

数学（人教版） | 九年级（上） 同步练习

第二十二章 二次函数

22.3 实际问题与二次函数

【小专题——实际应用中常见问题】

- 一、销售问题
- 二、拱桥问题
- 三、投球/运动问题
- 四、图形问题
- 五、喷水问题
- 六、行车问题
- 七、图形动态问题

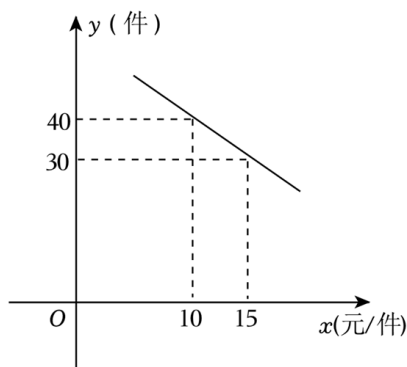
一. 销售问题

1. 一位助农主播利用“互联网+”销售一种农业加工品，这种加工品的成本价为 10 元/件，已知销售价不低于成本价，且物价部门规定这种加工品的销售利润率不高于 60%，市场调查发现，该加工品每天的销售量 y （件）与销售价 x （元/件）之间的函数关系如图所示.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

（2）求每天的销售利润 W （元）与销售价 x （元/件）之间的函数关系式，并求出每件销售价为多少元时，每天的销售利润最大？最大利润是多少？（销售利润=销售量×每件利润）

（3）该助农主播销售这种农业加工品每天获得的利润能否是 128 元？若能，求出销售单价应为多少元；若不能，请说明理由.



2. 商场将进货价为 30 元/个的台灯以 40 元/个的价格销售，每月能售出 600 个，调查表明：这种台灯的销售单价每上涨 1 元，其月销售量就会减少 10 个．规定该台灯的销售单价不得低于 40 元且不得超过 60 元．

(1) 为了实现这种台灯的月销售利润为 10000 元，则销售单价应定为多少元？

(2) 当台灯的销售单价为多少时，获得的利润最大？最大为多少？

3. 某商品的进价为每件 30 元，当售价为每件 40 元时，每个月可卖 230 件．如果每件商品的售价每上涨 1 元，则每个月少卖 10 件．规定每件售价不能高于 55 元，设每件商品的售价上涨 x 元 (x 为正整数)，每个月的销售利润为 y 元．

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量的取值范围；

(2) 每件商品的售价定为多少时，每个月可获得最大利润？最大月利润是多少元？

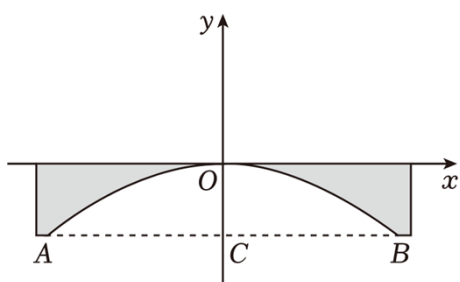
(3) 若在销售过程中，每件商品都有 a ($a > 2$) 元的其它费用，商家发现，当售价每件不低于 49 元时，每月的销售利润随 x 的增大而减小．求 a 的取值范围．

二. 拱桥问题

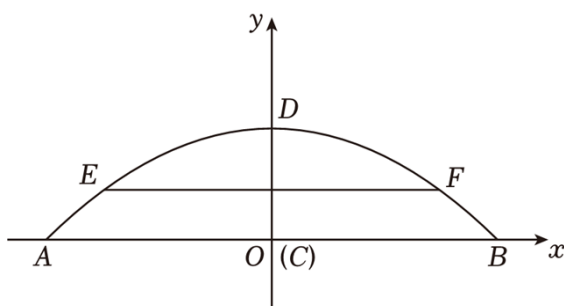
4. 某大桥的桥拱可以用抛物线的一部分表示，函数解析式为 $y = ax^2$ ．

(1) 若桥拱与抛物线 $y = -\frac{1}{25}x^2 - 2x + 3$ 的形状相同，则 $a =$ _____.

(2) 在 (1) 的条件下, 当水面的宽度 AB 为 $20m$ 时, 求水面到桥拱顶的高度 CO .



5. 一座拱型桥, 桥下水面宽度 AB 是 16 米, 拱高 CD 是 4 米, 大雨过后, 桥下水面宽度 EF 是 12 米, 求水面上涨了多少米? 若把它看作是抛物线的一部分, 在坐标系中 (如图), 可设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + c$, 请你求出此时水面上涨了多少米?



6. 如图 1, 是抛物线形的拱桥, 当拱顶高离水面 2 米时, 水面宽 4 米, 如图建立平面直角坐标系, 解答下列问题:

(1) 如图 2, 求该抛物线的函数解析式.

(2) 当水面 AB 下降 1 米, 到 CD 处时, 水面宽度增加多少米? (保留根号)

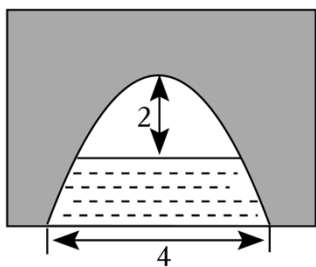


图1

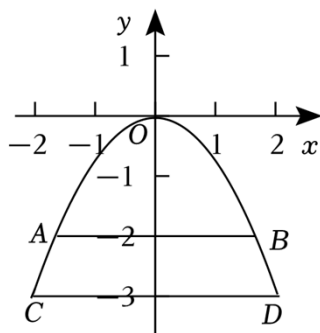


图2

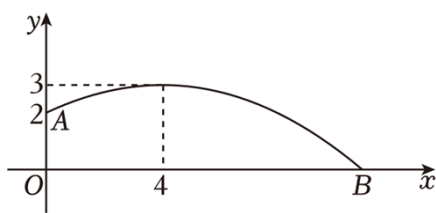
三. 投球/运动问题

7. 掷实心球是中考体育考试的项目. 如图是一男生所掷实心球的行进路线 (抛物线的一部分) 的高度 y (m) 与水平距离 x (m) 之间的函数图象, 且掷出时起点处高度为 $2m$, 当到起点的水平距离为 $4m$ 时, 实心球行进至最高点, 此时实心球与地面的距离为 $3m$.

(1) 求抛物线的函数解析式;

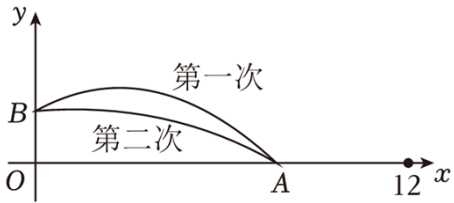
(2) 在该市的评分标准中, 实心球从起点到落地点的水平距离大于等于 $10m$ 时, 即可得满分, 试判断该男生在此项考试中能否得满分, 并说明理由 (参考数据:

$\sqrt{3} \approx 1.73$).



8. 教练对嘉淇推铅球的录像进行技术分析，发现铅球行进高度 y （单位： m ）与水平距离 x （单位： m ）之间的关系是 $y = ax^2 + bx + 1.6$ 。嘉淇第一次推铅球对应的抛物线如图所示，其中 $a = -0.1$ ，当铅球运行到水平距离为 $1m$ 时，铅球行进的高度为 $2.1m$ 。

- (1) 点 B 的坐标为 _____；它表示的实际意义是 _____；
- (2) 求铅球推出的距离 OA 的长；
- (3) 嘉淇第二次推出的水平距离刚好与第一次相同，且 $a = -0.05$ ，求推出铅球行进的最大高度；
- (4) 嘉淇第三次推出的铅球运行路径的形状与第二次相同，若嘉淇想拿下冠军，他推出的水平距离要超过 12 米，直接写出此时 b 的取值范围。

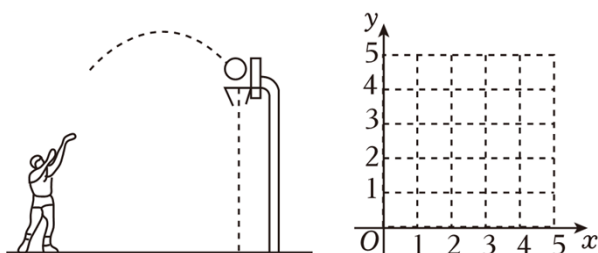


9. 2023 年 8 月 5 日，在成都举行的第 31 届世界大学生夏季运动会女子篮球金牌赛中，中国队以 99 比 91 战胜日本队，夺得冠军，女篮最重要的球员之一韩旭在日常训练中也迎难而上，勇往直前。投篮时篮球以一定速度斜向上抛出，不计空气阻力，在空中划过的运动路线可以看作是抛物线的一部分。建立平面直角坐标系 xOy ，篮球从出手到进入篮筐的过程中，它的竖直高度 y （单位： m ）与水平距离 x （单位： m ）近似满足二次函数关系，篮筐中心距离地面的竖直高度是 $3m$ ，韩旭进行了两次投篮训练。

(1) 第一次训练时，韩旭投出的篮球的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下：

水平距离 x/m	0	1	2	3	4	...
竖直高度 y/m	2.0	3.0	3.6	3.8	3.6	...

①在平面直角坐标系 xOy 中，描出上表中各对对应值为坐标的点，并用平滑的曲线连接：



②结合表中数据或所画图象，求篮球运行的最高点距离地面的竖直高度；

③已知此时韩旭距篮筐中心的水平距离 $5m$ ，韩旭第一次投篮练习是否成功，请说明理由.

(2) 第二次训练时，韩旭出手时篮球的竖直高度与第一次训练相同，此时投出的篮球的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系 $y=a(x-3)^2+4.25$ ，若投篮成功，求此时韩旭距篮筐中心的水平距离 d 的取值范围.

10. 2024 年巴黎奥运会 8 月 6 日单人 10 米决赛中，全红婵以 425.60 分的总分夺得第一获得金牌，陈芋汐位列第二获得银牌. 在精彩的比赛过程中，全红婵选择了一个极具难度的 207C（向后翻腾三周半抱膝）. 如图 2 所示，建立平面直角坐标系 xOy . 如果她从点 A （3，10）起跳后的运动路线可以看作抛物线的一部分，从起跳到入水的过程中她的竖直高度 y （单位：米）与水平距离 x （单位：米）近似满足函数关系式 $y=a(x-h)^2+k$ （ $a<0$ ）.

水平距离 x/m	3	h	4	4.5
竖直高度 y/m	10	11.25	10	6.25

(1) 在平时训练完成一次跳水动作时，全红婵的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如上：根据上述数据，直接写出 h 的值为 _____，直接写出满足的函数关系式： _____；

(2) 比赛当天的某一次跳水中, 全红婵的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系: $y = -5x^2 + 40x - 68$, 记她训练的入水点的水平距离为 d_1 ; 比赛当天入水点的水平距离为 d_2 , 则 d_1 _____ d_2 (填 $>$, $=$, $<$);

(3) 在(2)的情况下, 全红婵起跳后到达最高点 B 开始计时, 若点 B 到水平面的距离为 c , 则她到水面的距离 y 与时间 t 之间近似满足 $y = -5t^2 + c$, 如果全红婵在达到最高点后需要 1.4 秒的时间才能完成极具难度的 207C 动作, 请通过计算说明, 她当天的比赛能否成功完成此动作?



图1

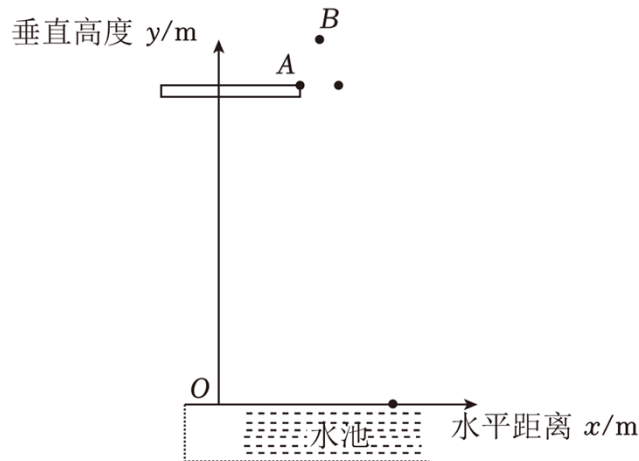


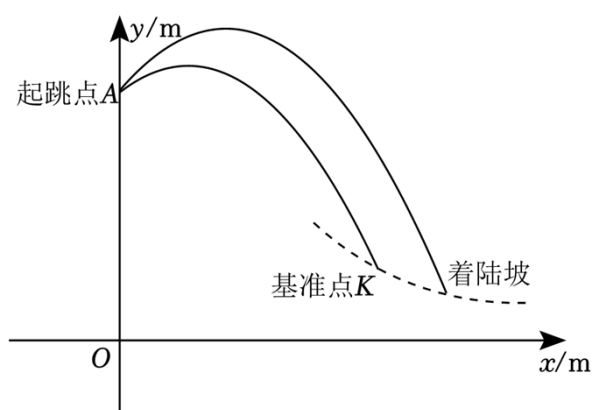
图2

11. 跳台滑雪运动可分为助滑、起跳、飞行和落地四个阶段, 运动员起跳后飞行的路线是抛物线的一部分 (如图中实线部分所示), 落地点在着陆坡 (如图中虚线部分所示) 上, 着陆坡上的基准点 K 为飞行距离计分的参照点, 落地点超过 K 点越远, 飞行距离分越高. 某次比赛某跳台滑雪台的起跳台的高度 OA 为 $60m$, 基准点 K 的高度为 $24m$, 基准点 K 到起跳台的水平距离为 dm (d 为定值). 设运动员从起跳点 A 起跳后的高度 y (m) 与水平距离 x (m) 之间的函数关系为 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

(1) c 的值为 _____;

(2) 若运动员落地点恰好到达 K 点; 且此时 $a = -\frac{1}{54}$, $b = \frac{5}{6}$, 求基准点 K 到起跳台的水平距离 d ;

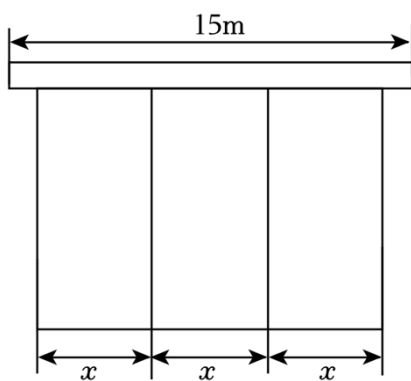
(3) 若运动员飞行的水平距离为 $32m$ 时, 恰好达到最大高度 $84m$, 试判断他的落地点能否超过 K 点, 并说明理由.



四. 图形问题

12. 如图，某校七年级三个班学生开展校内种植活动，计划在校内建造一个矩形菜地，为充分利用现有资源，该矩形菜地一面靠墙（墙的长度为 $15m$ ），另外三面用栅栏围成，中间再用栅栏把它分成三个面积相等的矩形，已知栅栏的总长度为 $36m$ ，设较小矩形的宽为 x m 。

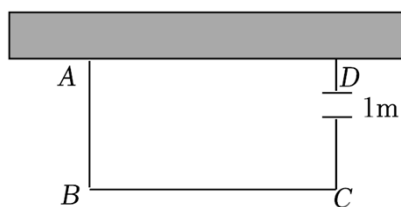
- (1) 若矩形菜地的总面积为 $72m^2$ ，求 x 的值；
- (2) 当 x 为何值时，矩形菜地的总面积最大？最大面积为多少？



13. 如图，一农户要建一个矩形鸡舍，为了节省材料鸡舍的一边利用长为 a 米的墙，另外三边用长为 27 米的建筑材料围成，为方便进出，在垂直墙的一边留下一个宽 1 米的门. 设 $AB=x$ 米时，鸡舍面积为 S 平方米.

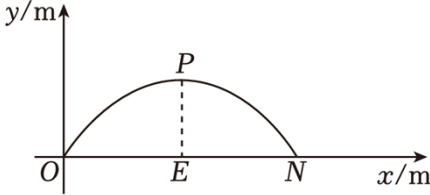
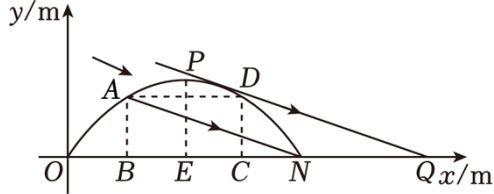
(1) 若 $a=14$ ，求 S 关于 x 的函数表达式及 x 的取值范围.

(2) 在 (1) 的条件下，当 AB 为多少时，鸡舍的面积为 90 平方米？



14.

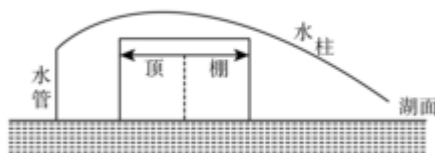
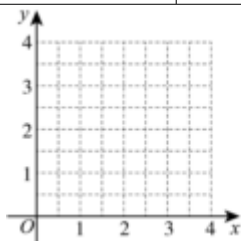
草莓种植大棚的设计	
生活背景	草莓种植大棚是一种具有保温性能的框架结构. 如图示，一般使用钢结构作为骨架，上面覆上一层或多层塑料膜，这样就形成了一个温室空间. 大棚的设计要保证通风性且利于采光.

	
建立模型	(1) 如图 1，已知某草莓园的种植大棚横截面可以看作抛物线 OPN，其中点 P 为抛物线的顶点，大棚高 $PE=4m$，宽 $ON=12m$。现以点 O 为坐标原点，ON 所在直线为 x 轴，过点 O 且垂直于 ON 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系。求此抛物线的解析式。  图1
解决问题	(2) 如图 2，为方便进出，在大棚横截面中间开了两扇正方形的门，其中 $AB=BE=EC=CD$。求门高 AB 的值。 (3) 若在某一时刻，太阳光线（假设太阳光线为平行线）透过 A 点恰好照射到 N 点，此时大棚横截面在地面上的阴影为线段 OQ，求此时 OQ 的长。  图2

五. 喷水问题

15. 中山公园的人工湖里安装一个喷泉，在湖心处竖直安装一根水管，在水管的顶端安装一个喷水头，喷出的水柱形状可看作是抛物线的一部分，若记水柱上某一点的位置与水管的水平距离为 x 米，与湖面的垂直高度为 y 米，表中记录了 x 与 y 的五组数据：

x (米)	0	1	2	3	4
y (米)	0.5	1.25	1.5	1.25	0.5



(1) 根据表中所给数据，在图 1 建立的平面直角坐标系中画出表示 y 与 x 函数关系的图象；

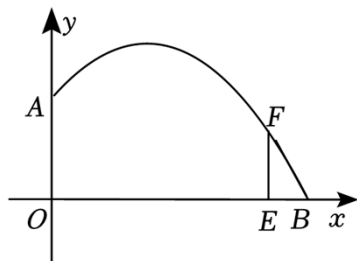
(2) 求 y 与 x 的函数表达式；

(3) 公园准备调节水管露出湖面的高度，使游船能从抛物线形水柱下方通过，如图 2 所示，为避免游船被喷泉淋到，要求游船以抛物线的对称轴为中轴线从水柱下方通过时，顶棚上任意一点到水柱的竖直距离均不小于 0.5 米，已知游船顶棚宽度 2 米，顶棚到湖面的高度为 1.8 米，请计算分析水管露出湖面的高度（喷水头忽略不计）至少调节到多少米才能符合要求？

16. 如图，要建一个圆形喷水池，在池中心 O 竖直放置一根水管，在水管的顶端 A 安装一个喷水头，建立如图所示的平面直角坐标系，喷出的水柱到地面的竖直高度 y (m) 与水柱到池中心 O 的水平距离 x (m) 满足关系式 $y = -0.2(x-3)^2 + 5$ 。

(1) 求水管 OA 的长度；

(2) 若在喷水池中抛物线对称轴右侧的 E 处竖直放置一盏高为 1.8m 的景观射灯 EF ，且景观射灯的顶端 F 恰好碰到水柱，求景观射灯 EF 与 OA 之间的水平距离 EO 。



六. 行车问题

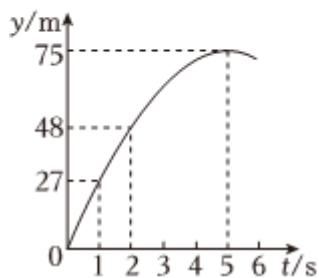
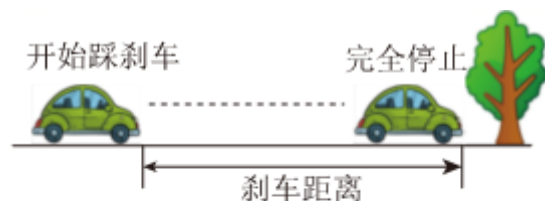
17. 某数学小组对数学学习中有关汽车的刹车距离有疑惑，于是他们走进汽车研发中心考察。

【知识背景】“道路千万条，安全第一条”刹车后还要继续向前行驶一段距离才能停止，这段距离成为刹车距离。

【探究发现】汽车研发中心设计一款新型汽车，现在模拟汽车在高速公路上以某一速度行驶时，对它的刹车性能进行测试，数学小组收集、整理数据，并绘制函数图象。

发现：开始刹车后行驶的距离 y （单位： m ）与刹车后行驶时间 t （单位： s ）之间成二次函数关系，函数图象如图所示。

【问题解决】请根据以上信息，完成下列问题：



- (1) 求二次函数的解析式（不要求写出自变量的取值范围）；
- (2) 若在汽车前 $60m$ 处，有一测速仪，当汽车刹车过程中，经过多少时间，汽车与测速仪相距 $12m$ ；
- (3) 若汽车司机发现正前方 $80m$ 处有一辆抛锚的车停在路面，立刻刹车，问该车在不变道的情况下是否会撞到抛锚的车？试说明理由。

18. 【综合与实践】某数学兴趣小组对数学学习中有关汽车的刹车距离有疑惑，于是他们走进汽车研发中心考察刹车距离. 【知识背景】“道路千万条，安全第一条.” 刹车系统是车辆行驶安全的重要保障，由于惯性的作用，行驶中的汽车在刹车后还要继续向前行驶一段距离才能停止，这段距离称为刹车距离.

【探究发现】汽车研发中心设计了一款新型汽车，现在模拟汽车在高速公路上以某一速度行驶时，对它的刹车性能进行测试. 兴趣小组成员记录其中一组数据如下：

刹车后行驶的时间	0	1	2	3
刹车后行驶的距离 y	0	27	48	63

发现：①开始刹车后行驶的距离 y （单位： m ）与刹车后行驶的时间 t （单位： s ）之间成二次函数关系；②汽车刹车后行驶的距离随刹车后行驶的时间 t 的增大而增大，当刹车后行驶的距离最远时，汽车完全停止.

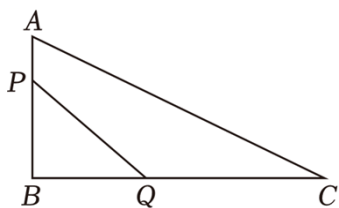
【问题解决】请根据以上信息，完成下列问题：

- 求 y 关于 t 的函数解析式（不要求写出自变量的取值范围）；
- 若汽车刹车 $4s$ 后，行驶了多远距离；
- 若汽车司机发现正前方 $70m$ 处有一辆抛锚的车停在路面，立刻刹车，请问该车在不变道的情况下是否会撞到抛锚的车？试说明理由.

七. 图形动态问题

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=12cm$ ， $BC=2AB$ ，动点 P 从点 A 开始沿边 AB 向点 B 以 $2cm/s$ 的速度移动，动点 Q 从点 B 开始沿边 BC 向点 C 以 $4cm/s$ 的速度移动. 如果 P ， Q 两点分别从 A ， B 两点同时出发，那么 $\triangle BPQ$ 的面积 S 随出发时间 t 而变化.

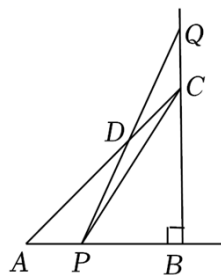
- 求出 S 关于 t 的函数解析式，写出 t 的取值范围；
- 当 t 取何值时， S 最大？最大值是多少？



20. 等腰三角形 ABC 的直角边 $AB=BC=10\text{cm}$, 点 P, Q 分别从 A, C 两点同时出发, 均以 1cm/s 的速度做匀速直线运动, 已知点 P 沿射线 AB 运动, 点 Q 沿射线 BC 运动, PQ 与直线 AC 相交于点 D , 连结 PC . 设点 P 的运动时间为 $t\text{ s}$, $\triangle PCQ$ 的面积为 $S\text{ cm}^2$.

(1) 求 S 关于 t 的函数表达式;

(2) 当点 P 运动几秒时, $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$?



答案

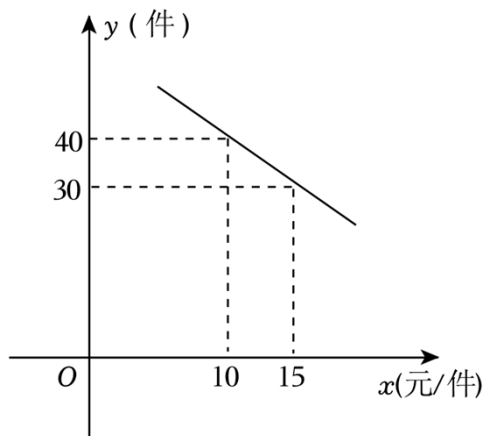
一. 销售问题

1. 一位助农主播利用“互联网+”销售一种农业加工品，这种加工品的成本价为 10 元/件，已知销售价不低于成本价，且物价部门规定这种加工品的销售利润率不高于 60%，市场调查发现，该加工品每天的销售量 y （件）与销售价 x （元/件）之间的函数关系如图所示。

(1) 求 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 求每天的销售利润 W （元）与销售价 x （元/件）之间的函数关系式，并求出每件销售价为多少元时，每天的销售利润最大？最大利润是多少？（销售利润=销售量×每件利润）

(3) 该助农主播销售这种农业加工品每天获得的利润能否是 128 元？若能，求出销售单价应为多少元；若不能，请说明理由。



【答案】解：(1) 设 y 与 x 的函数表达式为 $y=kx+b$,

$$\text{根据题意得} \begin{cases} 10k+b=40 \\ 15k+b=30 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-2 \\ b=60 \end{cases},$$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=-2x+60$,

$$\because 10 \times (1+60\%) = 16 \text{ (元/件)},$$

$$\therefore 10 \leq x \leq 16;$$

$$(2) \text{ 根据题意知 } W = (x-10)(-2x+60) = -2x^2+80x-600 = -2(x-20)^2+200,$$

$$\because a = -2 < 0,$$

当 $x < 20$ 时, W 随 x 的增大而增大,

$$\therefore 10 \leq x \leq 16,$$

$\therefore$ 当 $x=16$ 时, W 取得最大值,

$$\text{最大值为 } -2 \times (16 - 20)^2 + 200 = 168;$$

$\therefore$ 每件销售价为 16 元/件时, 每天的销售利润最大, 最大利润是 168 元;

(3) 该助农主播销售这种农业加工品每天获得的利润能是 128 元.

$$\text{根据题意知, } -2(x - 20)^2 + 200 = 128,$$

解得 $x=14$ 或 $x=26$ (舍去),

答: 该助农主播销售这种农业加工品每天获得的利润能是 128 元, 销售单价为 14 元/件.

2. 商场将进货价为 30 元/个的台灯以 40 元/个的价格销售, 每月能售出 600 个, 调查表明: 这种台灯的销售单价每上涨 1 元, 其月销售量就会减少 10 个. 规定该台灯的销售单价不得低于 40 元且不得超过 60 元.

(1) 为了实现这种台灯的月销售利润为 10000 元, 则销售单价应定为多少元?

(2) 当台灯的销售单价为多少时, 获得的利润最大? 最大为多少?

【答案】解: (1) 设这种台灯售价为 x 元,

$$\text{根据题意得: } (x - 30)[600 - 10(x - 40)] = 10000,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 130x + 4000 = 0,$$

$$\text{解得: } x = 50 \text{ 或 } x = 80,$$

$$\therefore 40 \leq x \leq 60,$$

$$\therefore x = 50,$$

答: 这种台灯的售价应定为 50 元;

(2) 设台灯的售价为 x 元, 利润为 y 元,

$$\text{依题意得: } y = (x - 30)[600 - 10(x - 40)] = -10x^2 + 1300x - 30000 = -10(x - 65)^2 + 12250,$$

$$\therefore -10 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x < 65$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore 40 \leq x \leq 60,$$

$\therefore$ 当 $x = 60$ 时, $y_{\text{最大}} = 12000$ 元,

答：当台灯的销售单价为 60 元时，获得的利润最大，最大为 12000 元.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/078042003015006134>