

福建省南平市浦城县 2022-2023 学年高一下学期期末

数学冲刺卷试题（一）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.）

1. $(5-i)-(3-i)-5i$ 等于（ ）.

- A. $5i$ B. $2-5i$ C. $2+5i$ D. 2

【答案】B

【解析】 $(5-i)-(3-i)-5i=5-i-3+i-5i=2-5i$.

故选：B.

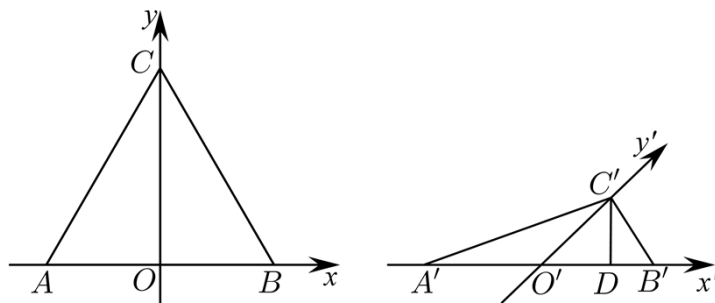
2. $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形,那么 $\triangle ABC$ 的斜二测平面直观图 $\triangle A'B'C'$ 的面积()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{16}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】A

【解析】以 AB 所在直线为 x 轴,线段 AB 的垂直平分线为 y 轴,建立直角坐标系,

画对应的 x' 轴, y' 轴,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$, 如下图所示,



结合图形, $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

作 $C'D \perp A'B'$, 垂足为 D ,

则 $C'D = \frac{\sqrt{2}}{2} \times O'C' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \times OC = \frac{\sqrt{2}}{4} OC$, $AB = A'B'$,

所以 $\triangle A'B'C'$ 的面积 $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} \times A'B' \times C'D = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times OC \times AB = \frac{\sqrt{2}}{4} \times S_{\triangle ABC}$,

即原图和直观图面积之间的关系为 $\frac{S_{\text{直观图}}}{S_{\text{原图}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

高级中学名校试卷

所以, $\triangle A'B'C'$ 的面积为 $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{16}$.

故选: A.

3. 已知 α 是锐角, $\vec{a} = (-1, 1)$, $\vec{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 α 为 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 30° 或 60°

【答案】B

【解析】 $\because \vec{a} = (-1, 1)$, $\vec{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos \alpha + \sin \alpha = 0$, 求得 $\cos \alpha = \sin \alpha$, $\tan \alpha = 1$,

由 α 是锐角, 所以 $\alpha = 45^\circ$.

故选: B.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别是 a 、 b 、 c , 若 $c = 1$, $B = 45^\circ$, $\cos A = \frac{3}{5}$, 则 b 等于 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{10}{7}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{5\sqrt{2}}{14}$

【答案】C

【解析】 $\because \cos A = \frac{3}{5}$, $A \in (0^\circ, 180^\circ)$, $\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5}$,

$\cos C = -\cos(A + B) = -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = -(\frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$,

$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$,

由正弦定理可得: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{5}{7}$.

故选: C.

5. 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取两个数, 下列事件中是互斥事件但不是对立事件的是 ()

- A. 至少有一个是奇数和两个都是奇数 B. 至少有一个是奇数和两个都是偶数
C. 至少有一个奇数和至少一个偶数 D. 恰有一个偶数和没有偶数

【答案】D

【解析】从 1, 2, 3, 4, 5 中任取两个数,

高级中学名校试卷

对于 A, 至少有一个是奇数和两个都是奇数, 两个事件有重复, 所以不是互斥事件,

所以 A 错误;

对于 B, 至少有一个是奇数和两个都是偶数, 两个事件互斥, 且为对立事件, 所以 B 错误;

对于 C, 至少有一个奇数和至少一个偶数, 两个事件有重复, 所以不是互斥事件,

所以 C 错误;

对于 D, 恰有一个偶数和没有偶数, 为互斥事件. 且还有一种可能为两个都是偶数,

所以两个事件互斥且不对立, 所以 D 正确.

故选: D.

6. 已知正四棱柱(即底面是正方形的直棱柱)的底面边长为 3cm , 侧面的对角线长是 $3\sqrt{5}\text{cm}$, 则这个正四棱柱的表面积为 ()

- A. 90cm^2 B. $36\sqrt{5}\text{cm}^2$ C. 72cm^2 D. 54cm^2

【答案】A

【解析】由题意侧棱长为 $\sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6$, 所以表面积为:

$$S = 4 \times 3 \times 6 + 2 \times 3^2 = 90(\text{cm}^2).$$

故选: A.

7. 利用斜二测画法画直观图时, 下列说法中正确的是 ()

①两条相交直线的直观图是平行直线; ②两条垂直直线的直观图仍然是垂直直线; ③正方形的直观图是平行四边形; ④梯形的直观图是梯形.

- A. ①② B. ③④ C. ①③ D. ②④

【答案】B

【解析】根据斜二测画法的规则, 可得两条相交直线的直观图仍然是相交直线, 所以①错; 两条垂直直线的直观图是两条相交但不垂直的直线, 所以②错;

根据直观图的画法中, 平行性保持不变, 可得③, ④正确.

故选: B.

8. 已知样本数据由小到大依次为 $2, 3, 3, 7, a, b, 12, 13, 7, 18, 3, 20$, 且样本的中位数为 10.5 , 若使该样本的方差最小, 则 a, b 的值分别为 ().

- A. $10, 11$ B. $10.5, 9.5$ C. $10.4, 10.6$ D. $10.5, 10.5$

【答案】D

高级中学名校试卷

【解 析】由于样本共有 10 个值，且中间两个数为 a ， b ，

依题意，得 $\frac{a+b}{2}=10.5$ ，即 $b=21-a$ ，

因为平均数为 $(2+3+3+7+a+b+12+13.7+18.3+20)\div 10=10$ ，

所以要使该样本的方差最小，只需 $(a-10)^2+(b-10)^2$ 最小，

又 $(a-10)^2+(b-10)^2=(a-10)^2+(21-a-10)^2=2a^2-42a+221$ ，

所以当 $a=-\frac{-42}{2\times 2}=10.5$ 时， $(a-10)^2+(b-10)^2$ 最小，此时 $b=10.5$ 。

故选：D.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 小明与小华两人玩游戏，则下列游戏公平的有（ ）

- A. 抛掷一枚骰子，向上的点数为奇数，小明获胜，向上的点数为偶数，小华获胜
- B. 同时抛掷两枚硬币，恰有一枚正面向上，小明获胜，两枚都正面向上，小华获胜
- C. 从一副不含大小王的扑克牌中抽一张，扑克牌是红色，小明获胜，扑克牌是黑色，小华获胜
- D. 小明、小华两人各写一个数字 6 或 8，如果两人写的数字相同，小明获胜，否则小华获胜

【答 案】ACD

【解 析】对于 A，抛掷一枚骰子，向上的点数为奇数和向上的点数为偶数是等可能的，所以游戏公平；

对于 B，恰有一枚正面向上包括（正，反）、（反，正）两种情况，

而两枚都正面向上仅有（正，正）一种情况，所以游戏不公平；

对于 C，从一副不含大小王的扑克牌中抽一张，扑克牌是红色和扑克牌是黑色是等可能的，所以游戏公平；

对于 D，小明、小华两人各写一个数字 6 或 8，一共四种情况：（6，6），（6，8），（8，6），

（8，8）；两人写的数字相同和两人写的数字不同是等可能的，所以游戏公平。

故选：ACD.

10. 对于三角形 ABC ，有如下判断，其中正确的判断是（ ）

- A. 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$ ，则三角形 ABC 是钝角三角形

高级中学名校试卷

B. 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$

C. 若 $a=8$, $c=10$, $B=60^\circ$, 则符合条件的三角形 ABC 有两个

D. 若三角形 ABC 为斜三角形, 则 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

【答案】ABD

【解析】对于 A, 因为 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 所以由正弦定理得 $a^2 + b^2 < c^2$,

所以 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$, 所以 C 为钝角, 所以三角形 ABC 是钝角三角形,

所以 A 正确;

对于 B, 因为 $A > B$, 所以 $a > b$, 所以由正弦定理得 $\sin A > \sin B$, 所以 B 正确;

对于 C, 由余弦定理得, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 64 + 100 - 2 \times 8 \times 10 \times \frac{1}{2} = 84$,

所以 $b = 2\sqrt{21}$, 所以符合条件的三角形 ABC 有一个, 所以 C 错误;

对于 D, 因为 $\tan(B+C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$,

所以 $\tan B + \tan C = \tan(B+C)(1 - \tan B \tan C)$,

因为 $\tan(B+C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$,

所以 $\tan B + \tan C = \tan(B+C)(1 - \tan B \tan C) = \tan A \tan B \tan C - \tan A$,

所以 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$, 所以 D 正确.

故选: ABD.

11. 设 i 为虚数单位, 复数 $z = (a+i)(1+2i)$, 则下列命题正确的是 ()

A. 若 z 为纯虚数, 则实数 a 的值为 2

B. 若 z 在复平面内对应的点在第三象限, 则实数 a 的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, 2)$

C. 实数 $a = -\frac{1}{2}$ 是 $z = \bar{z}$ ($\bar{z}$ 为 z 的共轭复数) 的充要条件

D. 若 $z + |z| = x + 5i (x \in R)$, 则实数 a 的值为 2

【答案】ACD

【解析】 $z = (a+i)(1+2i) = a-2 + (1+2a)i$,

∴选项 A: z 为纯虚数, 有 $\begin{cases} a-2=0 \\ 1+2a \neq 0 \end{cases}$ 可得 $a=2$, 故正确;

选项 B: z 在复平面内对应的点在第三象限, 有 $\begin{cases} a-2 < 0 \\ 1+2a < 0 \end{cases}$ 解得 $a < -\frac{1}{2}$, 故错误;

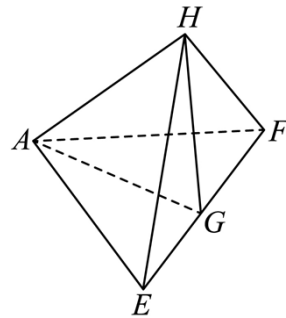
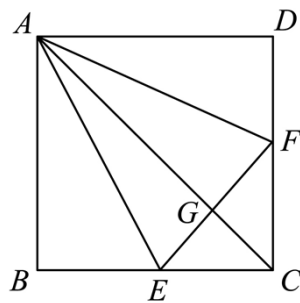
选项 C: $a = -\frac{1}{2}$ 时, $z = \bar{z} = -\frac{5}{2}$; $z = \bar{z}$ 时, $1+2a=0$ 即 $a = -\frac{1}{2}$, 它们互为充要条件,

故正确;

选项 D: $z + |z| = x + 5i (x \in R)$ 时, 有 $1+2a=5$, 即 $a=2$, 故正确.

故选: ACD.

12. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 的中点, G 是 EF 的中点. 现在沿 AE, AF 及 EF 把这个正方形折成一个空间图形, 使 B, C, D 三点重合, 重合后的点记为 H , 下列说法正确的是 ()



A. $AG \perp$ 平面 EFH

B. $AH \perp$ 平面 EFH

C. $HF \perp$ 平面 AEH

D. $HG \perp$ 平面 AEF

【答案】BC

【解析】由题意可得: $AH \perp HE$, $AH \perp HF$,

∴ $AH \perp$ 平面 EFH , 而 AG 与平面 EFH 不垂直, ∴ B 正确, A 不正确;

又 $HF \perp HE$, ∴ $HF \perp$ 平面 AHE , C 正确;

HG 与 AG 不垂直, 因此 $HG \perp$ 平面 AEF 不正确, D 不正确.

故选: BC.

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 今年由于猪肉涨价太多, 更多市民选择购买鸡肉、鸭肉、鱼肉等其它肉类. 某天在市场中随机抽出 100 名市民调查, 其中不买猪肉的人有 30 位, 买了肉的人有 90 位, 买猪肉且买其它肉的人共 30 位, 则这一天该市只买猪肉的人数与全市人数的比值的估计值为_____.

高级中学名校试卷

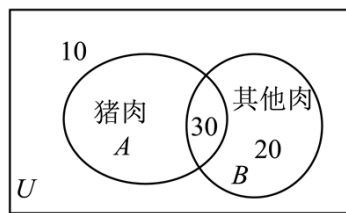
【答案】0.4

【解析】由题意，将买猪肉的人组成的集合设为 A ，买其它肉的人组成的集合设为 B ，则韦恩图如下： $A \cap B$ 中有 30 人， $C_U(A \cup B)$ 中有 10 人，又不买猪肉的人有 30 位，

$\therefore B \cap C_U A$ 中有 20 人， $\therefore$ 只买猪肉的人数为： $100 - 10 - 20 - 30 = 40$ ，

$\therefore$ 这一天该市只买猪肉的人数与全市人数的比值的估计值为 $\frac{40}{100} = 0.4$.

故【答案】为：0.4.



14. 已知向量 $\vec{a} = (5, 5)$ ， $\vec{b} = (\lambda, 1)$ ，若 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角是锐角，则实数 λ 的取值范围为_____；

【答案】 $(-7, 1) \cup (1, 7)$

【解析】由题意 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) > 0$ ，即 $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 > 0$ ， $5^2 + 5^2 > \lambda^2 + 1^2$ ， $\therefore -7 < \lambda < 7$ ，

若 $\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - \vec{b})$ ，则 $\begin{cases} 5 + \lambda = k(5 - \lambda) \\ 5 + 1 = k(5 - 1) \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ \lambda = 1 \end{cases}$ ，

综上 λ 的范围是 $(-7, 1) \cup (1, 7)$ 。

故【答案】为： $(-7, 1) \cup (1, 7)$ 。

15. 设复数 z 满足 $|z| = 1$ ，且使得关于 x 的方程 $zx^2 + 2\bar{z}x + 3 = 0$ 有实根，则这样的复数 z 的和为_____。

【答案】 $-\frac{7}{4}$

【解析】设 $z = a + bi$ ，($a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a^2 + b^2 = 1$)，

则原方程 $zx^2 + 2\bar{z}x + 3 = 0$ 变为 $(ax^2 + 2ax + 3) + (bx^2 - 2bx)i = 0$ ，

所以 $ax^2 + 2ax + 3 = 0$ ，①且 $bx^2 - 2bx = 0$ ，②；

高级中学名校试卷

(1) 若 $b=0$, 则 $a^2=1$ 解得 $a=\pm 1$, 当 $a=1$ 时①无实数解, 舍去;

从而 $a=-1$, $x^2-2x-3=0$ 此时 $x=-1$ 或 3 , 故 $z=-1$ 满足条件;

(2) 若 $b \neq 0$, 由②知, $x=0$ 或 $x=2$, 显然 $x=0$ 不满足, 故 $x=2$,

代入①得 $a=-\frac{3}{8}$, $b=\pm\frac{\sqrt{55}}{8}$, 所以 $z=-\frac{3}{8}\pm\frac{\sqrt{55}}{8}i$,

综上满足条件的所以复数的和为 $-1+\left(-\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{55}}{8}i\right)+\left(-\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{55}}{8}i\right)=-\frac{7}{4}$.

故【答案】为: $-\frac{7}{4}$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边. 若 $A=\frac{\pi}{3}, b=1$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

则 a 的值为_____

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】由 $A=\frac{\pi}{3}, b=1$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

得 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $c=2$,

则 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$, 所以 $a = \sqrt{3}$.

故【答案】为: $\sqrt{3}$.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 17 题 10 分, 18-22 题每题 12 分, 共 70 分.)

17. 已知向量 $\vec{OA} = (3, -4)$, $\vec{OB} = (6, -3)$, $\vec{OC} = (5-m, -3-m)$.

(1) 若点 A, B, C 能构成三角形, 求实数 m 应满足的条件;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $\angle A$ 为直角, 求实数 m 的值.

解: (1) 已知向量 $\vec{OA} = (3, -4)$, $\vec{OB} = (6, -3)$, $\vec{OC} = (5-m, -3-m)$,

若点 A, B, C 能构成三角形, 则这三点不共线, 即 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BC}$ 不共线,

$\vec{AB} = (3, 1)$, $\vec{AC} = (2-m, 1-m)$, 故知 $3(1-m) \neq 2-m$,

高级中学名校试卷

∴实数 $m \neq \frac{1}{2}$ 时, 满足条件.

(2) 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $\angle A$ 为直角, 则 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$,

∴ $3(2-m) + (1-m) = 0$, 解得 $m = \frac{7}{4}$.

18. 甲、乙两名运动员各投篮一次, 甲投中的概率为 0.8, 乙投中的概率为 0.9, 求下列事件的概率:

(1) 两人都投中;

(2) 恰好有一人投中;

(3) 至少有一人投中.

解: 设 $A =$ “甲投中”, $B =$ “乙投中”, 则 $\bar{A} =$ “甲没投中”, $\bar{B} =$ “乙没投中”,

由于两个人投篮的结果互不影响,

所以 A 与 B 相互独立, A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都相互独立,

由已知可得 $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.9$, 则 $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.1$;

(1) $AB =$ “两人都投中”, 则 $P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$.

(2) $A\bar{B} \cup \bar{A}B =$ “恰好有一人投中”, 且 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 互斥,

则 $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B)$

$= 0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.9 = 0.26$.

(3) $AB \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B =$ “至少有一人投中”, 且 AB 、 $A\bar{B}$ 、 $\bar{A}B$ 两两互斥,

所以 $P(AB \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$

$= P(AB) + P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = 0.72 + 0.26 = 0.98$.

19. 某城市 100 户居民的月平均用水量(单位: 吨), 以 $[0, 2)$ $[2, 4)$ $[4, 6)$ $[6, 8)$ $[8, 10)$ $[10, 12)$

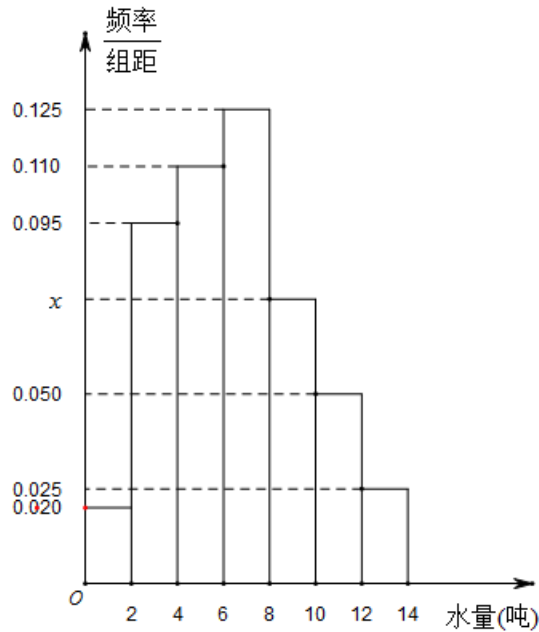
$[12, 14)$ 分组的频率分布直方图如图.

(1) 求直方图中 x 的值; 并估计出月平均用水量的众数.

(2) 求月平均用水量的中位数及平均数;

(3) 在月平均用水量为 $[6, 8)$, $[8, 10)$, $[10, 12)$, $[12, 14)$ 的四组用户中, 用分层抽样的方法抽取 22 户居民, 则应在 $[10, 12)$ 这一组的用户中抽取多少户?

(4) 在第(3)问抽取的样本中, 从 $[10,12)$ $[12,14)$ 这两组中再随机抽取2户, 深入调查, 则所抽取的两户不是来自同一个组的概率是多少?



解: (1) 根据频率和为1, 得 $2 \times (0.02 + 0.095 + 0.11 + 0.125 + x + 0.05 + 0.025) = 1$,

解得 $x = 0.075$; 由图可知, 最高矩形的数据组为 $[6, 8)$, 所以众数为 $\frac{1}{2}(6 + 8) = 7$.

(2) $[2, 6)$ 内的频率之和为 $(0.02 + 0.095 + 0.11) \times 2 = 0.45$;

设中位数为 y , 则 $0.45 + (y - 6) \times 0.125 = 0.5$,

解得 $y = 6.4$, $\therefore$ 中位数为 6.4;

平均数为 $2(1 \times 0.02 + 3 \times 0.095 + 5 \times 0.11 + 7 \times 0.125 + 9 \times 0.075 + 11 \times 0.025) = 5.36$.

(3) 月平均用电量为 $[10,12)$ 的用户在四组用户中所占的比例为

$$\frac{0.05}{0.125 + 0.075 + 0.05 + 0.025} = \frac{2}{11},$$

$\therefore$ 月平均用电量在 $[10,12)$ 的用户中应抽取 $22 \times \frac{2}{11} = 4$ (户).

(4) 月平均用电量在 $[12,14)$ 的用户中应抽取 $22 \times \frac{1}{11} = 2$ (户),

月平均用电量在 $[10,12)$ 的用户设为 A 、 B 、 C 、 D ,

月平均用电量在 $[12,14)$ 的用户设为 e , f ,

从 $[10,12)$, $[12,14)$ 这两组中随机抽取2户共有:

高级中学名校试卷

$AB, AC, AD, Ae, Af, BC, BD, Be, Bf, CD, Ce, Cf, De, Df, ef$, 15 种情况,

其中, 抽取的两户不是来自同一个组的有 $Ae, Af, Be, Bf, Ce, Cf, De, Df$, 8 种情况,

所以, 抽取的两户不是来自同一个组的概率为 $\frac{8}{15}$.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 设角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$\cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 C + \sin A \sin B.$$

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $c = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

解: (1) 由题意知 $1 - \sin^2 A = \sin^2 B + 1 - \sin^2 C + \sin A \sin B$,

$$\text{即 } \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = -\sin A \sin B,$$

由正弦定理得 $a^2 + b^2 - c^2 = -ab$,

$$\text{由余弦定理得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又 } 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{2\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2,$$

$$\therefore a = 2\sin A, b = 2\sin B,$$

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 的周长 } L = a + b + c = 2(\sin A + \sin B) + \sqrt{3} = 2\left[\sin A + \sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right)\right] + \sqrt{3}$$

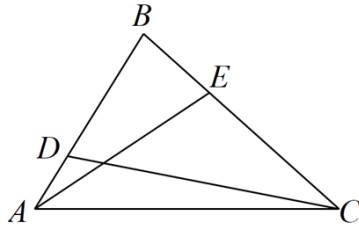
$$= 2\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3},$$

$$\text{由 } 0 < A < \frac{\pi}{3}, \therefore \frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1,$$

$$\therefore 2\sqrt{3} < 2\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \leq 2 + \sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 周长的取值范围是 } (2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}].$$

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$.



(1) 求 CD 的长;

(2) 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的值.

解: (1) $\because \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AD}$, $\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$,

$\because AB = 2$, $AC = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$,

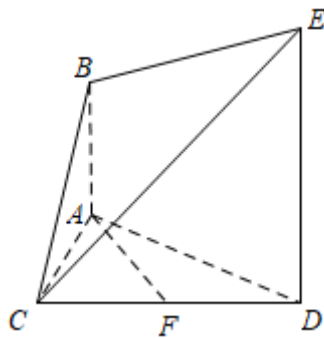
$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \times 2^2 - \frac{2}{3} \times 3 + 3^2} = \frac{\sqrt{67}}{3}.$$

(2) $\because \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$, $\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 3 = \frac{7}{3}.$$

22. 如图, 已知 $AB \perp$ 平面 ACD , $DE \perp$ 平面 ACD , $\triangle ACD$ 为等边三角形, $AD = DE = 2AB$, F 为 CD 的中点.



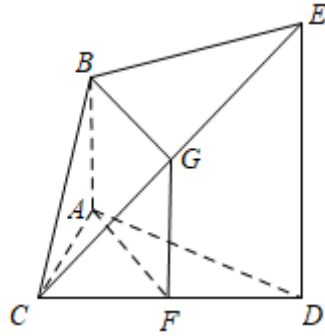
(1) 求证: $AF \parallel$ 平面 BCE ;

(2) 求直线 BD 和平面 CDE 所成角的正弦值.

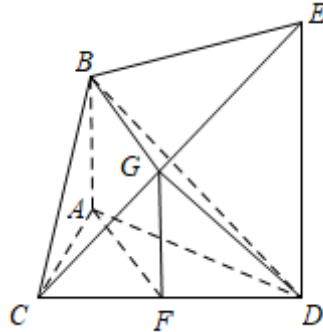
解: (1) 取 CE 中点 G , 连接 BG , FG , 如图所示:

因为 F , G 分别为 CD , CE 的中点, 所以 $FG \parallel DE$ 且 $FG = \frac{1}{2}DE$,

又因为 $AB \perp$ 平面 ACD ， $DE \perp$ 平面 ACD ，所以 $AB \parallel DE$ ， $AB = \frac{1}{2}DE$ ，
 所以 $FG \parallel AB$ ， $FG = AB$ ，所以四边形 $ABGF$ 为平行四边形，所以 $AF \parallel BG$ ，
 又因为 $AF \not\subset$ 平面 BCE ， $BG \subset$ 平面 BCE ，所以 $AF \parallel$ 平面 BCE 。



(2) 因为 $AB \perp$ 平面 ACD ， $AF \subset$ 平面 ACD ，所以 $AB \perp AF$ ，所以 $GF \perp AF$ ，
 又 $\triangle ACD$ 为等边三角形， F 为 CD 的中点，所以 $AF \perp CD$ ，
 又 $CD, GF \subset$ 平面 CDE ，所以 $AF \perp$ 平面 CDE ，即 $BG \perp$ 平面 CDE ，
 又 $DG \subset$ 平面 CDE ，则 $BG \perp DG$ ，
 连接 DG ， BD ，如图所示，



则 $\angle BDG$ 即为直线 BD 和平面 CDE 所成角，

设 $AD = DE = 2AB = 2$ ，在 $Rt\triangle CDE$ 中， $DG = \sqrt{2}$ ，

在直角梯形 $ABED$ 中， $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{5}$ ，

在 $Rt\triangle BGD$ 中， $BG = \sqrt{BD^2 - GD^2} = \sqrt{3}$ ，所以 $\sin \angle BDG = \frac{BG}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ ，

所以直线 BD 和平面 CDE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/078136122110006101>