

第十九章 曲线积分与曲面积分

定积分与重积分是讨论定义在直线段、平面图形或空间区域上函数的积分问题.本章则研究定义在曲线段或曲面块上函数的积分.

第一节 第一型曲线积分与第一型曲面积分

一、第一型曲线积分与第一型曲面积分的概念

设某物体 Ω 的密度函数 $f(\sigma)$ 是定义在 Ω 上的连续函数,当物体 Ω 是直线段时,应用定积分就能计算得 Ω 的质量。当物体 Ω 是一个平面图形或空间的一个立体时,应用二重积分或三重积分就能计算得它的质量。

现在研究物体 Ω 是一个曲面段(平面的或空间的)或是一个曲面块时的质量的计算。

首先对 Ω 作分割,它把 Ω 分成 n 个小曲线段或小曲面 Ω_i ($i=1,2,\dots,n$),并在每一个 Ω_i 上任取一点 p_i 。由于 f 为 Ω 上连续函数,故当 Ω_i 都很小时,每一小段或小块 Ω_i 的质量可近似地等于 $f(p_i)\Delta\Omega_i$ 。于是在整个 Ω 上的质量就近似的等于和式

$$\sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta\Omega_i$$

当对 Ω 的分割越来越细密(即 $d = \max\{\Omega_i \text{ 直径}\} \rightarrow 0$)时,上述和式的极限就是所求物体 Ω 的质量。

由上面看到,求具有某种物质的曲线段或曲面块的质量,与求直线段或平面块的质量一样,也是通过“分割、近似求和、去极限”来得到的。

下面给出这类积分的定义。

定义 19-1 设 Ω 是平面或空间的一个可度量的几何体. f 为定义在 Ω 上的函数。对 Ω 作分割 T ,它把 Ω 分成 n 个可度量的小几何体 Ω_i ($i=1,2,\dots,n$),称 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(\Omega_i)\}$

为分割 T 的细度,且在 Ω_i 上任取一点 p_i ($i=1,2,\dots,n$)。若有极限

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta\Omega_i = J,$$

且 J 的值与分割 T 及介点 p_i 的取法无关,则称 f 在 Ω 上可积,极限 J 为 f 在 Ω 上的积分,记作

$$J = \int_{\Omega} f \quad (1)$$

若 Ω 为平面曲线或空间曲线 L ，则称(1)为 f 在 L 上的第一型曲线积分，特别记作

$$\int_L f(x, y) ds \quad \text{或} \quad \int_L f(x, y, z) ds, \quad (2)$$

这里 ds 为曲线 L 的弧微分。

若 Ω 为空间曲面块 S ，则称(1)为 f 在 S 上的第一型曲面面积分，特别记作

$$\iint_S f(x, y, z) dS. \quad (3)$$

不难看到，当 Ω 是直线段时，(1) 式就是定积分；当 Ω 为平面区域时，(1) 式就是二重积分；当 Ω 是三维空间区域时，(1) 式就是三重积分。

当前面讲到的物体 Ω 为曲线段（曲面块）时，其质量可由第一型曲线积分（2）（第一型曲面积分（3））求得。

第一型曲线积分与第一型曲面积分也有和定积分类似的性质。可以证明：若 f 为可度量几何体 Ω 上的连续函数，则 f 为 Ω 上的可积函数。此外，还有下述一些重要性质，其中 Ω 都是相应空间中可度量的几何体， f 是 Ω 上的可积函数。

1. 若 $f_i (i=1, 2, \dots, k)$ 在 Ω 上可积， $C_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为常数，则 $\sum_{i=1}^k C_i f_i$ 在 Ω 上可积，

且

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^k C_i f_i \right) = \sum_{i=1}^k C_i \int_{\Omega} f_i$$

2. 设 Ω 可被划分成有限个相连接的可度量小段（块） $\Omega_i (i=1, 2, \dots, k)$ 。若 f 在 Ω 上可积，则 f 也在 $\Omega_i (i=1, 2, \dots, k)$ 上可积，且

$$\int_{\Omega} f = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} f \quad (4)$$

反之，若 f 在 $\Omega_i (i=1, 2, \dots, k)$ 上都可积，则 f 在 Ω 上也可积，且成立（4）式。

3. 若 f, g 在 Ω 上可积，且 $f(p) \leq g(p)$ ，则

$$\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$$

4. 若 f 在 Ω 上可积，则 $|f|$ 也在 Ω 上可积，且

$$\left| \int_{\Omega} f \right| \leq \int_{\Omega} |f|$$

5. 若 f 在 Ω 上可积, 则存在常数 $c \in \left[\inf_{\Omega} f(p), \sup_{\Omega} f(p) \right]$, 使得

$$\int_{\Omega} f = c \Delta \Omega$$

二、第一型曲线积分与第一型曲面积分的计算

第一型曲线积分与第一型曲面积分可分别将它们化为定积分与二重积分来计算。

定理 19-1 设有光滑曲线

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

函数 f 为定义在 L 上的连续函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

证明 显然 L 是可求长的, 且在 L 上由 $t = t_{i-1}$ 到 $t = t_i$ 的弧长

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

由 $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ 的连续性与积分中值定理, 有

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} \Delta t_i \quad (t_{i-1} < \tau'_i < t_i).$$

所以

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau''_i), \psi(\tau''_i)) \sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} \Delta t_i$$

这里 $t_{i-1} \leq \tau'_i, \tau''_i \leq t_i$, 设

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau'_i), \psi(\tau'_i)) [\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i) + \psi'^2(\tau'_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\tau''_i) + \psi'^2(\tau''_i)}] \Delta t_i$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i &= \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau''_i), \psi(\tau''_i)) \sqrt{\varphi'^2(\tau''_i) + \psi'^2(\tau''_i)} \Delta t_i + \sigma \end{aligned} \quad (6)$$

令 $\Delta t = \max \{ \Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n \}$,

现在证明 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma = 0$.

因为复合函数 $f(\varphi(t), \psi(t))$ 关于 t 连续, 所以在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上有界, 即存在 M , 对一切 $t \in [\alpha, \beta]$ 有

$$|f(\varphi(t), \psi(t))| \leq M.$$

再由 $\sqrt{\varphi_{12}(t) + \psi_{12}(t)}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 所以它在 $[\alpha, \beta]$ 上一致连续. 即当任给 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 当 $\Delta t < \delta$ 时有

$$\left| \sqrt{\varphi_{12}(t_i) + \psi_{12}(t_i)} - \sqrt{\varphi_{12}(t'_i) + \psi_{12}(t'_i)} \right| < \delta$$

从而 $|\sigma| \leq \varepsilon M \sum_{i=1} \Delta t_i = \varepsilon M (\beta - \alpha)$

所以 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma = 0$.

再从定积分定义得

$$\begin{aligned} \lim_{i=1} \sum f(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \sqrt{\varphi_{12}(t_i) + \psi_{12}(t_i)} \Delta t_i \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi_{12}(t) + \psi_{12}(t)} dt. \end{aligned}$$

所以当 (6) 式两边取极限后, 即得所要证的 (5) 式。

若曲线 L 由方程

$$y = \psi(x), \quad x \in [a, b]$$

表示, 且 ψ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数, 则 (5) 式可写成

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + \psi_{12}(x)} dx. \quad (7)$$

若曲线 L 由方程

$$x = \varphi(y), \quad y \in [c, d]$$

表示, 且 φ 在 $[c, d]$ 上有连续的导函数, 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f(\varphi(y), y) \sqrt{1 + \varphi_{12}(y)} dy. \quad (8)$$

例 1 设 L 是半圆周 $\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = a \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$, 使计算第一型曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds$.

解 由公式 (5) 可得

$$\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_0^\pi a^2 \sqrt{a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = a^3 \pi.$$

例 2 设 L 是 $y^2 = 4x$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,2)$ 一段 (图 19-1), 计算第一型曲线积分 $\int_L y ds$.

解 由公式 (8) 得

$$\begin{aligned} \int_L y ds &= \int_0^2 y \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} dy \\ &= 2 \frac{2}{3} \left(1 + \frac{y^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^2 \\ &= \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

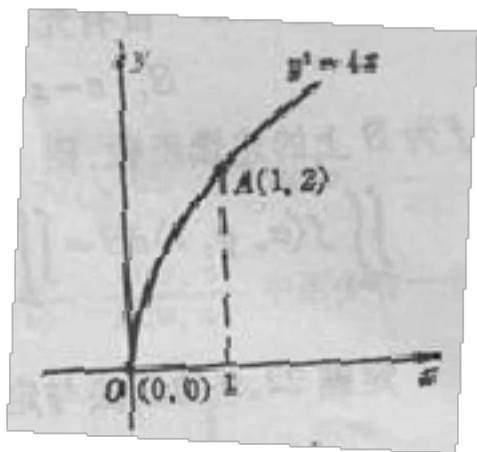


图 19-1

仿照定理 19-1, 当曲线 L 由参量方程 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ 表示时, 空间曲线积分的计算公式为

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y, z) ds \\ = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

例 3 计算 $I = \int_C xy ds$, 其中 $C: x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

解 $x' = -a \sin t$, $y' = b \cos t$.

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

由公式 (2), 有

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{a^2 \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt.$$

设 $z = \cos 2t$, $dz = -2 \sin 2t dt$ 或 $\sin 2t dt = -\frac{1}{2} dz$, 有

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} z} dz \\
 &= \frac{ab}{4} \frac{2}{b^2-a^2} \frac{2}{3} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} z \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{ab}{3} \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.
 \end{aligned}$$

例 4 计算 $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 C 是圆柱螺旋线:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

解 $x' = -a \sin t, \quad y' = a \cos t, \quad z' = b.$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} (2a^2\pi + \frac{8}{3}b^2\pi).$$

对于第一型曲面积分的计算有下述定理。

定理 19-2 设有光滑曲线

$$S: \quad z = z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

f 为 S 上的连续函数, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (10)$$

定理 19-2 的证法与定理 19-1 相仿, 这里不再重复了。

例 5 计算 $\iint_S \frac{dS}{z}$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ ($0 < h < a$) 所截

的顶部 (图 19-2)。

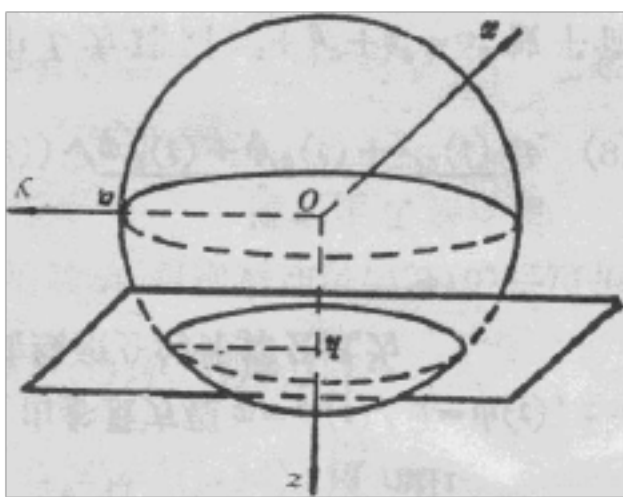


图 19-2

解 曲面 S 的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 定义域 D 为圆域: $x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2$.

由于 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = a / \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$

所以由公式 (10) 求得

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{z} dS &= \iint_D \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{a}{a^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= 2\pi a \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{\rho}{a^2 - \rho^2} d\rho = -\pi a \ln(a^2 - \rho^2) \Big|_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \\ &= 2\pi a \ln \frac{a}{h}. \end{aligned}$$

对于由参量形式表示的光滑曲面

$$S: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

在 S 上第一型曲面积分的计算公式为

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \end{aligned} \tag{11}$$

这里要求雅克比行列式 $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ 中至少有一个不等于零, 其中

$$\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned}$$

例 6 计算 $\iint_S z dS$, 其中 S 为螺旋面 (图 19-3) 的一部分:

$$S: \begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = v. \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq u \leq a, \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{cases}$$

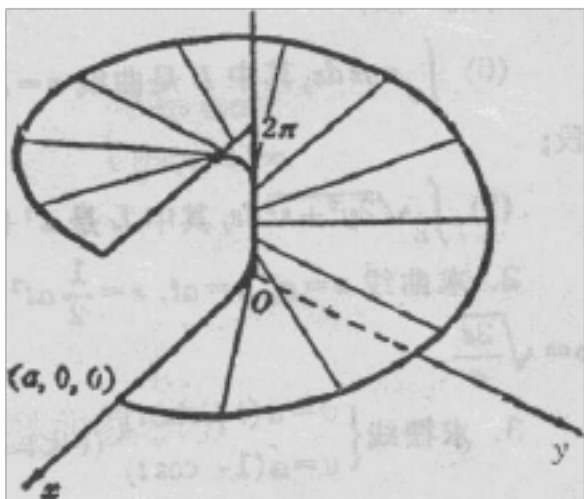


图 19-3

解 由于

$$E = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = x \frac{x}{u} + y \frac{y}{u} + z \frac{z}{u} = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0,$$

$$G = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2.$$

所以由公式 (11) 求得

$$\begin{aligned} \iint_S z dS &= \iint_D v \sqrt{1+u^2} du dv = \int_0^{2\pi} v dv \int_0^a \sqrt{1+u^2} du \\ &= 2\pi^2 \left[\frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln \left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right]_0^a \\ &= \pi^2 \left[a \sqrt{1+a^2} + \ln \left(a + \sqrt{1+a^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

第二节 第二型曲线积分

首先讨论力场作功问题。我们知道，若质点在常力 F （大小与方向都不变）的作用下沿直线运动，位移是 l （有向线段），则常力 F 所作的功 W 是 F 与 l 的内积，

即 $W = F \cdot L = |F| \cdot |l| \cos \theta$ ，其中 θ 是 F 与 l 之间的夹角。

设有一质点在平面力场 $F = (P(x, y), Q(x, y))$ 的作用下，沿光滑的有向曲线 C 由点 A 运动到点 B ，如图 19-4，求力场 F 所作的功。

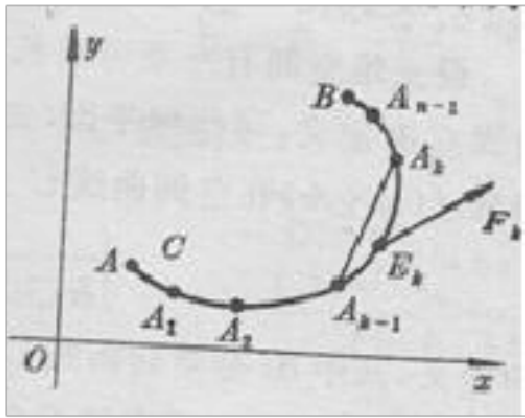


图19-4

有任意分法 T ，将曲线 C 分成 n 个有向的小弧：

$$A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n, \text{ 其中 } A_0 = A, A_n = B.$$

设 A_k 的坐标是 (x_k, y_k) 。将第 k 个有向小弧 $A_{k-1} A_k$ 的弦记为 $\overrightarrow{A_{k-1} A_k}$ ，则弦 $\overrightarrow{A_{k-1} A_k}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影分别是 $x_k - x_{k-1}$ 与 $y_k - y_{k-1}$ ，即

$$\overrightarrow{A_{k-1} A_k} = (x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1}) = (\Delta x_k, \Delta y_k).$$

在第 k 个小弧 $A_{k-1} A_k$ 上任取一点 $E_k(\xi_k, \eta_k)$ 。在点 E_k 的（力）向量是

$$F_k(\xi_k, \eta_k) = (P(\xi_k, \eta_k), Q(\xi_k, \eta_k)).$$

以点 E_k 的向量近似代替第 k 个小弧 $A_{k-1} A_k$ 上每一点的向量。于是，内积

$F_k(\xi_k, \eta_k) \cdot \overrightarrow{A_{k-1} A_k}$ 应是质点在力场 F 的作用下，沿第 k 个小弧 $A_{k-1} A_k$ 由点 A_{k-1} 运动到点 A_k 所作功的近似值。它们的和

$$\sum_{k=1}^n F_k(\xi_k, \eta_k) \cdot \overrightarrow{A_{k-1} A_k}$$

应是质点在力场 F 的作用下，沿曲线 C 由点 A 到点 B 所作功 W 的近似值。当 $\lambda(T)$ 越小，

近似程度越好。于是，当 $\lambda(T) \rightarrow 0$ 时，有

$$W = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F_k(\xi_k, \eta_k) \cdot \overrightarrow{A_{k-1} A_k}.$$

由内积公式，有 $F_k(\xi_k, \eta_k) \cdot \overrightarrow{A_{k-1} A_k} = (P(\xi_k, \eta_k), Q(\xi_k, \eta_k)) \cdot (\Delta x_k, \Delta y_k)$

$$= P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k,$$

$$\begin{aligned}
\text{即 } W &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta y_k] \\
&= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta x_k + \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta y_k. \quad (1)
\end{aligned}$$

抽出 (1) 式的物理意义就得到第二型曲线积分。

设平面上有光滑有向曲线 $C(A, B)$ ，二元函数 $f(x, y)$ 在曲线 C 上有定义。用任意分法 T ，将曲线 C 依次分成 n 个有向小弧：

$$A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n, \text{ 其中 } A_0 = A, A_n = B.$$

设第 k 个小弧 $A_{k-1} A_k$ 的弦 $\overline{A_{k-1} A_k}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影区间的长(带有符号)分别是 Δx_k 与 Δy_k 。在第 k 个小弧 $A_{k-1} A_k$ 上任取一点 $E_k(\varepsilon_k, \eta_k)$ 。作和

$$\sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta x_k \text{ 与 } \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta y_k, \quad (2)$$

分别称为二元函数 $f(x, y)$ 在曲线 $C(A, B)$ 关于 x 与 y 的积分和。

令 $\lambda(T) = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\}$ 。 (Δs_k 是第 k 个小弧 $A_{k-1} A_k$ 的长。)

定义 19-2 设二元函数 $f(x, y)$ 在有向光滑曲线 $C(A, B)$ 有定义。若 $\lambda(T) \rightarrow 0$ 时，二元函数 $f(x, y)$ 在曲线 $C(A, B)$ 关于 x (或 y) 的积分和 (9) 存在极限 J_x (或 J_y)，即

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta x_k] = J_x \quad (\text{或 } \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta y_k] = J_y),$$

称 J_x (或 J_y) 是 $f(x, y)dx$ (或 $f(x, y)dy$) 在曲线 $C(A, B)$ 的第二型曲线积分，记为

$$\int_{C(A, B)} f(x, y)dx \quad (\text{或 } \int_{C(A, B)} f(x, y)dy).$$

由 (1) 式不难看到，质点在平面力场 $F = (P(x, y), Q(x, y))$ 的作用下，沿光滑的有向曲线 C 由点 A 运动到点 B ，力场 F 所作的功 W 是 $P(x, y)dx$ 与 $Q(x, y)dy$ 在曲线 $C(A, B)$ 上的第二型曲线积分之和，即

$$W = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta x_k + \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q(\varepsilon_k, \eta_k) \Delta y_k$$

$$= \int_{C(A,B)} P(x, y)dx + \int_{C(A,B)} Q(x, y)dy.$$

通常上式简写为

$$W = \int_{C(A,B)} P(x, y)dx + \int_{C(A,B)} Q(x, y)dy. \quad (3)$$

由弧长微分知, dx 与 dy 分别是弧长微分 ds 在 x 轴与 y 轴上的投影。弧长微分 ds 的方向就是曲线 C (A, B) 的方向, 则弧长向量微元 $ds = (dx, dy)$.于是, 功 W 可写成向量形式的积分

$$W = \int_{C(A,B)} F(x, y) \cdot ds. \quad (4)$$

注 第二型曲线积分与曲线 C (A, B) 的方向有关.因为 Δx_k 与 Δy_k 分别是第 k 个有向小弧 $\overline{A_{k-1} A_k}$ 的弦 $\overline{A_{k-1} A_k}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影, 当改变曲线 C 的方向时, Δx_k 与 Δy_k 要改变符号, 所以第二型曲线积分也要改变符号, 即

$$\begin{aligned} \int_{C(A,B)} f(x, y)dx &= - \int_{C(B,A)} f(x, y)dx \\ \text{与} \quad \int_{C(A,B)} f(x, y)dy &= - \int_{C(B,A)} f(x, y)dy. \end{aligned}$$

定理 19-3 如果二元函数 $f(x, y)$ 在有向光滑曲线 C (A,B): $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ 连续, 且 $A(x(\alpha), y(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta))$, 则 $f(x, y)dx$ 与 $f(x, y)dy$ 在 C (A,B) 的第二型曲线积分都存在, 且

$$\int_{C(A,B)} f(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)]x'(t)dt, \quad (5)$$

$$\int_{C(A,B)} f(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)]y'(t)dt. \quad (6)$$

证明 只给出等式 (5) 的证明, 同法可证等式 (6) .

给区间 $[\alpha, \beta]$ 任意分法 T , 分点式 $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$.第 k 个小区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 对应曲线 C 是哪个第 k 个小弧 $\overline{A_{k-1} A_k}$, 在 $[t_{k-1}, t_k]$ 上任取一点 τ_k .在第 k 个小弧 $\overline{A_{k-1} A_k}$ 上有对应的点 $E_k(\xi_k, \eta_k)$, 其中 $\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k)$.于是,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f[x(\tau_k), y(\tau_k)] [x(t_k) - x(t_{k-1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1} f[x(\tau_k), y(\tau_k)] \int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t) dt \\
&= \sum_{k=1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f[x(\tau_k), y(\tau_k)] x'(t) dt.
\end{aligned} \tag{7}$$

另一方面, (5) 式等号右端可改写成

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] x'(t) dt = \sum_{k=1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f[x(t), y(t)] x'(t) dt. \tag{8}$$

(7) 式与 (8) 式等号两端之差是

$$\sigma_n - J = \sum_{k=1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{f[x(\tau_k), y(\tau_k)] - f[x(t), y(t)]\} x'(t) dt.$$

因为函数 $f[x(t), y(t)]$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 连续, 所以它在 $[\alpha, \beta]$ 一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta > 0$, $\forall T: l(T) < \delta$, $\forall t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, 有

$$|f[x(\tau_k), y(\tau_k)] - f[x(t), y(t)]| < \varepsilon.$$

又因为 $x'(t)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 连续, 所以 $x'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 有界, 即 $\exists M > 0$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, 有

$$|x'(t)| \leq M.$$

于是, 当 $l(T) < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|\sigma_n - J| &\leq \sum_{k=1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f[x(\tau_k), y(\tau_k)] - f[x(t), y(t)]| |x'(t)| dt \\
&< \varepsilon M \sum_{k=1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = M(\beta - \alpha)\varepsilon,
\end{aligned}$$

从而 $\lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma_n = J$, 即

$$\int_{C(A,B)} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] x'(t) dt$$

若光滑有向曲线 $C(A, B)$ 的方程是

$$y = y(t), \quad a \leq x \leq b.$$

$A[a, y(a)]$, $B[b, y(b)]$, 而 $y'(t)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则

$$\int_{C(A,B)} f(x, y) dx = \int_a^b f[x, y(x)] dx.$$

例 4 计算 $\int_C y^2 dx + x^2 dy$, 其中曲线 C 是上半椭圆 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$,

$0 \leq t \leq \pi$ ，取顺时针的方向。

解 $dx = -a \sin t dt$ ， $dy = b \cos t dt$ ，由公式 (5) 与 (6) 有

$$\begin{aligned} & \int_C y^2 dx + x^2 dy \\ &= \int_0^\pi [b^2 \sin^2 t (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t \cdot b \cos t] dt \\ &= -ab^2 \int_0^\pi \sin^3 t dt + a^2 b \int_0^\pi \cos^3 t dt = \frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

例 5 计算 $I = \int_C 2xy dx + x^2 dy$ ，其中曲线 C 分别是 1) 直线 $y = x$ ；

2) 抛物线 $y = x^2$ ； 3) 立方抛物线 $y = x^3$ 。都是由原点 (0,0) 到点 (1,1)。

解 1) 沿直线 $y = x$ ， $dy = dx$ ，有

$$I = \int_C 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 2x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 3x^2 dx = 1.$$

2) 沿抛物线 $y = x^2$ ， $dy = 2x dx$ ，有

$$I = \int_C 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 2x^3 dx + \int_0^1 2x^3 dx = \int_0^1 4x^3 dx = 1.$$

3) 沿立方抛物线 $y = x^3$ ， $dy = 3x^2 dx$ ，有

$$I = \int_C 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 2x^4 dx + \int_0^1 3x^4 dx = \int_0^1 5x^4 dx = 1.$$

例 6 计算 $J = \int_C xy dx + (y - x) dy$ ，其中曲线 C 与例 5 相同，并有与例 5 相同的始点与终点。

解 1) 沿直线 $y = x$ ， $dy = dx$ ，有

$$J = \int_C xy dx + (y - x) dy = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

2) 沿抛物线 $y = x^2$ ， $dy = 2x dx$ ，有

$$J = \int_C xy dx + (y - x) dy = \int_0^1 3x^3 - 2x^2 dx = \frac{1}{12}.$$

3) 沿立方抛物线 $y = x^3$ ， $dy = 3x^2 dx$ ，有

$$J = \int_C xy dx + (y - x) dy = \int_0^1 3x^5 + x^4 - 3x^3 dx = -\frac{1}{20}.$$

例 7 有质量为 m 的质点，在重力的作用下，沿铅垂面上曲线 C 由点 A 到点 B，计算重力 F 所作的功，如图 19-5。

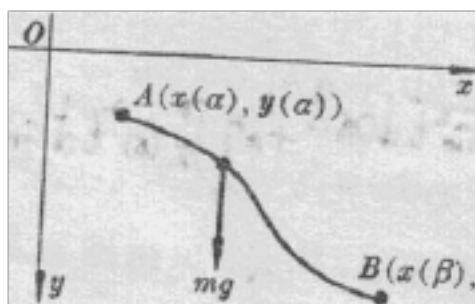


图 19-5

解 设平面曲线 C 的参数方程是 $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$.

$A(x(\alpha), y(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta))$. 已知 $F = (0, mg)$. 于是, 重力所作的功

$$\begin{aligned} W &= \int_{C(A,B)} F \cdot ds = \int_{C(A,B)} (0, mg) \cdot (dx, dy) = \int_{C(A,B)} mg dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} mgy(t) dt = mg[y(\beta) - y(\alpha)]. \end{aligned}$$

此例说明, 质点从点 A 移动到点 B , 重力 F 所作的功只与 A 与 B 的位置有关, 而与曲线 C 无关。这是重力场的一个重要物理特性。

从上述三例看到, 当始点与终点相同, 沿着不同的曲线, 有的曲线积分相等; 有的曲线积分不相等。那么在什么条件之下, 当始点与终点取定时, 曲线积分与所沿的曲线无关呢? 后面我们将讨论这个问题。

设三维空间中有有向光滑曲线 $C(A,B)$, 函数 $f(x, y, z)$ 在曲线 C 上有定义。可仿照平面

(二维空间) 第二型曲线积分定义, 给出 $\int_{C(A,B)} f(x, y, z) dx$ ($\int_{C(A,B)} f(x, y, z) dy$ 与 $\int_{C(A,B)} f(x, y, z) dz$) 在曲线 $C(A,B)$ 的第二型曲线积分

$$\int_{C(A,B)} f(x, y, z) dx \quad \left(\int_{C(A,B)} f(x, y, z) dy \text{ 与 } \int_{C(A,B)} f(x, y, z) dz \right),$$

其中 dx (dy 与 dz) 是有向弧长微元 ds 在 x 轴 (y 轴与 z 轴) 上的投影。

当曲线 $C(A,B)$ 改变方向时, 有 $\int_{C(A,B)} f(x, y, z) dx = - \int_{C(B,A)} f(x, y, z) dx$.

不难写出, 向量场 $\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在有向光滑曲线 $C(A, B)$

的第二型曲线积分是 $\int_{C(A,B)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$, 其 $ds = (dx, dy, dz)$.

如果三维空间的有向光滑曲线 $C(A, B)$ 是参数方程

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

t 由到对应曲线 C 上由点 A 到点 B , 则三维欧氏空间 R^3 的第二型曲线积分可化成定积分,

$$\begin{aligned} \int_{C(A,B)} f(x, y, z) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt, \\ \int_{C(A,B)} f(x, y, z) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] y'(t) dt, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int_{C(A,B)} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] z'(t) dt.$$

例 8 计算 $\int_C (x + y + z) dx$, 其中曲线 $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi$, 从 $t=0$ 到 $t = \pi$

解 由公式 (9) 有

$$\begin{aligned} & \int_C (x + y + z) dx \\ &= \int_0^\pi (\cos t + \sin t + t) (-\sin t) dt \\ &= -\int_0^\pi \cos t \sin t dt - \int_0^\pi \sin^2 t dt - \int_0^\pi t \sin t dt \\ &= -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

第三节 格林公式. 曲线积分与路线的无关性

一、格林公式

本节要讨论的格林公式, 它将建立起平面区域 D 上的二重积分与 D 的边界曲线 L 上的第二型曲线积分之间的联系。

设区域 D 的边界是由一条或几条光滑曲线所围成。边界曲线 L 的正方向规定为: 当人沿边界行走时, 区域 D 总在它的左边, 如图 19-6 所示。若沿与上述所规定的方向相反, 则成为负方向, 并记为 $-L$ 。

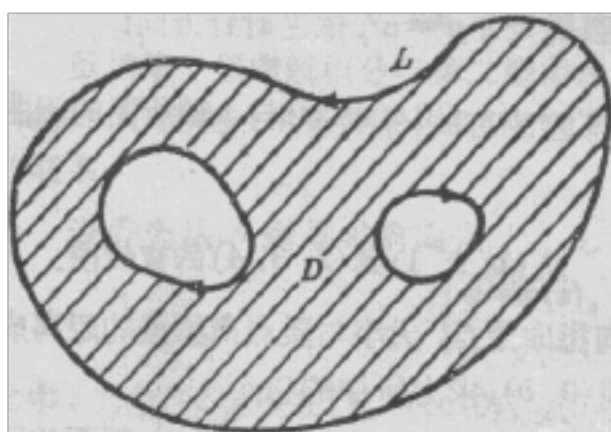


图 19-6

定理 19-4 若函数 P, Q 在闭区域 $D \subset R^2$ 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy \quad (1)$$

这里 L 为区域 D 的边界曲线, 并取正方向。

称公式 (1) 为格林公式。

证明 根据区域 D 的不同形状，分三种情形来证明：

1) 若区域 D 既是 x -型区域又是 y -型区域，即平行于坐标轴的直线和 L 至多交于两点（图 19-7）。这时区域 D 可表示为

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \quad \text{或}$$

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \alpha \leq y \leq \beta,$$

这里 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 分别为曲线 ACB 和 AEB 的方程，而 $x = \psi_1(y)$ 和 $x = \psi_2(y)$ 则分别是曲线 CAE 和 CBE 的方程。于是

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} Q(\psi_2(y), y) dy - \int_{\alpha}^{\beta} Q(\psi_1(y), y) dy \\ &= \int_{CBE} Q(x, y) dy - \int_{CAE} Q(x, y) dy \\ &= \int_{CBE} Q(x, y) dy + \int_{EAC} Q(x, y) dy \\ &= \oint_L Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

同理可以证得

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P(x, y) dx.$$

将上述两个结果相加即得 (1) 式。

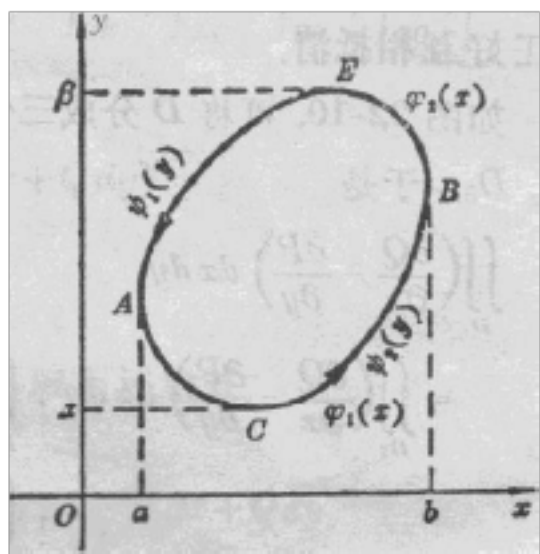


图 19-7

2) 若区域 D 是由一条按段光滑的闭曲线围成（如图 19-8 所示），则先用几段光滑曲线将 D 分成有限个既是 x -型又是 y -型的子区域，然后逐块按 1) 方法推得它的格林

公式，再相加即得（1）式。其中相邻两小子区域的共同边界，则因取向相反，它们的积分值正好互相抵消。

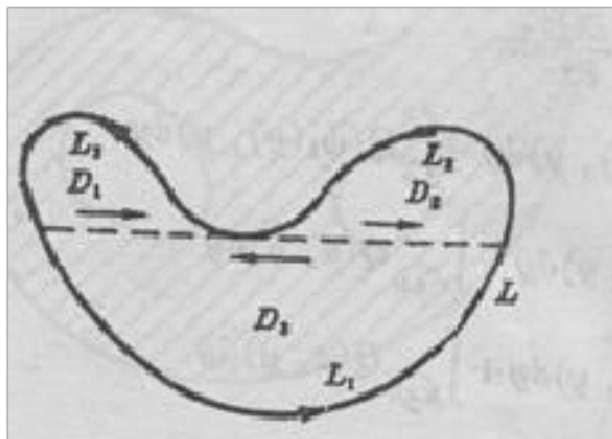


图 19-8

如图 19-8，可将 D 分成三个既是 x -型又是 y -型的区域 D_1, D_2, D_3 。于是

$$\begin{aligned} & \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \oint_{L_1} P dx + Q dy + \oint_{L_2} P dx + Q dy + \oint_{L_3} P dx + Q dy \\ &= \oint_L P dx + Q dy. \end{aligned}$$

3) 若区域 D 不止由一条闭曲线所围成，如图 19-9 所示，这时可适当添加直线段，把区域转化为 2) 的情形来处理。

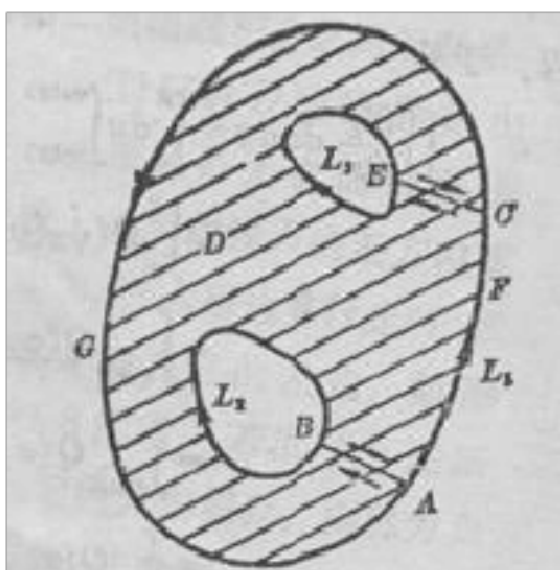


图 19-9

在图 19-9 中连接了后，则 D 的边界曲线由构成。由 2) 已知
为便于记忆，格林公式（1）也可写成下述形式

$$\iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right| dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

格林公式沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系,从而可应用它来简化某些曲线积分或二重积分的计算。

例 1 计算 $\int_{AB} x dy$, 其中曲线 AB 是半径为 r 的圆在第一象限部分 (图 19-10)。

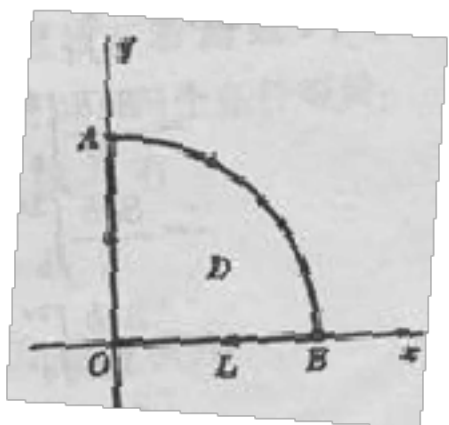


图 19-10

解 对半径为 r 的四分之一圆域 D , 应用格林公式有

$$\begin{aligned} -\iint_D dx dy &= \oint_{-L} x dy \\ &= \int_{OA} x dy + \int_{AB} x dy + \int_{BO} x dy \end{aligned}$$

由于 $\int_{OA} x dy = 0, \int_{BO} x dy = 0$, 所以

$$\int_{AB} x dy = -\iint_D dx dy = -\frac{1}{4}\pi r^2.$$

例 2 计算 $L = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为任一不包含原点的闭区域的边界线。

解 因为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

在上述区域上连续且相等. 于是

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right] dx dy = 0.$$

所以由格林公式 (1) 立即可得 $I = 0$.

在格林公式中, 令 $P = -y, Q = x$, 可得到计算平面面积 D 的公式:

$$\Delta D = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (2)$$

例 3 计算由星形线 $x = a \cos^2 t, y = b \sin^2 t (0 \leq t \leq 2\pi)$ 所界面积。

解 由公式 (2) 得

$$\begin{aligned} \Delta D &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 t \cos^4 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{3ab}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{3}{8} \pi ab. \end{aligned}$$

二、 曲线积分与路线的无关性

下面将讨论曲线积分在什么条件下, 它的值与所沿路线的无关性。

首先, 介绍单连通区域的概念。

若对于平面区域 D 内任一封闭曲线, 皆可不经过 D 以外的点而连续收缩于属于 D 的某一点, 则称此平面区域为单连通区域; 否则称为复连通区域。如图 19-11 中 D_1 、 D_2 是单连通区域, 而图 19-12 中的 D_3 、 D_4 是复连通区域。单连通区域也可这样说: D 内任一封闭曲线所围成的区域内只含有 D 中的点。更通俗地说, 单连通区域是没有“洞”的区域, 复连通区域是有“洞”的区域。

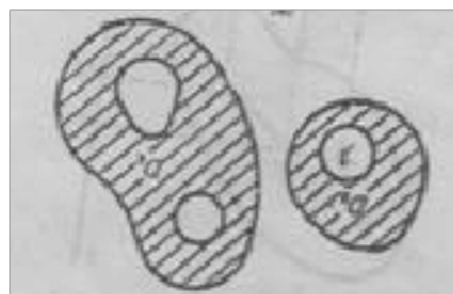
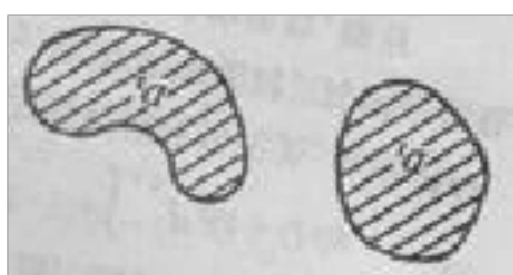


图 19-11

图 19-12

定理 19-5 设 $D \subset R^2$ 是单连通闭区域。若函数 P , Q 在闭区域 D 内连续, 且有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 D 中任一按段光滑的闭曲线 L , 有

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0;$$

(2) 对 D 中任一按段光滑曲线 L , 曲线积分

$$\int_L Pdx + Qdy$$

与路线无关, 只与 L 起点终点有关;

(3) $Pdx + Qdy$ 是 D 内某一函数 u 的全微分, 即在 D 内有

$$du = Pdx + Qdy;$$

(4) 在 D 内每一点处有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设与 ASB 为联结点 A, B 的任意两条光滑曲线 (图 19-13). 由 (1) 推得

$$\begin{aligned} & \int_{ARB} Pdx + Qdy - \int_{ASB} Pdx + Qdy \\ &= \int_{ARB} Pdx + Qdy + \int_{BSA} Pdx + Qdy \\ &= \oint_{ARBSA} Pdx + Qdy = 0. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int_{ARB} Pdx + Qdy = \int_{ASB} Pdx + Qdy.$$

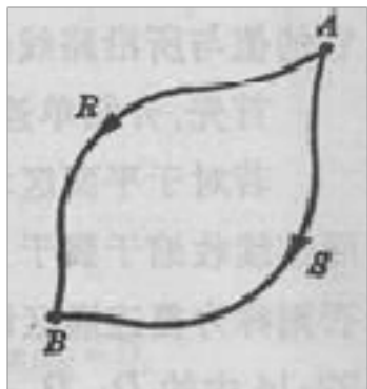


图19-13

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/085020030342011124>