交通流问题

：交通问题是长期以来一直困扰人们的一个社会问题，本文中我们通过建立求解一些相关的交通流模型，给出了交通流基本参量间的关系，并用公式定性的表示出了各参量。

首先我们用MATLAB6.5 编程拟合出了车辆密度与所取的不同区间长度间的关系图形（见图 1），比较得出当区间长度增值小于或等于 0.1 时的车辆密度最大。对于问题 2，我们通过建立交通流模型，推导出交通流量 $q(x,t)$ 、交通流密度 $\rho(x,t)$ 和交通流速度 $u(x,t)$ 这三个参量之间的关系（见式 2.1），进而推导出车辆守恒方程（即交通流连续性方程）（见式 2.4），证明了公路上区间[a,b(t)]内的车辆数变化率。问题 4 中，我们先依据车辆守恒方程，建立了隧道中稳定平衡交通流模型，推导出了隧道中稳定车流速度公式（见式 4.1）和最佳车流密度公式（见式 4.2）和最大流量公式（见式 4.3），并用MATLAB6.5 编程拟合出了速度-密度关系图（见图 4）、流量-密度关系图（见图 5），解得当车流密度为 ρ^*=232.2，车流速度为U=16.8 时，交通流量达到最大值q^*=1431.7。问题 6 中我们依据加洲准则模型建立了带有反应时间 T 的车辆跟随模型，推导出了任一辆车在任一时间段内的速度公式，驾驶人可以根据前一辆车的速度决定刹车或加速。问题 7 根据车辆守恒方程，推导出在车流密度 ρ_0 附近，密度波的传播速度小于汽车的速度。问题 9 推导出车流密度是 x,t 的函数，问题 10 通过求解一阶线性微分方程得出交通灯由红变绿这个信息的传播速度公式（见式 10.5）。

最后我们对所有问题进行了综合分析，提出了用改变不同时刻红绿灯的变换周期等方案来解决交通拥挤等问题，以改善交通状况。

一、 问题重述

交通问题是长期以来一直困扰人们的一个社会问题，为减缓交通拥挤，消除事故，增大车流量，改善交通状况，我们需要解决以下问题：

1. 在公路（单车道）的区间[0，100]上有 45 辆汽车，根据其位置坐标分析和讨论在 x=50 处的车辆密度与测量区间选取的关系。
2. 在公路上有两个观测站，一个固定在 x=a，另一个是移动的 x=b(t)。N(t)表示公路上区间[a,b(t)]内的车辆数，证明 N(t)的变化率满足关系：$\frac{dN}{dt}=-\rho(b,t)\left[u(b,t)-\frac{db}{dt}\right]+\rho(a,t)u(a,t)$。
3. 根据观测者记录的 a，b 两辆车通过观测站的时间 t_{a1}，t_{a2}，t_{b1}，t_{b2} 估计两辆车的车速和距离。
4. 根据观测所得的速度-密度关系数据建立速度-密度关系模型，画出流量—密度曲线，并确定隧道容量。
5. 设 $u=u(\rho)$， 表示每辆汽车的加速度，证明 $\alpha=-\rho\left(\frac{du}{d\rho}\frac{du}{dx}\right)$，并解释式中负号的含义。
6. 分析带有反应时间 T 的线性车辆跟随模型。
7. 设 $u(\rho)=u_m\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right)$，如果车流密度在 ρ_0 附近，计算其密度波的传播速度并证明这个速度要小于汽车的速度。
8. 结果表明林肯隧道的资料适合于模型 $q(\rho)=a\rho[\ln\rho_m-\ln\rho]$，假设初始密度将在区间[$-x_0$，0]内从 ρ_m 线性地减为 0，讨论两小时后会不会有 $\rho=\rho_m/2$。
9. 设 $u=u_m(1-\frac{\rho^2}{\rho_m^2})$，求解公路上交通灯由红变绿后的车流密度。
10. 给出交通灯由红变绿这个信息的传播速度。

二、 模型建立与问题求解

问题 1

1.1 问题分析

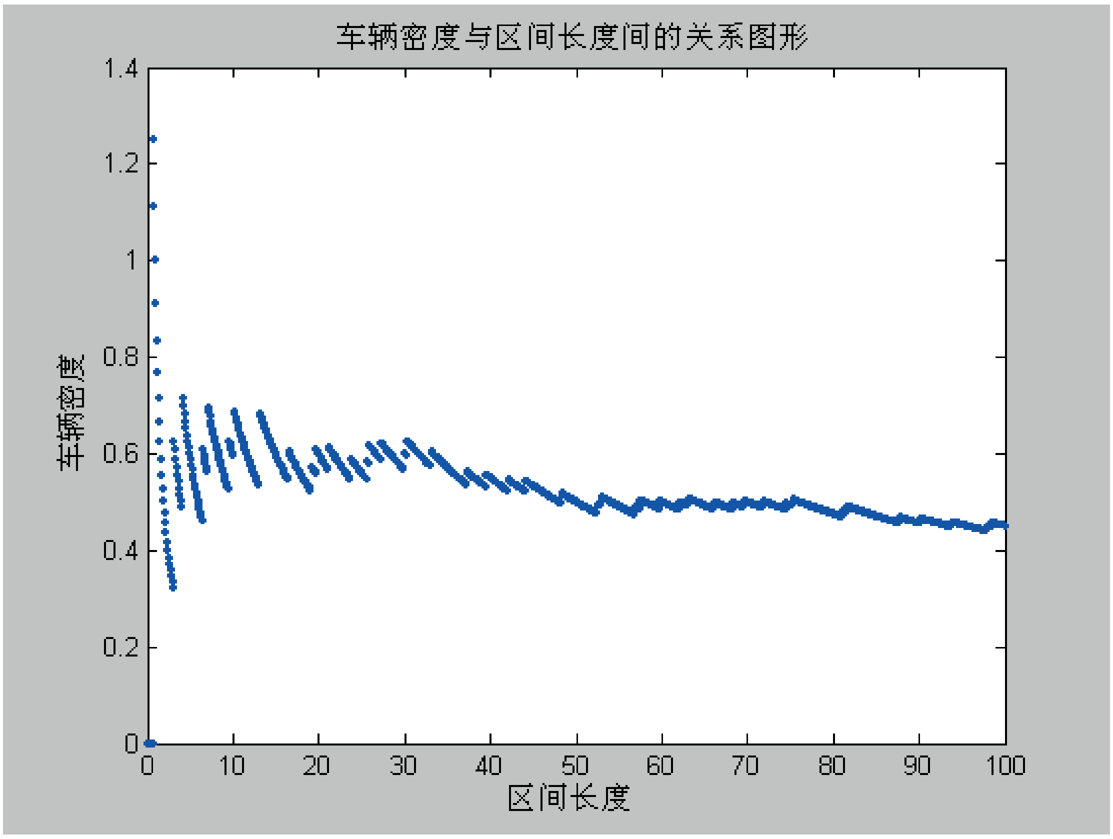
由题中所给数据可以看出，在公路（单车道）的区间[0，100]上的 45 辆汽车并非均匀分布，其各处的车辆密度并不相同。对于 x=50 处的车辆密度的求解，我们将依赖于 x=50 周围的车辆数，也即在选定的测量区间内的车辆数，以此推断测量区间的大小将影响到 x=50 处车辆密度的求解。

因此，我们可以求解出不同的区间长度时 x=50 处的车辆密度，然后作以比较，进而找出车辆密度与区间长度之间的关系。

1.2 模型建立与求解

以区间长度（关于 x=50 对称）为坐标横轴，以车辆密度为坐标纵轴，用 MATLAB6.5 编程可以绘制出车辆密度与所取的不同区间长度间的关系图形，如图 1 示：

图 1



用 MATLAB6.5 求解，通过比较不同的区间长度增值可以看出，当区间长度增值小于或等于 0.1 时（图 1 区间长度增值取 0.1），车辆密度最精确，且当区间长度 d 为 0.80 时，车辆密度 最大值为 1.25。

由图 1 可以看出，当区间长度 d 大致在[0，3]之间时，车辆密度 随区间长度 d 的增大而减小，随后，车辆密度 随区间长度 d 的变化而振荡变化。

由此可知，x=50 处车辆密度 的计算将依赖于测量区间 d 的选取，用不同的测量区间求解出的车辆密度是不同的。

问题 2

2.1 模型假设

1) 车辆沿一条无穷长单车道向一个方向行驶，车队中没有超车现象，也没有车辆进入或离开车队，公路沿途没有岔路口及其他入口或出口；
2) 车流量和车流密度满足必要的连续性条件；
3) 设公路为 x 轴，车辆沿 x 轴正向运动。

2.2 符号说明

$N(t)$：公路上区间[a,b(t)]内的车辆数；

$q(x,t)$：x 处单位时间内通过的车辆数；

$\rho(x,t)$：x 处的车流密度；

$u(x,t)$：x 处的车流速度；

$\rho(a,t)$：x=a 处的车流密度；

$u(a,t)$：x=a 处的车流速度；

$\rho(b,t)$：x=b 处的车流密度；

$u(b,t)$：x=b 处的车流速度；

Δt：时间增量。

2.3 问题分析

公路上区间[a,b(t)]内的车辆数是随时间变化的，单位时间内，既有进入该区间的车辆，也有驶出该区间的车辆，因此我们可以用管道中流体运动来比拟道路上的车流运动，进而可以像建立一维流体运动方程那样建立起车流的模型，即交通流模型。

假设在区间[a，b]内车辆从 x=a 驶入，从 x=b 驶出，并且这个区间除了从 x=a 驶入的和从 x=b 驶出的外，不会有其他车辆出现，而且也没有车辆消失，将全部驶出 x=b，于是在这段区间内车辆数的变化完全依赖于在 x=a 驶入及 x=b 驶出的车辆。

2.4 模型建立与求解

2.4.1 交通流模型[1]

在一段时间 T 内，驶过某处的车辆数为 Q，则单位时间内通过该点的车辆数 q=Q/T 称为平均交通流量，单位：辆/小时。

为描述车流的变化，引入瞬时交通流量的概念。设在距道路起点 x 处的位置，在时段(t,t+Δt)中驶过的车辆数为 Q(x,t,t+Δt),则通过 x 点，在时刻 t 的瞬时交通流量为：

$$q(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(x,t,t+\Delta t)}{\Delta t}$$

也可成为交通流量或车流量。

设在某一时刻在长度为l的路段上有 Q 辆车，那么

$$\rho=\frac{Q}{l}$$

称为该路段的平均交通流密度或车流密度。

若用 Q(x,t,t+Δt)表示时刻 t，距起点分别为x 和 x+Δx 的路段中的车辆数，则

$$\rho(x,t)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{Q(x,x+\Delta x,t)}{\Delta x}$$

称为时刻 t，x 处的交通流密度或车流密度。

与一维流体运动一样，将交通流量$q(x,t)$、交通流密度 $\rho(x,t)$ 和交通流速度$u(x,t)$视

作连续甚至可微的量，不难发现，这三个量之间成立如下关系：

$$q(x,t) = \rho(x,t)u(x,t) \tag{2.1}$$

2.4.2 车辆守恒方程（交通流连续性方程）[2]

根据 2.4.1 的交通流模型，在$[t_1,t_2]$时间段内通过 x 点的车辆数为$\int_{t_1}^{t_2} q(x,t)dt$，所以 t 时刻在区间$[a,b]$内的车辆数应为$N(t)=\int_a^b \rho(x,t)dx$。考虑$N(t)$随时间变化的情况，则$N(t)-N(t_0)$就给出了在时间段$[t_0,t]$内区间$[a,b]$内车辆数的变化，因为车辆是守恒，按假设它必须等于这段时间内从 x=a 驶入的车辆数减去从 x=b 驶出的车辆数。于是有

$$N(t)-N(t_0)=\int_{t_0}^{t} q(a,\xi)d\xi-\int_{t_0}^{t} q(b,\xi)d\xi=\int_{t_0}^{t}[q(a,\xi)-q(b,\xi)]d\xi \tag{2.2}$$

将此式两边关于 t 求导数，并注意到$N(t)$与密度 的关系可以得到

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dt = q(a,t)-q(b,t) \tag{2.3}$$

式（2.3）就是积分形式的守恒方程。它表示了在一个有限长的公路段上的交通状况。在关于q和 的光滑性质的假设下有

$$q(a,t)-q(b,t)=-\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}q(x,t)dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dt$$

从而式（2.3）可写作

$$\int_a^b\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}\right)dx=0$$

由$[a,b]$的任意性，得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial q}{\partial x}\text{或}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \tag{2.4}$$

式（2.4）即为车辆守恒方程（也叫交通流连续性方程）。

由交通流的基本关系（2.1），上式还可写作

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0 \tag{2.5}$$

2.4.3 模型建立与求解

设其中一个观测站在 x=a 处，时刻 t_0时另一观测站在 x=b(t_0)处，则当时间增加Δt 时，另一观测站位于 x=b(t_0+Δt)处，如图 2 示：

图 2