

- A.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$       B.  $\frac{3\sqrt{5}}{4}$       C.  $\frac{3\sqrt{13}}{4}$       D.  $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】由余弦定理得  $\cos A$ ，平方关系求出  $\sin A$ ，再利用面积公式可得答案.

【详解】由余弦定理得  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4+9-16}{4 \times 3} = -\frac{1}{4}$ ,

因为  $0 < A < \pi$ ，所以  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ,

可得  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ .

故选：D.

3. 记  $S_n$  为非零数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $S_{n+1} = 2S_n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ，则  $\frac{a_4}{a_1} = ( \quad )$

A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

【答案】B

【解析】

【分析】运用递推公式求出前 4 项，即可解题.

【详解】 $S_{n+1} = 2S_n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ，则  $S_{n+1} - S_n = S_n$ . 即  $a_{n+1} = S_n$ .

$$a_2 = a_1, a_3 = a_1 + a_2 = 2a_1, \quad a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_1 + 2a_1 = 4a_1.$$

故  $\frac{a_4}{a_1} = \frac{4a_1}{a_1} = 4$ .

故选：B.

4. 设点  $P$  在正四面体  $ABCD$  的棱  $AB$  上， $AB$  与平面  $PCD$  所成角为  $\frac{\pi}{3}$ ，则  $\frac{AP}{BP} + \frac{BP}{AP} = ( \quad )$

A. 4

B. 10

C. 14

D. 20

【答案】B

【解析】

【分析】取的中点  $CD$  的中点  $E$ ，连接  $AE, BE, PE$ ，过  $A$  作  $AO \perp PE$  于  $O$ ，可证得  $AO \perp$  平面  $PCD$ ，则  $\angle APO$ （或其补角）为  $AB$  与平面  $PCD$  所成角，设正四面体的棱长为 2，在  $\text{Rt}\triangle EAO$  中求出  $AO$ ，则在  $\text{Rt}\triangle PAO$  中求出  $AP$ ，从而可求得  $BP$ ，代入  $\frac{AP}{BP} + \frac{BP}{AP}$  计算可得答案.

【详解】取的中点  $CD$  的中点  $E$ ，连接  $AE, BE, PE$ ，过  $A$  作  $AO \perp PE$  于  $O$ ，

因为四面体  $ABCD$  为正四面体, 所以  $BE \perp CD, AE \perp CD$ ,

因为  $AE \cap BE = E$ ,  $AE, BE \subset$  平面  $ABE$ ,

所以  $CD \perp$  平面  $ABE$ ,

因为  $AO \subset$  平面  $ABE$ , 所以  $CD \perp AO$ ,

因为  $PE \cap CD = E$ ,  $PE, CD \subset$  平面  $PCD$ ,

所以  $AO \perp$  平面  $PCD$ , 所以  $\angle APO$  (或其补角) 为  $AB$  与平面  $PCD$  所成角,

所以  $\angle APO = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\angle PAO = \frac{\pi}{6}$ ,

设正四面体的棱长为 2, 则  $AE = BE = \sqrt{3}$ ,

$$\text{所以 } \cos \angle BAE = \frac{AB^2 + AE^2 - BE^2}{2AB \cdot AE} = \frac{4 + 3 - 3}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

所以  $\angle BAE$  为锐角, 所以  $\sin \angle BAE = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,

$$\text{所以 } \cos \angle EAO = \cos \left( \angle BAE - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \angle BAE \cos \frac{\pi}{6} + \sin \angle BAE \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6},$$

在  $\text{Rt} \triangle EAO$  中,  $\cos \angle EAO = \frac{AO}{AE}$ , 则

$$AO = AE \cdot \cos \angle BAE = \sqrt{3} \times \frac{3 + \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2},$$

在  $\text{Rt} \triangle PAO$  中,  $\sin \angle APO = \frac{AO}{AP}$ , 则  $AP \cdot \sin \angle APO = AO$

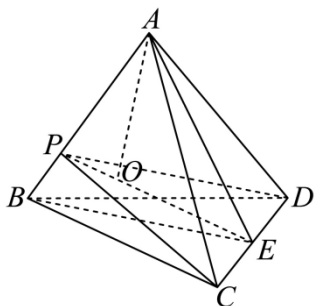
$$\text{所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} AP = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } AP = \frac{3 + \sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } BP = AB - AP = 2 - \frac{3 + \sqrt{6}}{3} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{AP}{BP} + \frac{BP}{AP} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3 - \sqrt{6}} + \frac{3 - \sqrt{6}}{3 + \sqrt{6}} = \frac{(3 + \sqrt{6})^2}{3} + \frac{(3 - \sqrt{6})^2}{3}$$

$$= \frac{9+6\sqrt{6}+6}{3} + \frac{9-6\sqrt{6}+6}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

故选：B



5. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  均为单位向量, 则  $\frac{|\vec{a}-2\vec{b}|}{\sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$  的最小值是 ( )

A. 1

B.  $\sqrt{2}$

C. 2

D.  $\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】设向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\theta$ , 化简  $\frac{|\vec{a}-2\vec{b}|}{\sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}} = \sqrt{\frac{5-4\cos\theta}{1-\cos^2\theta}}$ , 令  $f(x) = \frac{5-4x}{1-x^2}$ , 通过导数判断函数

$f(x)$  的单调性, 即可求最小值.

【详解】由向量  $\vec{a}, \vec{b}$  均为单位向量,

设向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\theta$ ,

由  $1-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \neq 0$ , 则  $\theta \in (0, \pi)$ ,

$$\text{所以 } \frac{|\vec{a}-2\vec{b}|}{\sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}} = \sqrt{\frac{|\vec{a}-2\vec{b}|^2}{1-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}} = \sqrt{\frac{5-4\vec{a}\cdot\vec{b}}{1-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}} = \sqrt{\frac{5-4\cos\theta}{1-\cos^2\theta}}$$

设  $x = \cos\theta, x \in (-1, 1)$ ,

$$\text{令 } f(x) = \frac{5-4x}{1-x^2},$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{-4x^2+10x-4}{(1-x^2)^2} = \frac{-2(x-2)(2x-1)}{(1-x^2)^2},$$

令  $f'(x) > 0$ , 则  $\frac{1}{2} < x < 1$ , 所以  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  单调递增,

令  $f'(x) < 0$ , 则  $-1 < x < \frac{1}{2}$ , 所以  $f(x)$  在  $(-1, \frac{1}{2})$  单调递减,

所以  $f(x)$  的最小值为  $f(\frac{1}{2}) = \frac{5 - 4 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$ ,

所以  $\frac{|a-2b|}{\sqrt{1-(a \cdot b)^2}}$  的最小值为 2.

故选: C.

6. 小明开始了自己的存钱计划: 起初存钱罐中没有钱, 小明在第  $k$  天早上八点以  $\frac{1}{k+1}$  的概率向存钱罐中存入 100 元,  $k=1,2,3,\dots$ . 若小明在第 4 天早上七点发现自己前 3 天晚上八点时存钱罐中的余额恰好成等差数列, 则小明在第 2 天存入了 100 元概率是 ( )

- A.  $\frac{1}{7}$                       B.  $\frac{1}{5}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据贝叶斯公式求得正确答案.

【详解】余额恰好成等差数列, 即  $(100, 200, 300), (0, 100, 200), (100, 100, 100), (0, 0, 0)$ ,

其中第 2 天存入 100 元的是  $(100, 200, 300), (0, 100, 200)$ ,

故所求概率为  $\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$ .

故选: A

7. 设椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的弦  $AB$  与  $x$  轴,  $y$  轴分别交于  $C, D$  两点,

$|AC|:|CD|:|DB|=1:2:2$ , 若直线  $AB$  的斜率  $k$ , 则  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$                       B.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$                       C.  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$                       D.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

【答案】C

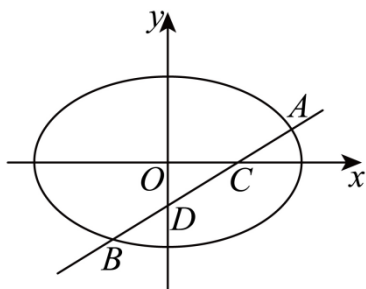
【解析】

【分析】设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_0, 0), D(0, y_0)$ , 由  $|AC|:|CD|:|DB|=1:2:2$  得

$A(\frac{3x_0}{2}, -\frac{y_0}{2}), B(-x_0, 2y_0)$ , 根据  $A, B$  在椭圆上, 代入相减得  $\frac{y_0^2}{x_0^2} = \frac{b^2}{3a^2}$ , 则直线  $AB$  的斜率为

$k_{AB} = -\frac{y_0}{x_0}$ , 然后由  $a > b > 0$  即可求解.

【详解】如图所示, 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_0, 0), D(0, y_0)$ ,



直线  $AB: y = kx + b$ ,

因为  $|AC|:|CD|:|DB| = 1:2:2$ , 所以  $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ ,

所以  $2(x_0 - x_1, -y_1) = (-x_0, y_0), (-x_0, y_0) = (x_2, y_2 - y_0)$ ,

$$\text{即} \begin{cases} x_1 = \frac{3x_0}{2} \\ y_1 = -\frac{y_0}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -x_0 \\ y_2 = 2y_0 \end{cases}, \text{所以 } A(\frac{3x_0}{2}, -\frac{y_0}{2}), B(-x_0, 2y_0).$$

因为  $A, B$  在椭圆上, 所以  $\frac{9x_0^2}{4a^2} + \frac{y_0^2}{4b^2} = 1, \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{4y_0^2}{b^2} = 1$ ,

两式相减得  $\frac{5x_0^2}{4a^2} = \frac{15y_0^2}{4b^2}$ , 即  $\frac{y_0^2}{x_0^2} = \frac{b^2}{3a^2}$ .

又因为  $k_{AB} = \frac{2y_0 - (-\frac{y_0}{2})}{-x_0 - \frac{3x_0}{2}} = -\frac{y_0}{x_0}$ , 且  $k_{AB} > 0, a > b > 0$ ,

所以  $0 < \frac{b^2}{a^2} < 1$ , 即  $0 < \frac{b^2}{3a^2} < \frac{1}{3}$ ,

所以  $0 < k_{AB} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

故选: C.

8. 称平面直角坐标系中横坐标与纵坐标均为正整数的点为好整点, 记  $\mathcal{H}[S]$  为集合  $S$

包含的好整点的个数. 若  $\mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid (x+y)^2 + 3x + y < k\right\}\right] = \mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid x+y \leq 43\right\}\right]$ , 则正整数  $k$  的最小值是 ( )

A. 1976

B. 1977

C. 2023

D. 2024

【答案】B

【解析】

【分析】一方面由必要性：转换成恒成立求参问题，可以求得  $k \geq 1977$ ，另一方面比较重要的一点是：要验证当  $k = 1977$  时， $\mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid (x+y)^2 + 3x + y < k\right\}\right] = \mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid x+y \leq 43\right\}\right]$ ，由此即可得解.

【详解】一方面：由题意  $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$ ， $x+y \leq 43$ ，使得不等式  $(x+y)^2 + 3x + y < k$  恒成立，

$$\begin{aligned} \text{注意到 } (x+y)^2 + 3x + y &= (x+y)^2 + 3(x+y) - 2y \leq (x+y)^2 + 3(x+y) - 2 \\ &\leq 43^2 + 3 \times 43 - 2 = 1976, \end{aligned}$$

$$\text{等号成立当且仅当 } \begin{cases} x+y=43 \\ y=1 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x=42 \\ y=1 \end{cases},$$

所以正整数  $k$  应该满足  $k \geq 1977$ ,

另一方面：当  $k = 1977$  时，

$$\text{我们证明： } \mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid (x+y)^2 + 3x + y < k\right\}\right] = \mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid x+y \leq 43\right\}\right] \text{ 成立，}$$

证明过程如下：

$$\text{注意到 } \{(x, y) \mid x+y \leq 43\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), \dots, (1, 42), (2, 41), \dots, (42, 1)\},$$

$$\text{所以 } \mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid x+y \leq 43\right\}\right] = 1 + 2 + \dots + 42 = \frac{42 \times (1+42)}{2} = 903,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, \text{ 记 } x+y = M, \text{ 则 } M \in \{2, 3, \dots, 43\}, y \in \{1, 2, \dots, M-1\},$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid (x+y)^2 + 3x + y < k\right\}\right] \\ &= \mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid (x+y)^2 + 3(x+y) - 2y < 1977\right\}\right] \\ &= \sum_{M=2}^{43} (M-1) = 1 + 2 + \dots + 42 = \frac{42 \times (1+42)}{2} = 903, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid (x+y)^2 + 3x + y < k\right\}\right] = \mathcal{R}\left[\left\{(x, y) \mid x+y \leq 43\right\}\right] = 903 \text{ 成立，}$$

综合以上两方面，可知正整数  $k$  的最小值是 1977.

故选：B.

【点睛】

关键点点睛：解题的关键在于用必要性求得参数范围后，一定要检验充分性是否成立，由此即可顺利得解.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 设双曲线  $\Gamma: x^2 + xy = 1$  与直线  $y = 2x + m$  交于  $A(x_1, y_1)$  与  $B(x_2, y_2)$  两点，则可能有 ( )

A.  $x_1 + x_2 > 0$

B.  $x_1 x_2 > 0$

C.  $y_1 + y_2 > 0$

D.  $y_1 y_2 > 0$

【答案】ACD

【解析】

【分析】联立方程组，应用根与系数的关系换元化简即可得出选项.

【详解】联立方程组  $\begin{cases} y = 2x + m \\ x^2 + xy = 1 \end{cases}$ ，可得  $x^2 + x(2x + m) = 1, 3x^2 + mx - 1 = 0$ ，

因为双曲线与直线有两个交点，所以  $\Delta = m^2 - 4 \times 3 \times (-1) = m^2 + 12 > 0$ ，

所以  $x_1 + x_2 = -\frac{m}{3}, x_1 x_2 = -\frac{1}{3} < 0$ ，B 错误；

当  $m < 0$  时， $x_1 + x_2 = -\frac{m}{3} > 0$ ，A 正确；

$$y_1 + y_2 = 2x_1 + m + 2x_2 + m = -\frac{2m}{3} + 2m = \frac{4m}{3},$$

当  $m > 0$  时， $y_1 + y_2 > 0$ ，C 正确；

$$y_1 y_2 = (2x_1 + m)(2x_2 + m) = 4x_1 x_2 + m(2x_1 + 2x_2) + m^2 = -\frac{4}{3} - \frac{2m^2}{3} + m^2 = \frac{m^2 - 4}{3},$$

当  $m > 2$  或  $m < -2$  时， $y_1 y_2 > 0$ ，D 正确.

故选：ACD.

10. 若无穷数列  $\{a_n\}$  由  $\Psi$  唯一确定，称递推公式  $\Psi$  是专一的．则下列递推公式中专一的有 ( )

A.  $\begin{cases} a_n = 2n - 1 \\ a_{n+1} = 2n + 1 \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$

B.  $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ (a_{n+2} - a_{n+1})^2 = a_n \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$

C.  $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_{n+1} a_n = a_n + a_{n+1} \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$

D.  $\begin{cases} a_n + a_{n+1} = 2n \\ a_n a_{n+2} = 3n \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$

【答案】AC

【解析】

【分析】对于 A：分析可知  $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$ ，即可得结果；对于 C：分析可知  $a_n = 2$ ，即可得结果；对于 BD：取特值计算即可。

【详解】对于选项 A：因为  $\begin{cases} a_n = 2n - 1 \\ a_{n+1} = 2n + 1 \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$ ，可得  $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$ ，

所以递推公式是专一的，故 A 正确；

对于选项 B：因为  $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ (a_{n+2} - a_{n+1})^2 = a_n \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$ ，

令  $n = 1$ ，可得  $(a_3 - a_2)^2 = a_1$ ，即  $(a_3 - 1)^2 = 1$ ，解得  $a_3 = 2$  或  $a_3 = 0$ ，

所以推公式不是专一的，故 B 错误；

对于选项 C：因为  $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_{n+1}a_n = a_n + a_{n+1} \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$ ，可得  $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} = 1$ ，

令  $n = 1$ ，可得  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} = 1$ ，可得  $a_1 = 2$ ，

且  $\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} = 1$ ，可得  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+2}}$ ，即  $a_n = a_{n+2}$ ，

可知数列  $\{a_n\}$  是以 2 为周期的周期函数，且  $a_1 = a_2 = 2$ ，

则  $a_n = 2$ ，所以递推公式是专一的，故 C 正确；

对于选项 D：因为  $\begin{cases} a_n + a_{n+1} = 2n \\ a_na_{n+2} = 3n \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$ ，

由  $a_n + a_{n+1} = 2n$  可得：  $a_1 + a_2 = 2, a_2 + a_3 = 4$ ，则  $a_3 - a_1 = 2$ ，

由  $a_na_{n+2} = 3n$  可得  $a_1a_3 = 3$ ，解得  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = 3 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_3 = -1 \end{cases}$ ，

所以推公式不是专一的，故 D 错误；

故选：AC.

11. 设一组样本数据  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  满足  $x_i < x_{i+1} (i = 1, 2, 3, 4)$ ，则 ( )

A. 拿走  $x_3$ ，这组数据的方差变大

B. 拿走  $x_2, x_4$ ，这组数据的方差变大

C. 拿走  $x_2, x_3, x_4$ ，这组数据的方差减小

D. 拿走  $x_1, x_2, x_4, x_5$ ，这组数据的方差减小

【答案】AD

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/078075031015006132>