

## 拓展 2 数列求和常用的方法 (精练)

### 题组 1 公式法求和

1. (2022 高三上·益阳月考) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 数列  $\{b_n\}$  是等差数列, 且

$$b_1 = a_2, b_3 = a_2 + a_3 + a_4.$$

(1) 求数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $c_n = a_n + b_n$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

2. (2022 江苏) 从①  $(3n-1)a_{n+1} = (3n+2)a_n$ , ②  $a_2 = 5$ ,  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$  这两个条件中任选一个, 补充在下面的问题中并作答. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ , \_\_\_\_\_.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}$ , 求数列  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

注: 若选两个条件分别作答, 则按第一个解答计分.

3. (2022 浙江) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{3-(-1)^n}{2}a_n + \frac{1+(-1)^n}{2}$ .

(1) 设  $b_n = a_{2n-1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n}$ .

## 题组2 裂项相消求和

1. (2022 武汉) 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $S_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, (n=2k+1, k \in \mathbb{N}) \\ \frac{n}{2}, (n=2k, k \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

2. (2022 浙江) 已知数列  $\{a_n\}$  为公差非 0 的等差数列, 且  $a_2 = 4$ ,  $a_1, a_2, a_4$  成等比数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 令  $b_n = (-1)^n \frac{a_n + 1}{S_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前 2022 项和.

3. (2022 河北开学考) 已知正项数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ , 且  $a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $b_n = \frac{a_n}{2n+1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求证:  $\frac{1}{3} \leq S_n < \frac{1}{2}$ .

4. (2022 遵义开学考)  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_1 = 2$ ,  $2S_n = n(a_{n+1} + 1)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 证明: 当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} < \frac{1}{2}$ .

5. (2022 贵阳) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_3 = 3$ ,  $S_4 = a_4 + a_6$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ , 求证:  $T_n < \frac{3}{4}$ .

7. (2022 湖北) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和为  $S_n$ ,  $a_2 + S_3 = 20$ ,  $a_5 = 14$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$  并证明  $T_n < \frac{1}{6}$ .

8. (2022 湖北) 已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_{n+1}(a_{n+1} - 3) = a_n(a_n + 3) (n \in \mathbf{N}^*)$ , 且  $S_3 = 18$ .

(1) 证明: 数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

9. (2022 长治) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $4S_n = (a_n - 3)(a_n + 5) (n \in \mathbf{N}^*)$ , 且  $a_n > 0$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} = a_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 且  $b_1 = \frac{1}{3}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

10 (2022 哈尔滨) 已知数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 且  $a_6 = 3a_4 + 16$ ,  $a_3 = 3a_1 + 2$

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = \frac{(n-1)a_n}{n(n+1)}$ , 求  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$

11. (2022·江西模拟) 已知函数  $f(x) = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ , 方程  $f(x) = 1$  在  $(0, +\infty)$  上的解按从小到大的

顺序排成数列  $\{p_n\}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

(1) 求数列  $\{p_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $q_n = \frac{8p_n}{(4n-3)(4n^2-1)}$ , 数列  $\{q_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求证:  $T_n < \frac{\pi}{2}$ .

### 题组3 错位相减求和

1. (2022 四川) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 1$ ,  $b_{n+1} - b_n = 2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  及  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{a_n \cdot b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

2. (2023·巴中模拟) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1 = 2$ , 且  $S_{n+1} - 2S_n = 2$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = na_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

3. (2022 济南) 已知正项数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ , 且  $a_{n+1}^2 - a_n \cdot a_{n+1} - a_n - 1 = 0$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{2^n a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

4. (2022 邯郸开学考) 设  $S_n$  是等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $S_3 = 14$ ,  $S_6 = 126$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $b_n = (n-1)a_n$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $T_n$ .

5. (2022 邢台开学考) 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项积  $T_n = 2^{n^2}$ . 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \log_2 T_n$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的通项公式.

(2) 求数列  $\{a_n \cdot b_n\}$  的前  $n$  项和.

6. (2022 秦皇岛) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 2$ ,  $S_2 = 6$ , 当  $n \geq 2$  时,  $S_{n+1} + 2S_{n-1} = 3S_n$ .

(1) 求  $a_n$ ;

(2) 设  $b_n = na_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

7. (2023 茂名月考) 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ , 数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  为等差数列, 公差为  $d$ .

(1) 证明数列  $\{a_n\}$  为等差数列;

(2) 若  $d = \frac{1}{2}$ ,  $b_n = a_n \cdot 2^n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

## 题组 4 分组转化求和

1. (2022 郾都月考) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_5 + a_7 = 12$ .

(1) 求  $a_n$  及  $S_n$ ;

(2) 令  $b_n = \frac{1}{2S_n}$ , 求证: 数列  $\{b_n + 2^n\}$  的前  $n$  项和  $T_n < 2^{n+1}$ .

2. (2022 宿州期中) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ , 等比数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2^n - r (r \in \mathbb{R})$ , 且  $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 对任意正整数  $n$ , 设  $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_{n+1}}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{3b_n}{(b_{n-1})(b_{n+2} - 1)}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

3 (2022 如皋月考) 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足:  $S_6=21, S_7=28$ , 其中  $s_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项;

(2) 令  $b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{(2a_n - 1)(2a_n + 1)}$ , 证明:  $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq \frac{2n+2}{2n+1}$ .

4. (2022 湖北开学考) 已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 2$ ,  $S_{n+1} = S_n + (n+1)\left(\frac{3}{n}a_n + 2\right)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = a_n + n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

5. (2022·海宁模拟) 已知公差不为零的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 = 2$ ,  $a_4, a_6, a_9$  成等比数列. 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $S_n = 2 \cdot b_n - 2 (n \in \mathbb{N}^*)$

(1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 设数列  $\{c_n\}$  满足  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_{n+1}}{\sqrt{b_n}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

6. (2022·和平) 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q > 1$ ,  $a_1 + a_2 + a_3 = 14$ ,  $a_2 + 1$  是  $a_1, a_3$  的等差中项. 等差数列  $\{b_n\}$  满足  $4b_1 = a_2, b_8 = a_3$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式;

(2) 将数列  $\{a_n\}$  与数列  $\{b_n\}$  的所有项按照从小到大的顺序排列成一个新的数列, 求此新数列的前 50 项和

(3)  $c_n = \begin{cases} \frac{b_n}{a_n}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{b_n^2 - 4(b_n - 2)^2}{a_n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, (n \in \mathbb{N}^*)$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和  $\sum_{i=1}^{2n} c_i$ .

7 (2022·南开) 已知数列  $\{a_n\}$  是公比  $q > 1$  的等比数列, 前三项和为 13, 且  $a_1, a_2 + 2, a_3$  恰好分别是等差数列  $\{b_n\}$  的第一项, 第三项, 第五项.

(1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 已知  $k \in \mathbb{N}^*$ , 数列  $\{c_n\}$  满足  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{b_n b_{n+2}}, & n = 2k - 1 \\ a_n b_n, & n = 2k \end{cases}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n}$ ;

(3) 设  $d_n = \frac{(8n-10)a_n - 1}{(2a_n + 1)(2a_{n+2} + 1)}$ , 求数列  $\{d_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .



## 拓展2 数列求和常用的方法（精练）

### 题组1 公式法求和

1. (2022 高三上·益阳月考) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 数列  $\{b_n\}$  是等差数列, 且  $b_1 = a_2$ ,  $b_3 = a_2 + a_3 + a_4$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $c_n = a_n + b_n$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

答案: 见解析

【解析】(1) 解: 因为数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

所以, 数列  $\{a_n\}$  是以 1 为首项, 公比为 2 的等比数列, 所以,  $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$ ,

即数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2^{n-1}$ ,

设等差数列  $\{b_n\}$  的公差为  $d$ , 由  $b_1 = a_2 = 2$ ,  $b_3 = a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 4 + 8 = 14$ ,

得  $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_1 + 2d = 14 \end{cases}$ , 解得  $d = 6$ , 所以,  $b_n = b_1 + (n-1)d = 6n - 4$ ,

即数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = 6n - 4$ ;

(2) 解: 有 (1) 可知  $c_n = a_n + b_n = 2^{n-1} + 6n - 4$ ,

所以, 数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和

$$S_n = (1 + 2 + \dots + 2^{n-1}) + (2 + 8 + \dots + (6n - 4)) = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} + \frac{n(2 + 6n - 4)}{2} = 2^n + 3n^2 - n - 1,$$

即  $S_n = 2^n + 3n^2 - n - 1$ .

2. (2022 江苏) 从①  $(3n-1)a_{n+1} = (3n+2)a_n$ , ②  $a_2 = 5$ ,  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$  这两个条件中任选一个, 补充在下面的问题中并作答. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ , \_\_\_\_\_.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}$ , 求数列  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

注: 若选两个条件分别作答, 则按第一个解答计分.

答案: 见解析

【解析】(1) 解: 选①, 由  $(3n-1)a_{n+1} = (3n+2)a_n$  及  $a_1 = 2$ , 可知  $a_n \neq 0$ , 所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+2}{3n-1},$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, 有 } a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \text{L} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_2}{a_1} \times a_1 \\ &= \frac{3n-1}{3n-4} \times \frac{3n-4}{3n-7} \times \text{L} \times \frac{11}{8} \times \frac{8}{5} \times \frac{5}{2} \times 2 = 3n-1. \end{aligned}$$

当  $n=1$  时,  $a_1 = 3 \times 1 - 1 = 3n - 1$  适合上式, 故  $a_n = 3n - 1$ .

选②, 由  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ , 得  $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ , 所以  $\{a_n\}$  为等差数列,

由  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 5$ , 得该数列的公差  $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$ ,

所以  $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$ .

$$(2) \text{ 解: } b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-1}, \therefore a_n + b_n = 3n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-1},$$

$$\text{则 } T_n = [2 + 5 + 8 + \text{L} + (3n-1)] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \text{L} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-1}\right],$$

$$\therefore T_n = \frac{(2+3n-1)n}{2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n}{1 - \frac{1}{8}} \right] = \frac{(3n+1)n}{2} + \frac{2}{7} \left[ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n \right].$$

$$3. (2022 \text{ 浙江}) \text{ 已知数列 } \{a_n\} \text{ 满足 } a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3 - (-1)^n}{2} a_n + \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

(1) 设  $b_n = a_{2n-1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n}$ .

答案: 见解析

$$\text{【解析】(1) 解: 由已知有: } a_{n+1} = \frac{3 - (-1)^n}{2} a_n + \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 2a_n, & n=2k+1, k \in Z \\ a_n + 1, & n=2k, k \in Z \end{cases}$$

$$\text{所以 } b_n + 1 = a_{2n-1} + 1,$$

$$b_{n+1} + 1 = a_{2n+1} + 1 = 2a_{2n} + 2 = 2a_{(2n-1)+1} + 2 = 2a_{2n-1} + 2 = 2(a_{2n-1} + 1) = 2(b_n + 1),$$

其中  $b_1 + 1 = a_1 + 1 = 2$ , 所以数列  $\{b_n + 1\}$  为以 2 为首项, 公比为 2 的等比数列.

$$\text{所以 } b_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n, \text{ 得 } b_n = 2^n - 1.$$

$$(2) \text{ 解: 由 (1) 知: } b_n = a_{2n-1} = 2^n - 1,$$

$$a_{2n} = 2a_{2n-1} = 2(2^n - 1),$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。  
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/078036074044006073>