矩阵基础

泰山在线科技有限公司

主要内容

- 矩阵基础
  - 矩阵的秩与初等变换
  - 矩阵的转置和逆
  - 正交矩阵
  - 齐次空间
- 几何应用
  - 仿射变换
  - 欧拉角
  - 四元数

矩阵

设F是数域，用F的元素 a_{ij} 排成的m行n列的数表

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为F上 $m\times n$ 矩阵，简写

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \text{或} A=(a_{ij})$$

矩阵的秩

定义 矩阵A用初等行变换化成的阶梯形矩阵中主元的个数称为**矩阵A的秩**，记为 秩(A) 或 $r(A)$ 。

性质

(1) 秩$(A) = 0$当且仅当 $A = 0$

(2) 秩($A_{m \times n}$)≤min{ m , n }

(3) 初等行变换不改变矩阵的秩。

初等矩阵

定义 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**。

矩阵的转置

设 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把矩阵 A 的行与列互换之后，得到的矩阵称为矩阵 A 的**转置矩阵,** 记为 A' 或 A^T.

转置有下面的性质:

$$(A')'=A$$

$$(A+B)'=A'+B'$$

$$(AB)=B'A'$$

矩阵的逆

定义 A为F上n 阶方阵，若存在n阶方阵B，使

$$AB = BA = I$$

称A为可逆矩阵（非奇异矩阵），B称为A的逆矩阵.

性质

① A可逆，则A的逆矩阵唯一。

② A可逆，则 A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$

③ A，B可逆，则AB也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

④ A可逆，则 A'可逆，且$(A')^{-1} = (A^{-1})'$

正交矩阵

定义:设V是一个向量空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是V的一组基，若满足：

1）$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$两两相互正交

2）$\|\alpha_j\| = 1, j = 1, 2, \ldots, m$

则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是向量空间V的一组标准正交基.

正交矩阵

定义：设A是一个n阶方阵，若$A^TA=E_n$则称A为一个n阶正交矩阵。

1. A是一个正交矩阵的充分必要条件是它的转置矩阵是一个正交矩阵。

2. A是一个正交矩阵的充分必要条件是它的n个列向量构成了R^n的一个标准正交基.

3. 若A是一个正交矩阵，则$|A|^2=1$

正交矩阵

定义: 设V是R^n的一个非平凡的子空间,$\alpha\in R^n$，若在V中存在某向量β，使得$\alpha-\beta$与V中任何一个向量皆正交，则称β为向量α在向量空间V中的正交投影向量。

齐次空间

仿射变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P'=TP$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P'=SP$$