

因式分解的常用方法

第一部分：方法介绍

因式分解：因式分解是指将一个多项式化成几个整式的积的形式，主要有提公因式法，公式法，十字相乘法，分组分解法，换元法等

因式分解的一般步骤是：

(1) 通常采用一“提”、二“公”、三“分”、四“变”的步骤。

即首先看有无公因式可提，其次看能否直接利用乘法公式；如前两个步骤都不能实施，可用分组分解法，分组的目的是使得分组后有公因式可提或可利用公式法继续分解；

(2) 若上述方法都行不通，可以尝试用配方法、换元法、待定系数法、试除法、拆项（添项）等方法；。

注意：将一个多项式进行因式分解应分解到不能再分解为止。

一、提公因式法.： $ma+mb+mc=m(a+b+c)$

二、运用公式法.

在整式的乘、除中，我们学过若干个乘法公式，现将其反向使用，即为因式分解中常用的公式，例如：

$$(1) (a+b)(a-b) = a^2-b^2 \text{ ----- } a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$(2) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \text{ ----- } a^2 \pm 2ab + b^2=(a \pm b)^2;$$

$$(3) (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \text{ ----- } a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$(4) (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \text{ ----- } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

下面再补充两个常用的公式：

$$(5) a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2;$$

$$(6) a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca);$$

例.已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边，且 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ，

则 $\triangle ABC$ 的形状是（ ）

A.直角三角形 **B** 等腰三角形 **C** 等边三角形 **D** 等腰直角三角形

解： $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$

三、分组分解法.

(一) 分组后能直接提公因式

例 1、分解因式： $am + an + bm + bn$

分析：从“整体”看，这个多项式的各项既没有公因式可提，也不能运用公式分解，但从“局部”看，这个多项式前两项都含有 a ，后两项都含有 b ，因此可以考虑将前两项分为一组，后两项分为一组先分解，然后再考

虑两组之间的联系。

$$\text{解: 原式} = (am + an) + (bm + bn)$$

$$= a(m + n) + b(m + n)$$

每组之间还有公因式!

$$= (m + n)(a + b)$$

例 2、分解因式: $2ax - 10ay + 5by - bx$

解法一: 第一、二项为一组;
第三、四项为一组。

$$\text{解: 原式} = (2ax - 10ay) + (5by - bx)$$

$$= 2a(x - 5y) - b(x - 5y)$$

$$= (x - 5y)(2a - b)$$

解法二: 第一、四项为一组;

第二、三项为一组。

$$\text{原式} = (2ax - bx) + (-10ay + 5by)$$

$$= x(2a - b) - 5y(2a - b)$$

$$= (2a - b)(x - 5y)$$

练习: 分解因式 1、 $a^2 - ab + ac - bc$

2、 $xy - x - y + 1$

(二) 分组后能直接运用公式

例 3、分解因式: $x^2 - y^2 + ax + ay$

分析: 若将第一、三项分为一组, 第二、四项分为一组, 虽然可以提公因式, 但提完后就能继续分解, 所以只能另外分组。

$$\text{解: 原式} = (x^2 - y^2) + (ax + ay)$$

$$= (x + y)(x - y) + a(x + y)$$

$$= (x + y)(x - y + a)$$

例 4、分解因式: $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

$$\text{解: 原式} = (a^2 - 2ab + b^2) - c^2$$

$$= (a - b)^2 - c^2$$

$$= (a - b - c)(a - b + c)$$

练习: 分解因式 3、 $x^2 - x - 9y^2 - 3y$ 4、 $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$

综合练习: (1) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$ (2) $ax^2 - bx^2 + bx - ax + a - b$

$$(3) x^2 + 6xy + 9y^2 - 16a^2 + 8a - 1 \quad (4) a^2 - 6ab + 12b + 9b^2 - 4a$$

$$(5) a^4 - 2a^3 + a^2 - 9$$

$$(6) 4a^2x - 4a^2y - b^2x + b^2y$$

$$(7) x^2 - 2xy - xz + yz + y^2$$

$$(8) a^2 - 2a + b^2 - 2b + 2ab + 1$$

$$(9) y(y - 2) - (m - 1)(m + 1)$$

$$(10) (a + c)(a - c) + b(b - 2a)$$

$$(11) a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) + 2abc \quad (12) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

四、十字相乘法。

(一) 二次项系数为 1 的二次三项式

直接利用公式—— $x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$ 进行分解。

特点: (1) 二次项系数是 1;

(2) 常数项是两个数的乘积;

(3) 一次项系数是常数项的两因数的和。

思考: 十字相乘有什么基本规律?

例. 已知 $0 < a \leq 5$, 且 a 为整数, 若 $2x^2 + 3x + a$ 能用十字相乘法分解因式, 求符合条件的 a .

解析: 凡是能十字相乘的二次三项式 $ax^2 + bx + c$, 都要求 $\Delta = b^2 - 4ac$ 而且是一个完全平方数。

于是 $\Delta = 9 - 8a$ 为完全平方数, $a = 1$

例 5、分解因式: $x^2 + 5x + 6$

分析: 将 6 分成两个数相乘, 且这两个数的和要等于 5。

由于 $6 = 2 \times 3 = (-2) \times (-3) = 1 \times 6 = (-1) \times (-6)$, 从中可以发现只有 2×3 的分解适合, 即 $2 + 3 = 5$ 。

$$\begin{array}{rcl} \text{解: } x^2 + 5x + 6 & = & x^2 + (2 + 3)x + 2 \times 3 \\ & = & (x + 2)(x + 3) \end{array} \quad \begin{array}{r} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ \hline 1 \times 2 + 1 \times 3 = 5 \end{array} \end{array}$$

用此方法进行分解的关键: 将常数项分解成两个因数的积, 且这两个因数的代数和要等于一次项的系数。

例 6、分解因式: $x^2 - 7x + 6$

$$\begin{array}{rcl} \text{解: 原式} & = & x^2 + [(-1) + (-6)]x + (-1)(-6) \\ & = & (x - 1)(x - 6) \end{array} \quad \begin{array}{r} \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -6 \\ \hline (-1) + (-6) = -7 \end{array} \end{array}$$

练习 5、分解因式 (1) $x^2 + 14x + 24$ (2) $a^2 - 15a + 36$ (3) $x^2 + 4x - 5$

练习 6、分解因式 (1) $x^2 + x - 2$ (2) $y^2 - 2y - 15$ (3) $x^2 - 10x - 24$

(二) 二次项系数不为 1 的二次三项式—— $ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{l} \text{条件: (1) } a = a_1 a_2 \quad \begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ \hline b = a_1 c_2 + a_2 c_1 \end{array} \\ (2) \quad c = c_1 c_2 \\ (3) \quad b = a_1 c_2 + a_2 c_1 \end{array}$$

分解结果: $ax^2 + bx + c = (a_1 x + c_1)(a_2 x + c_2)$

例 7、分解因式: $3x^2 - 11x + 10$

$$\begin{array}{rcl} \text{分析:} & & \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 3 & -5 \\ \hline (-6) + (-5) = -11 \end{array} \end{array}$$

$$\text{解: } 3x^2 - 11x + 10 = (x - 2)(3x - 5)$$

练习 7、分解因式: (1) $5x^2 + 7x - 6$

(2) $3x^2 - 7x + 2$

(3) $10x^2 - 17x + 3$

(4) $-6y^2 + 11y + 10$

(三) 二次项系数为 1 的齐次多项式

例 8、分解因式: $a^2 - 8ab - 128b^2$

分析: 将 b 看成常数, 把原多项式看成关于 a 的二次三项式, 利用十字相乘法进行分解。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/078057062057006064>