

第 05 讲 平方根、实数、立方根（10 大考点）



考点考向

一、平方根和算术平方根的概念

1. 算术平方根的定义

如果一个正数 x 的平方等于 a ，即 $x^2 = a$ ，那么这个正数 x 叫做 a 的算术平方根（规定 0 的算术平方根还是 0）； a 的算术平方根记作 $\sqrt{a}$ ，读作“ a 的算术平方根”， a 叫做被开方数。

要点：当式子 $\sqrt{a}$ 有意义时， a 一定表示一个非负数，即 $\sqrt{a} \geq 0$ ， $a \geq 0$ 。

2. 平方根的定义

如果 $x^2 = a$ ，那么 x 叫做 a 的平方根。求一个数 a 的平方根的运算，叫做开平方。平方与开平方互为逆运算。 a （ $a \geq 0$ ）的平方根的符号表达为 $\pm\sqrt{a}$ （ $a \geq 0$ ），其中 $\sqrt{a}$ 是 a 的算术平方根。

二、平方根和算术平方根的区别与联系

1. 区别：（1）定义不同；（2）结果不同： $\pm\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{a}$

2. 联系：（1）平方根包含算术平方根；

（2）被开方数都是非负数；

（3）0 的平方根和算术平方根均为 0。

要点：（1）正数的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的那个叫它的算术平方根；负数没有平方根。

（2）正数的两个平方根互为相反数，根据它的算术平方根可以立即写出它的另一个平方根。

因此，我们可以利用算术平方根来研究平方根。

三、平方根的性质

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$$

四、平方根小数点位数移动规律

被开方数的小数点向右或者向左移动 2 位, 它的算术平方根的小数点就相应地向右或者向左移动 1 位.

例如: $\sqrt{62500} = 250$, $\sqrt{625} = 25$, $\sqrt{6.25} = 2.5$, $\sqrt{0.0625} = 0.25$.

五、有理数与无理数

有限小数和无限循环小数都称为有理数. 无限不循环小数又叫无理数.

要点: (1) 无理数的特征: 无理数的小数部分位数无限. 无理数的小数部分不循环, 不能表示成分数的形式.

(2) 常见的无理数有三种形式: ①含 π 类. ②看似循环而实质不循环的数, 如:

1.313113111..... ③带有根号的数, 但根号下的数字开方开不尽, 如 $\sqrt{5}$.

六、实数

有理数和无理数统称为实数.

1. 实数的分类

按定义分:

实数 $\begin{cases} \text{有理数: 有限小数或无限循环小数} \\ \text{无理数: 无限不循环小数} \end{cases}$

按与 0 的大小关系分:

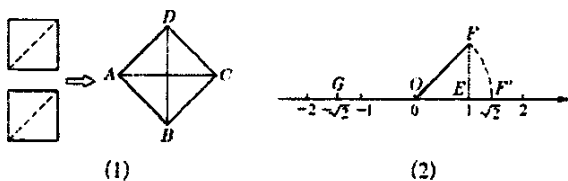
实数 $\begin{cases} \text{正数} \begin{cases} \text{正有理数} \\ \text{正无理数} \end{cases} \\ 0 \\ \text{负数} \begin{cases} \text{负有理数} \\ \text{负无理数} \end{cases} \end{cases}$

2. 实数与数轴上的点的关系

我们尝试用数轴上的一个点来表示 $\sqrt{2}$.

由前面的学习, 我们知道两个边长为 1 的小正方形可以拼成一个面积为 2 的正方形 $ABCD$, 它的边长为

$\sqrt{2}$. 观察正方形 $ABCD$, 可知它的一边是一个直角三角形的斜边, 这个直角三角形的两条直角边长都是 1.



这样，就在数轴上确定一个点来表示 $\sqrt{2}$.

要点：每一个实数都可以用数轴上的点表示，而且这些点是唯一的；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数．数轴上的点与实数**一一对应**。

3. 两个实数比较大小

①负数小于 0, 0 小于正数；两个正数绝对值大的数较大，两个负数绝对值大的数较小；从数轴上看，右边的点表示的数比左边的大。

②数轴上，如果点 A, 点 B 所对应的数分别为 a, b, 那么 A, B 两点的距离 $AB = |a - b|$

4. 估算：怎样估算无理数 $\sqrt{20}$ (①误差小于 1)? (②误差小于 0.1)?

误差小于 0.1 就是指估算出来的值与准确值之间的差的绝对值小于 0.1.

估算无理数的方法是：

(1) 通过平方运算，采用“夹逼法”，确定真正值所在范围；

(2) 根据问题中误差允许的范围内取出近似值。

(3) “精确到”与“误差小于”意义不同。如精确到 1m 是四舍五入到个位，答案惟一；误差小于 1m，答案在真正值左右 1m 都符合题意，答案不惟一。在本章中误差小于 1m 就是估算到个位，误差小于 10m 就是估算到十位。

记忆常用数的近似值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ $\sqrt{3} \approx 1.732$ $\sqrt{5} \approx 2.236$

七、立方根的定义

如果一个数的立方等于 a ，那么这个数叫做 a 的立方根或三次方根. 这就是说，如果 $x^3 = a$ ，那么 x 叫做 a 的立方根. 求一个数的立方根的运算，叫做开立方.

要点：一个数 a 的立方根，用 $\sqrt[3]{a}$ 表示，其中 a 是被开方数，3 是根指数. 开立方和立方互为逆运算.

八、立方根的特征

立方根的特征：正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，0 的立方根是 0.

要点：任何数都有立方根，一个数的立方根有且只有一个，并且它的符号与这个非零数的符号相同. 两个互为相反数的数的立方根也互为相反数.

九、立方根的性质

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

要点：第一个公式可以将求负数的立方根的问题转化为求正数的立方根的问题.

十、立方根小数点位数移动规律

被开方数的小数点向右或者向左移动 3 位, 它的立方根的小数点就相应地向右或者向左移动 1 位. 例如,

$$\sqrt[3]{0.000\ 216}=0.06, \quad \sqrt[3]{0.216}=0.6, \quad \sqrt[3]{216}=6, \quad \sqrt[3]{216000}=60.$$



考点精讲

一. 平方根 (共 4 小题)

1. (2021 秋·嘉兴期末) 2 的平方根是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\pm\sqrt{2}$ D. 4

【分析】根据平方与开平方互为逆运算, 运用平方可得一个数的平方根.

【解答】解: $\because (\pm\sqrt{2})^2=2,$

$$\therefore \pm\sqrt{2}=\pm\sqrt{2},$$

故选: C.

【点评】本题考查了平方根, 根据平方求平方根, 注意一个正数的平方根有两个.

2. (2021 秋·慈溪市期中) 已知 $2a-1$ 的一个平方根是 3, $3a+b-1$ 的一个平方根是 -4, 求 $a+2b$ 的平方根.

【分析】先根据题意得出 $2a-1=9$, $3a+b-1=16$, 然后解出 $a=5$, $b=2$, 从而得出 $a+2b=5+4=9$, 所以 $a+2b$ 的平方根为 ± 3 .

【解答】解: $\because 2a-1$ 的平方根为 ± 3 , $3a+b-1$ 的平方根为 ± 4 ,

$$\therefore 2a-1=9, \quad 3a+b-1=16,$$

解得: $a=5$, $b=2$,

$$\therefore a+2b=5+4=9,$$

$\therefore a+2b$ 的平方根为 ± 3 .

【点评】此题考查了平方根的概念. 注意一个正数有两个平方根, 它们互为相反数; 0 的平方根是 0; 负数没有平方根.

3. (2021 秋·诸暨市期末) 若一个数的平方等于 6, 则这个数等于 $\underline{\pm\sqrt{6}}$.

【分析】根据平方根的定义求解即可.

【解答】解: $\because (\pm\sqrt{6})^2=6,$

$\therefore$ 这个数等于 $\pm\sqrt{6}$,

故答案为: $\pm\sqrt{6}$.

【点评】本题主要考查平方根,一个正数有两个平方根,这两个平方根互为相反数,零的平方根是零,负数没有平方根.

4. (2021 秋•西湖区校级期中) 已知 $a^2=16$, $|-b|=3$, 解下列问题:

(1) 求 $a-b$ 的值;

(2) 若 $|a+b|=a+b$, 求 $a+b$ 的平方根.

【分析】(1) 根据平方根、绝对值的定义解决此题.

(2) 根据平方根、绝对值的非负性解决此题.

【解答】解: (1) $\because a^2=16$, $|-b|=3$,

$\therefore a=\pm 4$, $b=\pm 3$.

$\therefore$ 当 $a=4$, $b=3$, 则 $a-b=4-3=1$;

当 $a=4$, $b=-3$, 则 $a-b=4-(-3)=7$;

当 $a=-4$, $b=3$, 则 $a-b=-4-3=-7$;

当 $a=-4$, $b=-3$, 则 $a-b=-4-(-3)=-1$.

综上: $a-b=\pm 1$ 或 ± 7 .

(2) $\because |a+b|=a+b$,

$\therefore a+b\geq 0$.

$\therefore a+b=1$ 或 7 .

$\therefore$ 当 $a+b=1$ 时, $a+b$ 的平方根为 ± 1 ;

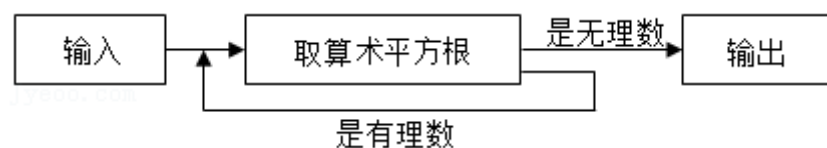
当 $a+b=7$ 时, $a+b$ 的平方根为 $\pm\sqrt{7}$.

综上: $a+b$ 的平方根为 ± 1 或 $\pm\sqrt{7}$.

【点评】本题主要考查平方根、绝对值,熟练掌握平方根、绝对值的定义是解决本题的关键.

二. 算术平方根 (共 6 小题)

5. (2021 秋•温州期末) 有一个数值转换器, 原理如下, 当输入的 x 为 81 时, 输出的 y 是 ()



A. $\sqrt{3}$

B. 9

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

【分析】直接利用算术平方根的定义分析得出答案.

【解答】解：由题意可得：81 的算术平方根是 9，9 的算术平方根是 3，
则 3 的算术平方根是 $\sqrt{3}$ ，故输出的 y 是 $\sqrt{3}$ 。

故选：A。

【点评】此题主要考查了算术平方根，正确掌握相关定义是解题关键。

6. (2021 秋•衢江区期末) 下列运算正确的是 ()

A. $\sqrt{16}=4$ B. $-|-2|=2$ C. $\sqrt{9}=\pm 3$ D. $2^3=6$

【分析】根据算术平方根、绝对值、有理数的乘方解决此题。

【解答】解：A. 根据算术平方根的定义， $\sqrt{16}=4$ ，那么 A 正确，故 A 符合题意。
B. 根据绝对值的定义， $-|-2|=-2$ ，那么 B 错误，故 B 不符合题意。
C. 根据算术平方根的定义， $\sqrt{9}=3$ ，那么 C 错误，故 C 不符合题意。
D. 根据有理数的乘方， $2^3=8$ ，那么 D 错误，故 D 不符合题意。

故选：A。

【点评】本题主要考查算术平方根、绝对值、有理数的乘方，熟练掌握算术平方根、绝对值、有理数的乘方是解决本题的关键。

7. (2021 秋•滨江区期末) 已知某数的一个平方根为 $\sqrt{6}$ ，则该数是 6，它的另一个平方根是 $-\sqrt{6}$ 。

【分析】根据平方根的平方等于被开方数，可得答案，根据一个正数的平方根互为相反数，可得答案。

【解答】解：某数的一个平方根是 $\sqrt{6}$ ，那么这个数是 6，它的另一个平方根是 $-\sqrt{6}$ ，
故答案为：6， $-\sqrt{6}$ 。

【点评】本题考查了平方根。解题的关键是掌握平方根的定义，注意一个正数的两个平方根互为相反数。

8. (2021 秋•义乌市期末) 一个自然数的算术平方根是 a ，则和这个自然数相邻的下一个自然数是 a^2+1 。

【分析】首先根据算术平方根的定义求出自然数，然后即可求出这个自然数相邻的下一个自然数。

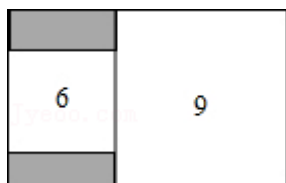
【解答】解： $\because$ 一个自然数的算术平方根为 a ，
 $\therefore$ 这个自然数是 a^2 。
 $\therefore$ 和这个自然数相邻的下一个自然数是 a^2+1 。
故答案为 a^2+1 。

【点评】此题主要考查了算术平方根的概念，同时要知道相邻的两个自然数相差为 1。

9. (2021 秋•江干区校级期中) 如图，长方形内两个相邻正方形的面积分别为 6 和 9。

(1) 小正方形的边长在哪两个连续的整数之间？并说明理由。

(2) 求阴影部分的面积.



【分析】(1) 根据算术平方根可得小正方形的边长, 估算 $\sqrt{6}$ 在 2 和 3 之间;

(2) 利用长 $\times$ 宽可得结论.

【解答】解: (1) $\because$ 小正方形的面积为 6,

$\therefore$ 小正方形的边长为 $\sqrt{6}$,

$\because 4 < 6 < 9$,

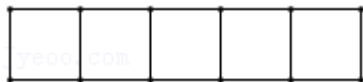
$\therefore 2 < \sqrt{6} < 3$,

$\therefore$ 小正方形的边长在 2 和 3 之间;

(2) 阴影部分的面积 $=\sqrt{6} \times (3 - \sqrt{6}) = 3\sqrt{6} - 6$.

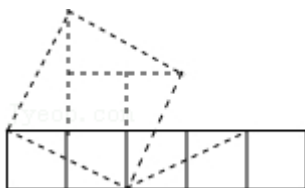
【点评】考查列代数式和算术平方根问题, 得到两个正方形的边长是解决本题的关键.

10. (2021 秋·西湖区期末) 如图, 每个小正方形的边长为 1, 可通过“剪一剪”, “拼一拼”, 将五个小正方形拼成一个面积一样的大正方形, 则这个大正方形的边长是 $\sqrt{5}$.



【分析】由图可知每个小正方形的边长为 1, 面积为 1, 得出拼成的小方形的面积为 5, 进一步开方得出拼成的正方形的边长为 $\sqrt{5}$.

【解答】解: 分割图形如下:



故这个正方形的边长是: $\sqrt{5}$.

故答案为: $\sqrt{5}$.

【点评】本题考查图形的剪拼和算术平方根, 熟知“如果一个正数 x 的平方等于 a , 即 $x^2 = a$, 那么这个正数 x 叫做 a 的算术平方根”是解答此题的关键.

三. 非负数的性质: 算术平方根 (共 4 小题)

11. (2021 秋·萧山区月考) 若 $\sqrt{2a+1} + (b-3)^2 = 0$, 则 $a^b =$ ()

A. $\frac{3}{2}$

B. $-\frac{1}{8}$

C. 8

D. $\frac{1}{8}$

【分析】根据非负数的性质列式分别求出 a 、 b ，根据有理数的乘方法则计算，得到答案.

【解答】解：由题意得， $2a+1=0$ ， $b-3=0$ ，

解得， $a=-\frac{1}{2}$ ， $b=3$ ，

则 $a^b=-\frac{1}{8}$ ，

故选：B.

【点评】本题考查的是非负数的性质、有理数的乘方，掌握算术平方根和偶次方的非负性是解题的关键.

12. (2021 秋•奉化区期中) 若 $(x-2017)^2+|2018+y|+\sqrt{2019-m}=0$ ，则 $(x+y)^m=-1$.

【分析】直接利用非负数的性质得出 x ， y ， m 的值，进而结合有理数的乘方得出答案.

【解答】解： $\because (x-2017)^2+|2018+y|+\sqrt{2019-m}=0$ ，

$\therefore x-2017=0$ ， $2018+y=0$ ， $2019-m=0$ ，

解得： $x=2017$ ， $y=-2018$ ， $m=2019$ ，

则 $(x+y)^m=(2017-2018)^{2019}$

$=-1$.

故答案为：-1.

【点评】此题主要考查了非负数的性质，正确得出 x ， y ， m 的值是解题关键.

13. (2021 秋•鄞州区校级月考) 已知 $\sqrt{a-2}+(b+3)^2+|c+1|=0$ ，则 $b^a-c=10$.

【分析】根据非负数的性质，即可求得 a ， b ， c 的值，进而求得 b^a-c 的值.

【解答】解：根据题意得： $a-2=0$ ， $b+3=0$ ， $c+1=0$ ，

解得 $a=2$ ， $b=-3$ ， $c=-1$.

则 $b^a-c=(-3)^2-(-1)=9+1=10$.

故答案是：10.

【点评】本题考查了非负数的性质. 解题的关键是掌握非负数的性质：有限个非负数的和为零，那么每一个加数也必为零.

14. (2020 秋•下城区期末) 若 $|a-2021|+\sqrt{b+2021}=2$ ，其中 a ， b 均为整数，则符合题意的有序数对 (a, b) 的组数是 5.

【分析】先根据绝对值和算术平方根的非负性得： $|a-2021|\geq 0$ ， $\sqrt{b+2021}\geq 0$ ，所以分情况进行计算即可.

【解答】解：∵ $|a-2021|+\sqrt{b+2021}=2$ ，其中 a, b 均为整数，

又∵ $|a-2021|\geq 0$ ， $\sqrt{b+2021}\geq 0$ ，

∴可分以下三种情况：

① $|a-2021|=0$ ， $\sqrt{b+2021}=2$ ，

解得： $a=2021$ ， $b=-2017$ ；

② $|a-2021|=1$ ， $\sqrt{b+2021}=1$ ，

解得： $a=2020$ 或 2022 ， $b=-2020$ ；

③ $|a-2021|=2$ ， $\sqrt{b+2021}=0$ ，

解得： $a=2023$ 或 2019 ， $b=-2021$ ；

∴符合题意的有序数对 (a, b) 的组数是 5.

故答案为：5.

【点评】本题考查了绝对值和算术平方根的非负性，解决此题的关键是分类讨论思想，得出 a, b 可能的取值.

四. 立方根（共 5 小题）

15.（2021 秋•义乌市期末）已知 $4a+7$ 的立方根是 3， $2a+2b+2$ 的算术平方根是 4.

（1）求 a, b 的值；

（2）求 $6a+3b$ 的平方根.

【分析】（1）运用立方根和算术平方根的定义求解.

（2）根据平方根，即可解答.

【解答】解：（1）∵ $4a+7$ 的立方根是 3， $2a+2b+2$ 的算术平方根是 4，

$$\therefore 4a+7=27, 2a+2b+2=16,$$

$$\therefore a=5, b=2;$$

（2）由（1）知 $a=5, b=2$ ，

$$\therefore 6a+3b=6\times 5+3\times 2=36,$$

$$\therefore 6a+3b \text{ 的平方根为 } \pm 6.$$

【点评】本题考查了平方根、算术平方根，解决本题的关键是熟记平方根、算术平方根的定义.

16.（2021 秋•上城区期末）若 $x^3=64$ ，则 x 的平方根为 ± 2 .

【分析】利用立方根的定义求出 x 的值，即可确定出 x 的平方根.

【解答】解：∵ $x^3=64$ ，

$$\therefore x=4,$$

则 4 的平方根为 ± 2 .

故答案为: ± 2

【点评】此题考查了立方根, 以及平方根, 熟练掌握各自的定义是解本题的关键.

17. (2021 秋•慈溪市期中) 已知 $|a|=5$, $b^2=4$, $c^3=-8$.

(1) 若 $a < b$, 求 $a+b$ 的值;

(2) 若 $abc > 0$, 求 $a-3b-2c$ 的值.

【分析】(1) 利用绝对值的定义求出 a 的值, 利用平方根的定义求出 b 的值, 利用立方根的定义求 c 的值, 代入即可求出 $a+b$ 的值;

(2) 根据 ab 小于 0, 得到 ab 异号, 求出 a 与 b 的值, 代入所求式子中计算即可求出值.

【解答】解: (1) $\because |a|=5$, $b^2=4$, $c^3=-8$.

$$\therefore a=\pm 5, b=\pm 2, c=-2,$$

$$\because a < b,$$

$$\therefore a=-5, b=\pm 2,$$

$$\therefore a+b=-5+2=-3 \text{ 或 } a+b=-5-2=-7,$$

即 $a+b$ 的值为 -3 或 -7 ;

(2) $\because abc > 0$, $c=-2$,

$$\therefore ab < 0,$$

$$\therefore a=5, b=-2 \text{ 或 } a=-5, b=2,$$

$$\therefore \text{当 } a=5, b=-2, c=-2 \text{ 时, } a-3b-2c=5-3\times(-2)-2\times(-2)=15,$$

$$\text{当 } a=-5, b=2, c=-2 \text{ 时, } a-3b-2c=-5-3\times 2-2\times(-2)=-7,$$

$$\therefore a-3b-2c=15 \text{ 或 } -7.$$

【点评】本题考查了代数式求值, 涉及的知识有: 绝对值及平方根、立方根的定义, 求出 a 与 b 的值是解本题的关键.

18. (2021 秋•义乌市期中) 如果 $\sqrt{15.62}=3.9522$, 则 $\sqrt{156200}=\underline{395.22}$; $\sqrt{x}=39.522$, 则 $x=\underline{1562}$;

如果 $\sqrt[3]{23.7}=2.872$, $\sqrt[3]{2.37}=1.3333$, 则 $\sqrt[3]{0.0237}=\underline{0.2872}$; $\sqrt[3]{x}=-1333.3$, 则 $x=\underline{-2370000000}$.

【分析】根据立方根和算术平方根的定义找出他们之间的规律即可得出答案.

【解答】解: 如果 $\sqrt{15.62}=3.9522$, 则 $\sqrt{156200}=395.22$, $\sqrt{x}=39.522$, 则 $x=1562$;

如果 $\sqrt[3]{23.7}=2.872$ ， $\sqrt[3]{2.37}=1.3333$ ，则 $\sqrt[3]{0.0237}=0.2872$ ； $\sqrt[3]{x}=-1333.3$ ，则 $x=-2370000000$ ；

故答案为：395.22，1562；0.2872，-2370000000.

【点评】此题考查了立方根和算术平方根，熟练掌握立方根和算术平方根的定义是解题的关键.

19. (2021 秋•青田县校级期中) 把一个长为 6cm ，宽为 4cm ，高为 9cm 的长方体铁块锻造成一个正方体铁块，求锻造后正方体铁块的棱长.

【分析】首先根据长方体的体积公式求出铁块的总体积，然后根据正方体的体积公式求出正方体铁块的棱长.

【解答】解：设正方体铁块的棱长为 a ，

根据题意，长方体铁块的体积为 $6 \times 4 \times 9 = 216$ ，

前后体积不变，故有 $a^3 = 216$ ，

解得 $a = 6$.

答：锻造后正方体铁块的棱长为 6cm .

【点评】本题主要考查了利用立方根的定义解决实际问题，解决本题的关键是理解熔化前后总体积不变，需注意立方体的棱长应是体积的三次方根.

五. 无理数 (共 1 小题)

20. (2022•乐清市开学) 给出四个实数 $\sqrt{6}$ ，3.14，0， $-\frac{1}{3}$ ，其中无理数是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. 3.14 C. 0 D. $-\frac{1}{3}$

【分析】根据无理数是无限不循环小数，可得答案.

【解答】解：在实数 $\sqrt{6}$ ，3.14，0， $-\frac{1}{3}$ 中，无理数是 $\sqrt{6}$.

故选：A.

【点评】此题主要考查了无理数的定义，注意带根号的要开不尽方才是无理数，无限不循环小数为无理数. 如 π ， $\sqrt{6}$ ，0.8080080008... (每两个 8 之间依次多 1 个 0) 等形式.

六. 实数 (共 2 小题)

21. (2020 秋•下城区期末) 若 a, b 均为整数，且 $b \neq 0$ ，则 $\frac{a}{b}$ 不可能是 ()

- A. 正数 B. 负数 C. 无理数 D. 实数

【分析】根据实数的概念判断即可得到答案.

【解答】解： $\because a, b$ 均为整数，且 $b \neq 0$ ，

$\therefore \frac{a}{b}$ 是一个分数，即为有理数，

∴不可能是无理数，

故选：C.

【点评】此题考查的是实数的概念，掌握其概念是解决此题关键.

22. (2021 秋•鄞州区校级月考) 把下列各数的序号填在相应的大括号内：

① -0.3 ； ② -7 ； ③ $\sqrt{5}$ ； ④ $-\pi$ ； ⑤ $|-2|$ ； ⑥ $\sqrt{16}$ ； ⑦ $3.1010010001\cdots$ (每两个 1 之间多一个 0)； ⑧ $-\frac{22}{7}$.

正整数{ ⑤⑥ }；

分数{ ①⑧ }；

负有理数{ ①②⑧ }；

无理数{ ③④⑦ }.

【分析】根据实数的分类即可求出答案.

【解答】解：① -0.3 ； ② -7 ； ③ $\sqrt{5}$ ； ④ $-\pi$ ； ⑤ $|-2|$ ； ⑥ $\sqrt{16}$ ； ⑦ $3.1010010001\cdots$ (每两个 1 之间多一个 0)； ⑧ $-\frac{22}{7}$.

正整数{ ⑤⑥ }；

分数{ ①⑧ }；

负有理数{ ①②⑧ }；

无理数{ ③④⑦ }.

故答案为：⑤⑥；①⑧；①②⑧；③④⑦.

【点评】此题主要考查了实数的分类和性质，解题的关键是正确理解实数的分类，本题属于基础题型.

七. 实数的性质 (共 4 小题)

23. (2021 秋•温州期中) 若有一个实数为 $3-\sqrt{5}$ ，则它的相反数为 ()

A. $3+\sqrt{5}$ B. $-\sqrt{5}+3$ C. $\sqrt{5}-3$ D. $-3-\sqrt{5}$

【分析】根据相反数的定义化简即可得出答案.

【解答】解： $-(3-\sqrt{5}) = -3+\sqrt{5} = \sqrt{5}-3$,

故选：C.

【点评】本题考查了实数的相反数，掌握一个数 a 的相反数是 $-a$ 是解题的关键.

24. (2021 秋•柯城区校级期中) $\sqrt{7}$ 的相反数是 $-\sqrt{7}$.

【分析】直接根据相反数的定义进行解答即可.

【解答】解：∵ $\sqrt{7}$ 与 $-\sqrt{7}$ 是只有符号不同的两个数，

$\therefore \sqrt{7}$ 的相反数是 $-\sqrt{7}$.

故答案为: $-\sqrt{7}$.

【点评】本题考查的是实数的性质, 即只有符号不同的两个数叫互为相反数.

25. (2021 秋·奉化区期中) 在电视台一档互动节目中, 主持人问这样一道题目: “ a 是最小的正整数, b 是最大的负整数, c 是绝对值最小的实数, d 是倒数是它本身的数,” 请问: $a - b + c + d =$ 3 或 1.

【分析】根据题意写出 a, b, c, d 的值, 然后分两种情况分别计算即可.

【解答】解: $\because a$ 是最小的正整数, b 是最大的负整数, c 是绝对值最小的实数, d 是倒数是它本身的数,

$$\therefore a=1, b=-1, c=0, d=\pm 1,$$

$$\therefore \text{当 } d=1 \text{ 时, } a - b + c + d = 1 + 1 + 0 + 1 = 3;$$

$$\text{当 } d=-1 \text{ 时, } a - b + c + d = 1 + 1 + 0 - 1 = 1;$$

故答案为: 3 或 1.

【点评】本题考查了实数, 绝对值, 倒数, 体现了分类讨论的数学思想, 解题的关键是掌握乘积为 1 的两个数互为倒数, 0 没有倒数.

26. (2021 秋·奉化区期中) 已知 a, b 互为相反数, c, d 互为倒数, $|m|=2$, 且 $m < 0$;

(1) 求 $2a - (cd)^{2018} + 2b - 3m$ 的值.

(2) 若 $\sqrt[3]{a}=m, c=\sqrt{4}$, 求 $b - 4d + m$ 的值.

【分析】(1) 根据 a, b 互为相反数, c, d 互为倒数, $|m|=2$, 先确定 $a+b, cd$ 及 m 的值, 再求代数式的值即可;

(2) 根据 $\sqrt[3]{a}=m, c=\sqrt{4}$ 可求出 a, b, c, d 的值, 然后代入所求的代数式即可.

【解答】(1) 解: $\because a, b$ 互为相反数,

$$\therefore a+b=0,$$

$\because c, d$ 互为倒数,

$$\therefore cd=1,$$

$$\because |m|=2 \text{ 且 } m < 0,$$

$$\therefore m=-2,$$

$$\therefore 2a - (cd)^{2018} + 2b - 3m$$

$$= 2(a+b) - (cd)^{2018} - 3m$$

$$= -1 + 6$$

$$= 5;$$

$$(2) \because \sqrt[3]{a} = m,$$

$$\therefore a = m^3 = -8,$$

$$\therefore b = 8,$$

$$\because c = \sqrt{4} = 2,$$

$$\therefore d = \frac{1}{2},$$

$$\therefore b - 4d + m$$

$$= 8 - 4 \times \frac{1}{2} + (-2)$$

$$= 8 - 2 - 2$$

$$= 4.$$

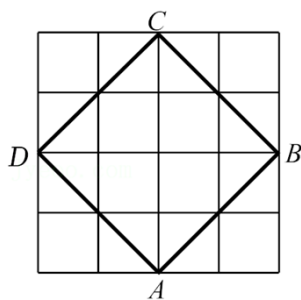
【点评】 本题考查了有理数的运算，掌握“互为相反数的两数和为0”、“互为倒数的两数积为1”是解决本题的关键。

八. 实数与数轴（共6小题）

27. （2020秋•滨江区期末）如图，顺次连结 4×4 方格四条边的中点，得到一个正方形 $ABCD$ 。设每一个小方格的边长为1个单位。

（1）正方形 $ABCD$ 的边长介于哪两个相邻的整数之间，请说明理由。

（2）如果把正方形 $ABCD$ 放到数轴上，使得边 AB 与数轴重合，且点 A 与数轴的原点重合，数轴的单位长度就是小方格的边长。请写出点 B 在数轴上所表示的数。



【分析】（1）利用大正方形的面积减去四个直角三角形的面积，求出正方形 $ABCD$ 的面积，然后再求出边长即可；

（2）点 B 在数轴上的位置有两种情况，点 B 在原点左侧，点 B 在原点右侧。

【解答】解：（1）正方形 $ABCD$ 的边长介于两个相邻的整数2和3之间，

理由是： $\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积 $= 4 \times 4 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 8$,

$$\therefore AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\because 2^2 = 4, 3^2 = 9,$$

$$\therefore 4 < 8 < 9,$$

$$\therefore \sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9},$$

$$\therefore 2 < 2\sqrt{2} < 3,$$

正方形 $ABCD$ 的边长介于两个相邻的整数 2 和 3 之间；

(2) 分两种情况：

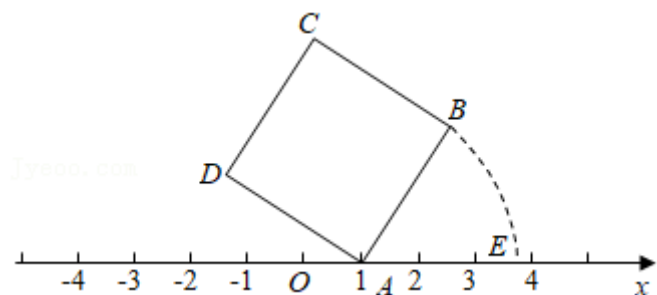
当点 B 在原点左侧，点 B 在数轴上所表示的数是： $-2\sqrt{2}$ ，

当点 B 在原点右侧，点 B 在数轴上所表示的数是： $2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 点 B 在数轴上所表示的数是： $\pm 2\sqrt{2}$ 。

【点评】 本题考查了实数与数轴，熟练掌握平方数是解题的关键。

28. (2021 秋•海曙区期末) 如图，面积为 5 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 在数轴上，且表示的数为 1，若点 E 在数轴上，(点 E 在点 A 的右侧) 且 $AB=AE$ ，则 E 点所表示的数为 ()



- A. $\sqrt{5}$ B. $1+\sqrt{5}$ C. $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}+2$

【分析】 根据正方形的边长是面积的算术平方根得 $AD=AE=\sqrt{5}$ ，结合 A 点所表示的数及 AE 间距离可得点 E 所表示的数。

【解答】 解： $\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 5，且 $AD=AE$ ，

$$\therefore AD=AE=\sqrt{5},$$

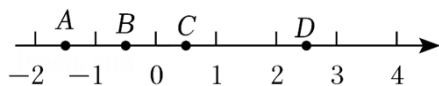
$\because$ 点 A 表示的数是 1，且点 E 在点 A 右侧，

$\therefore$ 点 E 表示的数为 $1+\sqrt{5}$ 。

故选：B。

【点评】 本题主要考查实数与数轴及两点间距离，根据两点间距离及点的位置判断出点所表示的数是关键。

29. (2021 秋•越城区期末) 如图，实数 $\sqrt{2}-1$ 在数轴上的对应点可能是 ()



- A. A 点 B. B 点 C. C 点 D. D 点

【分析】先确定 $\sqrt{2}$ 的范围，再推出 $\sqrt{2}-1$ 的范围，从而得解.

【解答】解： $\because 1 < \sqrt{2} < 2$,

$$\therefore 0 < \sqrt{2} - 1 < 1,$$

$\therefore \sqrt{2} - 1$ 在数轴上的对应点可能是 C .

故选： C .

【点评】此题考查了实数与数轴，估算出 $\sqrt{2}$ 的大小是解本题的关键.

30. (2021 秋•诸暨市期末) 定义：有 A 、 B 两只电子跳蚤在同一条数轴上跳动，它们在数轴上对应的实数分别为 a 、 b . 若实数 a 、 b 满足 $b=3a+2$ 时，则称 A 、 B 处于“和谐位置”， A 、 B 之间的距离为“和谐距离”.

(1) 当 A 在原点位置，且 A 、 B 处于“和谐位置”时，“和谐距离”为 2.

(2) 当 A 、 B 之间的“和谐距离”为 2022 时，求 a 、 b 的值.

【分析】(1) 将 $a=0$ 代入 $b=3a+2$ 中得到 $b=2$ ，所以和谐距离为 2；

(2) 根据 A 、 B 的和谐距离为 2022 列出方程即可求解.

【解答】解：(1) 将 $a=0$ 代入 $b=3a+2$ 中得到 $b=2$ ，

所以和谐距离为 2；

故答案为：2；

(2) $\because A$ 、 B 处于和谐位置，

$$\therefore b=3a+2,$$

$$\therefore |AB| = |b - a| = |2a+2| = 2022,$$

$$\therefore 2a+2 = \pm 2022,$$

$$\therefore a=1010, b=3032 \text{ 或 } a=-1012, b=-3034.$$

【点评】本题考查了实数与数轴，新定义，体现了方程思想，根据 A 、 B 的和谐距离为 2022 列出方程是解题的关键.

31. (2021 秋•乐清市校级月考) 设 a 、 b 在数轴上表示的实数到原点的距离相等，且位于原点的两侧， c 、 d 互为倒数， e 的绝对值为 3，请求出下列代数式的值： $5a+5b - \frac{cd}{3} + e$.

【分析】根据题意得： $a+b=0$ ， $cd=1$ ， $e=3$ 或 $e=-3$ ，然后分两种情况分别代入代数式求值即可.

【解答】解： $\because a$ 、 b 在数轴上表示的实数到原点的距离相等，且位于原点的两侧，

$$\therefore a+b=0,$$

$\because c$ 、 d 互为倒数，

$$\therefore cd=1,$$

$\because e$ 的绝对值为 3,

$$\therefore e=3 \text{ 或 } e=-3,$$

$$\text{当 } e=3 \text{ 时, 原式} = 5(a+b) - \frac{cd}{3} + e = 0 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3};$$

$$\text{当 } e=-3 \text{ 时, 原式} = 5(a+b) - \frac{cd}{3} + e = 0 - \frac{1}{3} - 3 = -\frac{10}{3}.$$

综上所述, 代数式的值为 $\frac{8}{3}$ 或 $-\frac{10}{3}$.

【点评】 本题考查了实数与数轴, 绝对值, 倒数, 实数的性质, 体现了分类讨论的思想, 掌握绝对值等于一个正数的数有 2 个是解题的关键, 不要漏解.

32. (2021 秋·北仑区期末) 数轴是一个非常重要的数学工具, 它使实数和数轴上的点建立起一一对应关系, 揭示了数与点之间的内在联系, 它是“数形结合”的基础.

【阅读理解】

$|3-1|$ 表示 3 与 1 的差的绝对值, 也可理解为 3 与 1 两数在数轴上所对应的两点之间的距离; 同理 $|x-1|$ 可以理解为 x 与 1 两数在数轴上所对应的两点之间的距离, $|x+1|=|x-(-1)|$ 就表示 x 在数轴上对应的点到 -1 的距离.

(1) **【尝试应用】**

① 数轴上表示 -4 和 2 的两点之间的距离是 6 (写出最后结果);

② 若 $|x-(-2)|=3$, 则 $x=\underline{1 \text{ 或 } -5}$;

(2) **【动手探究】** 小明在草稿纸上画了一条数轴, 并折叠纸面, 若表示 2 的点与表示 -4 的点重合.

① 则表示 10 的点与表示 -12 的点重合;

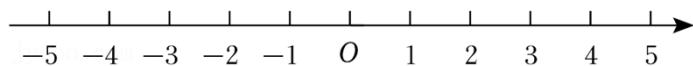
② 这时如果 A, B (A 在 B 的左侧) 两点之间的距离为 2022, 且 A, B 两点经过折叠后重合, 则 A 表示的数是 -1012, B 表示的数是 1010;

③ 若点 A 表示的数为 a , 点 B 表示的数为 b (A 在 B 的左侧), 且 A, B 两点经折叠后刚好重合, 那么 a 与 b 之间的数量关系是 $a+b=-2$;

(3) **【拓展延伸】**

① 当 $x=\underline{1}$ 时, $|x+2|+|x-1|+|x-3|$ 有最小值, 最小值是 5;

② $|x+1|-|x-4|$ 有最大值, 最大值是 5, $|x+1|-|x-4|$ 有最小值, 最小值是 -5.



【分析】 (1) ① 根据两点间距离公式可得答案; ② 根据绝对值的定义可以解答;

(2) ①首先求出折叠点是 -1, 列式为 $-1 - (10+1)$ 可得答案; ②根据折叠点为 -1 可列式解答; ③由题意得, $\frac{1}{2}(a+b) = -1$, 整理可得答案;

(3) 根据绝对值的定义和分类讨论的数学思想可以解答本题.

【解答】解: (1) ① -4 和 2 的两点之间的距离是: $2 - (-4) = 6$,

故答案为: 6;

② $\because |x - (-2)| = 3$,

$\therefore x = 1$ 或 -5 ,

故答案为: 1 或 -5 ;

(2) $\because$ 表示 2 的点与表示 -4 的点重合,

$\therefore$ 折叠点是 -1,

① $-1 - (10+1) = -12$,

故答案为: -12 ;

② $2022 \div 2 = 1011$, $-1 - 1011 = -1012$, $-1 + 1011 = 1010$,

$\therefore$ 则 A 表示的数是 -1012 , B 表示的数是 1010,

故答案为: -1012 , 1010;

③由题意得, $\frac{1}{2}(a+b) = -1$,

$\therefore a+b = -2$,

故答案为: $a+b = -2$;

(3) ①当 $x \leq -2$ 时, $|x+2| + |x-1| + |x-3| = -x-2 - x+1 - x+3 = -3x+2 \geq 8$,

当 $-2 < x \leq 1$ 时, $|x+2| + |x-1| + |x-3| = x+2 - x+1 - x+3 = -x+6$, $5 \leq -x+6 < 8$,

当 $1 < x \leq 3$ 时, $|x+2| + |x-1| + |x-3| = x+2+x-1 - x+3 = x+4$, $5 < x+4 \leq 7$,

当 $x > 3$ 时, $|x+2| + |x-1| + |x-3| = x+2+x-1+x-3 = 3x-2 > 7$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, 最小值是 5,

故答案为: 1, 5;

②当 $x < -1$ 时, $|x+1| - |x-4| = -x-1+x-4 = -5$,

当 $-1 \leq x \leq 4$ 时, $|x+1| - |x-4| = x+1+x-4 = 2x-3$, $-5 \leq 2x-3 \leq 5$,

当 $x > 4$ 时, $|x+1| - |x-4| = x+1-x+4 = 5$,

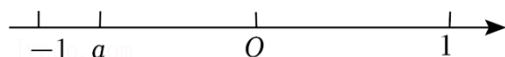
$\therefore$ 最大值是 5, 最小值是 -5 ,

故答案为: 5, -5 .

【点评】本题考查数轴、绝对值、两点的距离，解答本题的关键是明确绝对值的定义，利用绝对值的知识和分类讨论的数学思想解答．

九．实数大小比较（共4小题）

33.（2021秋•普陀区期末）实数 a 在数轴上的位置如图所示，则 $-\frac{1}{a}$ ， 1 ， 0 的大小顺序是（　　）



A. $-\frac{1}{a} < 0 < 1$

B. $0 < -\frac{1}{a} < 1$

C. $0 < 1 < -\frac{1}{a}$

D. $0 < 1$ 且 1 和 $-\frac{1}{a}$ 的大小无法确定

【分析】根据数轴上 a 所在的位置可用取特殊值的方法比较个数的大小．

【解答】解：∵ $-1 < a < 0$ ，

∴ 令 $a = -\frac{3}{4}$ ，

则 $-\frac{1}{a} = \frac{4}{3}$ ；

∴ $0 < 1 < \frac{4}{3}$ ，

∴ $0 < 1 < -\frac{1}{a}$ ．

故选：C．

【点评】此题主要考查了实数与数轴之间对应关系及实数的大小的比较，当给出的未知字母的值在一个确定的范围内时，可用取特殊值的方法进行比较，以简化计算．

34.（2021秋•青田县期末）若 $|x-y| - |x-z| = |y-z|$ ，则实数 x 、 y 、 z 之间的大小关系可能为（　　）

A. $x > y > z$

B. $z > y > x$

C. $y > x > z$

D. $x > z > y$

【分析】根据各选项中 x 、 y 、 z 的大小关系分别计算已知等式的左边和右边，看是否相等即可判断．

【解答】解：A、当 $x > y > z$ 时， $|x-y| - |x-z| = x-y - (x-z) = z-y$ ， $|y-z| = y-z$ ，已知等式不成立，不符合题意；

B、当 $z > y > x$ 时， $|x-y| - |x-z| = y-x - (z-x) = y-z$ ， $|y-z| = z-y$ ，已知等式不成立，不符合题意；

C、当 $y > x > z$ 时， $|x-y| - |x-z| = y-x - (x-z) = y+z-2x$ ， $|y-z| = y-z$ ，已知等式不成立，不符合题意；

D、当 $x > z > y$ 时， $|x-y| - |x-z| = x-y - (x-z) = z-y$ ， $|y-z| = z-y$ ，已知等式成立，符合题意；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/085030204214012014>