{OB}$重合，则（　　）

A. z_2的虚部为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B. 点B在第二象限

C. $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

D. $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=2$

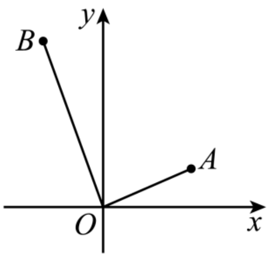
【答案】BD

【解析】

【分析】结合复数的几何意义，依题意求解出对应的坐标，然后逐项判断即可；

【详解】因为$z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$， 所以$z_1$对应的坐标为$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$|z_1|=1$，

$\overrightarrow{OA}$向量与x轴夹角为$\theta,\tan\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\theta=\dfrac{\pi}{6}$,



由题意可知，$\left|z_2\right|=2$, 且 $\overrightarrow{OB}=2\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(-1,\sqrt{3}\right)$，选项 B 正确；

$z_2=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_2$ 的虚部为 $\sqrt{3}$，选项 A 错误；

$z_1+z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$，所以 $\left|z_1+z_2\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}$，选项 C 错误；

$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{\left|z_2\right|}{\left|z_1\right|}=2$，选项 D 正确；

故选：BD.

11. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f\left(x\right)$，满足 $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)-f\left(2-x\right)f\left(2-y\right)$，且 $f\left(0\right)\neq 0$，$f\left(-2\right)=0$，则（　　）

A. $f\left(2\right)=1$

B. $f\left(x\right)$ 是偶函数

C. $\left[f\left(x\right)\right]^2+\left[f\left(2+x\right)\right]^2=1$

D. $\sum\limits_{i=1}^{2023}f(i)=-1$

【答案】BCD

【解析】

【分析】通过对抽象等式中的自变量进行赋值求值，依次判断函数的奇偶性、对称性、周期性，再利用用周期性求出若干值，对选项依次判断求解.

【详解】对于 A 项，由 $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)-f\left(2-x\right)f\left(2-y\right)$，

令 $x=y=1$，则 $f\left(2\right)=\left[f\left(1\right)\right]^2-\left[f\left(1\right)\right]^2=0$，故 A 项错误；

对于 B 项，令 $x=y=0$，则 $f\left(0\right)=\left[f\left(0\right)\right]^2-\left[f\left(2\right)\right]^2=\left[f\left(0\right)\right]^2$，

因 $f\left(0\right)\neq 0$，故 $f\left(0\right)=1$，

令 $y=2$，则 $f\left(x+2\right)=f\left(x\right)f\left(2\right)-f\left(2-x\right)f\left(0\right)=-f\left(2-x\right)$①，

知函数 $f\left(x\right)$ 关于点 $\left(2,0\right)$ 成中心对称，

令 $x=y=2$，则 $f(4)=\left[f(2)\right]^2-\left[f(0)\right]^2=-1$，

令 $y=4$，则 $f(x+4)=f(x)f(4)-f(2-x)f(-2)=-f(x)$②，

由①可得：$f(x+4)=-f(-x)$③，由①②可知：$f(-x)=f(x)$，

且函数 $f(x)$ 的定义域为 R，则函数 $f(x)$ 是偶函数，故 B 项正确；

对于 C 项，令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)f(-x)-f(2-x)f(2+x)$，

因为 $f(0)=1$，$f(-x)=f(x)$，$f(x+2)=-f(2-x)$，代入上式中得，

故得：$\left[f(x)\right]^2+\left[f(2+x)\right]^2=1$，故 C 项正确；

对于 D 项，由上可知：$f(x+4)=-f(x)$，则 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，

故函数 $f(x)$ 的一个周期为 8.

令 $x=2, y=1$，则 $f(3)=f(2)f(1)-f(0)f(1)=-f(1)$，即有 $f(3)+f(1)=0$，

因函数 $f(x)$ 是偶函数，故有 $f(-3)+f(-1)=0$，

由函数 $f(x)$ 的一个周期为 8，则 $f(5)+f(7)=f(-3)+f(-1)=0$，

由上知：$f(2)=0, f(4)=-1, f(6)=f(-2)=0, f(8)=f(0)=1$，

于是：$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=0+0+(-1)+0+0+1=0$，

则 $\sum_{i=1}^{2023} f(i)=253\times 0-f(2024)=-f(8)=-1$，故 D 项正确.

故选：BCD.

【点睛】结论点睛：解决抽象函数的求值、性质判断等问题，常见结论：

（1）关于对称：若函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 轴对称，则 $f(x)=f(2a-x)$，若函数 $f(x)$ 关于点 (a,b) 中心对称，则 $f(x)=2b-f(2a-x)$，反之也成立；

（2）关于周期：若 $f(x+a)=-f(x)$，或 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$，可知函数 $f(x)$ 的周期为 $2a$.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若命题“$\exists a<0$，$a+\dfrac{1}{a}>b$”是假命题，则实数 b 的取值范围为________.