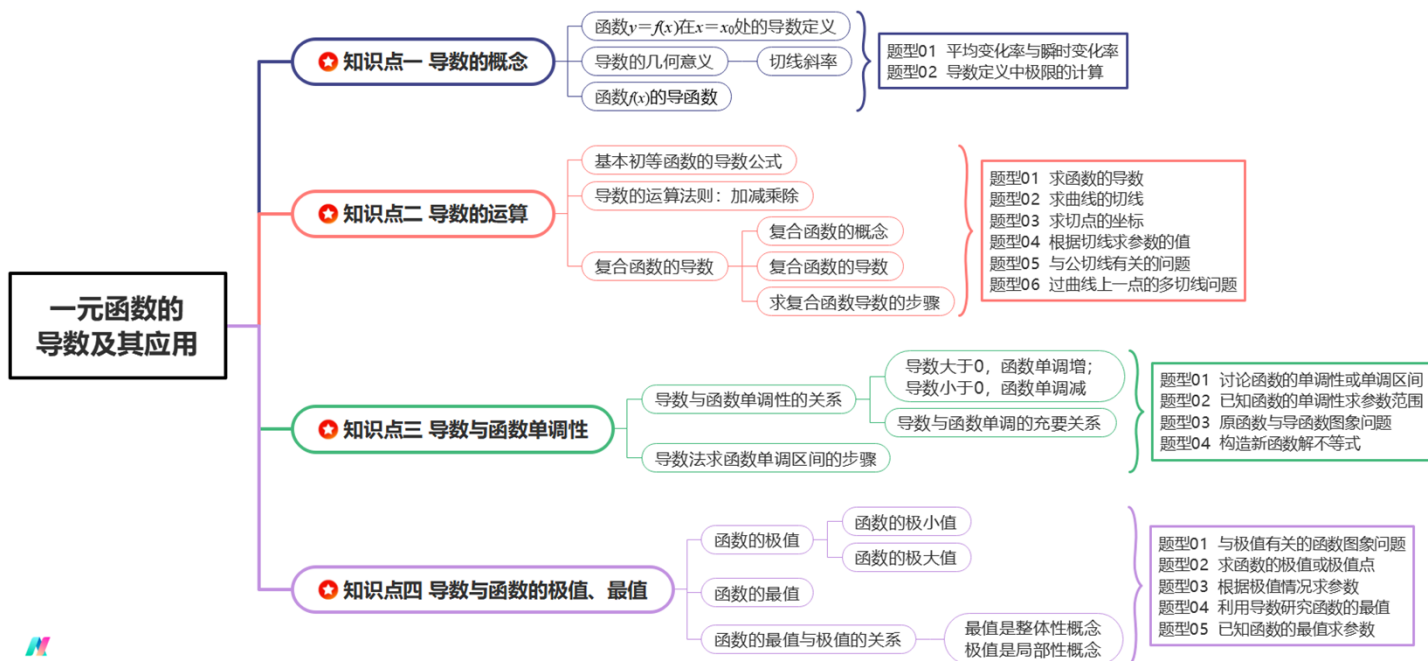


## 专题 05 一元函数的导数及其应用

(思维构建+知识盘点+重点突破+方法技巧)

### 思维构建 · 理清脉络



### 知识盘点 · 查漏补缺

#### 知识点 1 导数的概念

1、函数  $y=f(x)$  在  $x=x_0$  处的导数定义

一般地, 称函数  $y=f(x)$  在  $x=x_0$  处的瞬时变化率  $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  为函数  $y=f(x)$  在  $x=x_0$  处

的导数, 记作  $f'(x_0)$  或  $y'|_{x=x_0}$ , 即  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .

2、导数的几何意义

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  的几何意义是在曲线  $y=f(x)$  上点  $P(x_0, y_0)$  处的切线的斜率(瞬时速度就是位移函数  $s(t)$  对时间  $t$  的导数). 相应地, 切线方程为  $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ .

3、函数  $f(x)$  的导函数: 称函数  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  为  $f(x)$  的导函数.

#### 知识点 2 导数的运算

1、基本初等函数的导数公式

原函数	导函数
-----	-----

$f(x)=c(c \text{ 为常数})$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^n(n \in \mathbf{Q}^*)$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=a^x(a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$	$f'(x)=a^x \ln a$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\log_a x(x>0, a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$	$f'(x)=\frac{1}{x \ln a}$
$f(x)=\ln x(x>0)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$

## 2、导数的运算法则

$$(1)[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

$$(2)[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$(3)\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} (g(x) \neq 0).$$

## 3、复合函数的导数

(1) 复合函数的概念：一般地，对于两个函数  $y = f(u)$  和  $u = g(x)$ ，如果通过中间变量  $u$ ， $y$  可以表示成  $x$  的函数，那么称这个函数为  $y = f(u)$  和  $u = g(x)$  的复合函数，记作  $y = f(g(x))$ 。

(2) 复合函数的求导法则：一般地，复合函数  $y = f(g(x))$  的导数和函数  $y = f(u)$ ， $u = g(x)$  的导数间的关系为  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ ，即  $y$  对  $x$  的导数等于  $y$  对  $u$  的导数与  $u$  对  $x$  的导数的乘积。

规律：从内到外层层求导，乘法连接。

### (3) 求复合函数导数的步骤

第一步分层：选择中间变量，写出构成它的内、外层函数；

第二步分别求导：分别求各层函数对相应变量的导数；

第三步相乘：把上述求导的结果相乘；

第四步变量回代：把中间变量代回。

## 知识点 3 导数与函数的单调性

### 1、导数与函数的单调性的关系

在某个区间  $(a, b)$  内，如果  $f'(x) \geq 0$ ，那么函数  $y = f(x)$  在这个区间内单调递增；

如果  $f'(x) \leq 0$ ，那么函数  $y = f(x)$  在这个区间内单调递减。

#### 【注意】

(1) 在某区间内  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) 是函数  $f(x)$  在此区间上为增 (减) 函数的充分不必要条件；

(2) 可导函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是增(减)函数的充要条件是对  $\forall x \in (a, b)$ , 都有  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) 且  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上的任何子区间内都不恒为零.

## 2、导数法求函数单调区间的步骤

- (1) 确定函数  $f(x)$  的定义域;
- (2) 求  $f'(x)$  (通分合并、因式分解);
- (3) 解不等式  $f'(x) > 0$ , 解集在定义域内的部分为单调递增区间;
- (4) 解不等式  $f'(x) < 0$ , 解集在定义域内的部分为单调递减区间.

## 知识点 4 导数与函数的极值、最值

### 1、函数的极值

(1) 函数的极小值: 函数  $y=f(x)$  在点  $x=a$  的函数值  $f(a)$  比它在点  $x=a$  附近其他点的函数值都小,  $f'(a)=0$ ; 而且在点  $x=a$  附近的左侧  $f'(x) < 0$ , 右侧  $f'(x) > 0$ , 则点  $a$  叫做函数  $y=f(x)$  的极小值点,  $f(a)$  叫做函数  $y=f(x)$  的极小值.

(2) 函数的极大值: 函数  $y=f(x)$  在点  $x=b$  的函数值  $f(b)$  比它在点  $x=b$  附近其他点的函数值都大,  $f'(b)=0$ ; 而且在点  $x=b$  附近的左侧  $f'(x) > 0$ , 右侧  $f'(x) < 0$ , 则点  $b$  叫做函数  $y=f(x)$  的极大值点,  $f(b)$  叫做函数  $y=f(x)$  的极大值.

### 2、函数的最值

- (1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续的函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有最大值与最小值.
- (2) 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 则  $f(a)$  为函数的最小值,  $f(b)$  为函数的最大值; 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递减, 则  $f(a)$  为函数的最大值,  $f(b)$  为函数的最小值.

### 3、函数极值与最值的关系

- (1) 函数的最大值和最小值是比较整个定义域区间上的函数值得到的, 是一个整体的概念, 与函数的极大(小)值不同, 函数的最大(小)值若有, 则只有一个.
- (2) 开区间内的可导函数, 若有唯一的极值, 则这个极值是函数的最值.



## 重难点 01 根据切线情况求参数

已知  $f(x)$ , 过点  $(a, b)$ , 可作曲线的  $n$  ( $n=1, 2, 3$ ) 条切线问题

第一步: 设切点  $P_0(x_0, y_0)$

第二步: 计算切线斜率  $k = f'(x_0)$ ;

第三步：计算切线方程.根据直线的点斜式方程得到切线方程： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ .

第四步：将 $(a, b)$ 代入切线方程，得： $b - y_0 = f'(x_0)(a - x_0)$ ，整理成关于 $x_0$ 得分方程：

第五步：题意已知能作几条切线，关于 $x_0$ 的方程就有几个实数解；

**【典例 1】** (23-24 高三上·广东·月考) 若曲线  $y = x^3 + ax$  在点  $(1, a+1)$  处的切线方程为  $y = 7x + m$ ，则  $m =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】** -2

**【解析】**  $y' = 3x^2 + a$ , 依题意得  $3 + a = 7$ ，即  $a = 4$ ，

又因为  $a + 1 = 7 + m$ ，所以  $m = -2$ .

**【典例 2】** (22-23 高三下·湖南长沙·月考) 设直线  $x + y + 1 = 0$  是曲线  $y = a - \ln x$  的一条切线，则  $a =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】** -2

**【解析】** 设切点为  $(x_0, y_0)$ ，

$$y' = -\frac{1}{x}, \text{ 则 } y'|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0} = -1, \text{ 所以 } x_0 = 1, \text{ 所以切点为 } (1, a),$$

又切线为  $x + y + 1 = 0$ ，所以  $1 + a + 1 = 0$ ，解得  $a = -2$ .

**【典例 3】** (23-24 高三上·广西南宁·月考) 已知曲线  $y = \ln x + 2$  与  $y = \ln(x + a)$  的公切线为  $y = kx + 1 - \ln 2$ ，则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】** 1

**【解析】** 由函数  $y = \ln x + 2$ ，可得  $y' = \frac{1}{x}$ ，

设切点坐标为  $(t, \ln t + 2)$ ，可得  $y'|_{x=t} = \frac{1}{t}$ ，则切线方程为  $y - (\ln t + 2) = \frac{1}{t}(x - t)$ ，

即  $y = \frac{1}{t}x + \ln t + 1$ ，与公切线  $y = kx + 1 - \ln 2$  重合，可得  $\ln t + 1 = 1 - \ln 2$ ，

可得  $t = \frac{1}{2}$ ，所以切线方程为  $y = 2x + 1 - \ln 2$ ，

对于函数  $y = \ln(x + a)$ ，可得  $y' = \frac{1}{x + a}$ ，设切点为  $(m, \ln(m + a))$ ，则  $y'|_{x=m} = \frac{1}{m + a}$

$$\text{则 } \begin{cases} \ln(m + a) = 2m + 1 - \ln 2 \\ \frac{1}{m + a} = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } m = -\frac{1}{2}, a = 1.$$

**重难点 02 含参函数单调性讨论依据**

- (1) 导函数有无零点讨论（或零点有无意义）；
- (2) 导函数的零点在不在定义域或区间内；
- (3) 导函数多个零点时大小的讨论。

**【典例 1】**（23-24 高三下·江西·月考）已知函数  $f(x) = x^3 - ax^2 + x (a \in \mathbf{R})$ .

- (1) 若  $a = 1$ ，求曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线方程；
- (2) 若  $a > \sqrt{3}$ ，讨论  $f(x)$  的单调性。

**【答案】** (1)  $2x - y - 1 = 0$ ；(2) 增区间为  $\left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}\right), \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}, +\infty\right)$ ，减区间为  $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}\right)$

**【解析】** (1) 当  $a = 1$  时， $f(x) = x^3 - x^2 + x$ ，所以  $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ，

当  $x = 1$  时， $f'(1) = 3 - 2 + 1 = 2$ ，又  $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$ ，

所以曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线方程为  $y - 1 = 2(x - 1)$ ，即  $2x - y - 1 = 0$ 。

(2) 因为  $f(x) = x^3 - ax^2 + x$ ，所以  $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 1$ ，

令  $f'(x) = 0$ ，得到  $3x^2 - 2ax + 1 = 0$ ，

因为  $\Delta = 4a^2 - 12$ ，又  $a > \sqrt{3}$ ，所以  $\Delta = 4a^2 - 12 > 0$ ，即  $3x^2 - 2ax + 1 = 0$  有两根，

由求根公式知两根为  $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ ， $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ ，且  $x_1 < x_2$ ，

所以，当  $x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}$  或  $x > \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}$  时， $f'(x) > 0$ ，

当  $\frac{a - \sqrt{a^2 - 3}}{3} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ ， $f'(x) < 0$ ，

故  $f(x)$  的增区间为  $\left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}\right), \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}, +\infty\right)$ ，减区间为  $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}\right)$ 。

**【典例 2】**（2024·海南·模拟预测）已知函数  $f(x) = ax(\ln x - 1), a \in \mathbf{R}$ 。

- (1) 当  $a = 1$  时，求曲线  $y = f(x)$  在点  $(e, f(e))$  处的切线方程；
- (2) 若函数  $g(x) = f'(x) - 2x + 3$  ( $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数)，讨论  $g(x)$  的单调性。

**【答案】** (1)  $y = x - e$ ；(2) 答案见解析。

**【解析】** (1) 当  $a = 1$  时， $f(x) = x \ln x - x$ ，求导得  $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ ，

则  $f'(e) = \ln e = 1, f(e) = e \times (\ln e - 1) = 0$ ,

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(e, f(e))$  处的切线方程为  $y - 0 = 1 \times (x - e)$ , 即  $y = x - e$ .

(2) 函数  $f(x) = ax(\ln x - 1)$ , 求导得  $f'(x) = a(\ln x - 1) + ax \cdot \frac{1}{x} = a \ln x$ ,

则  $g(x) = a \ln x - 2x + 3$ , 其定义域为  $(0, +\infty)$ , 求导得  $g'(x) = \frac{a}{x} - 2 = \frac{a - 2x}{x}$ ,

①若  $a \leq 0$ , 则  $g'(x) < 0$ , 函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减;

②若  $a > 0$ , 则当  $x \in (0, \frac{a}{2})$  时,  $g'(x) > 0$ , 函数  $g(x)$  在  $(0, \frac{a}{2})$  上单调递增,

当  $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0$ , 函数  $g(x)$  在  $(\frac{a}{2}, +\infty)$  上单调递减,

所以当  $a \leq 0$  时,  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减;

当  $a > 0$  时,  $g(x)$  在  $(0, \frac{a}{2})$  上单调递增, 在  $(\frac{a}{2}, +\infty)$  上单调递减.

### 重难点 03 构造函数法解决函数问题中的常见类型

关系式为“加”型构造:

$$(1) f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ 构造 } [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(2) xf'(x) + f(x) \geq 0 \text{ 构造 } [xf(x)]' = xf'(x) + f(x)$$

$$(3) f'(x) + f(x) \geq 0 \text{ 构造 } [e^x f(x)]' = e^x [f'(x) + f(x)]$$

$$(4) xf'(x) + nf(x) \geq 0 \text{ 构造 } [x^n f(x)]' = x^n f'(x) + nx^{n-1} f(x) = x^{n-1} [xf'(x) + nf(x)] \text{ (注意 } x \text{ 的符号)}$$

$$(5) f'(x) + \lambda f(x) \text{ 构造 } [f(x)e^{\lambda x}]' = f'(x)e^{\lambda x} + \lambda f(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda x} [f'(x) + \lambda f(x)]$$

关系式为“减”型构造:

$$(6) f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \text{ 构造 } \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$(7) xf'(x) - f(x) \geq 0 \text{ 构造 } \left[ \frac{f(x)}{x} \right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$(8) f'(x) - f(x) \geq 0 \text{ 构造 } \left[ \frac{f(x)}{e^x} \right]' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$$

$$(9) xf'(x) - nf(x) \geq 0 \text{ 构造 } \left[ \frac{f(x)}{x^n} \right]' = \frac{x^n f'(x) - nx^{n-1} f(x)}{(x^n)^2} = \frac{xf'(x) - nf(x)}{x^{n+1}} \text{ (注意 } x \text{ 的符号)}$$

$$(10) f'(x) - \lambda f(x) \text{ 构造 } \left[ \frac{f(x)}{e^{\lambda x}} \right]' = \frac{f'(x)e^{\lambda x} - \lambda f(x)e^{\lambda x}}{[e^{\lambda x}]^2} = \frac{f'(x) - \lambda f(x)}{e^{\lambda x}}$$

**【典例 1】** (2024·山东聊城·三模) 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 导数为  $f'(x)$ , 若当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) > 2x - 1$ , 且对于任意的实数  $x, f(-x) = f(x) + 2x$ , 则不等式  $f(2x-1) - f(x) < 3x^2 - 5x + 2$  的解集为 ( )

- A.  $(-\infty, 1)$       B.  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$       C.  $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$       D.  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

**【答案】** B

**【解析】** 因为  $f(-x) = f(x) + 2x$ ,

$$\text{设 } g(x) = f(x) - x^2 + x,$$

$$\text{则 } g(-x) = f(-x) - x^2 - x = f(x) + 2x - x^2 - x = g(x), \text{ 即 } g(x) \text{ 为 } \mathbf{R} \text{ 上的偶函数,}$$

$$\text{又当 } x \geq 0 \text{ 时, } f'(x) > 2x - 1,$$

$$\text{则 } g'(x) = f'(x) - 2x + 1 > 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 在 } (-\infty, 0) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{因为 } f(2x-1) - f(x) < 3x^2 - 5x + 2,$$

$$\text{所以 } f(2x-1) - (2x-1)^2 + (2x-1) < f(x) - x^2 + x,$$

$$\text{即 } g(2x-1) < g(x), \text{ 所以 } |2x-1| < |x|, \text{ 即 } (2x-1)^2 < x^2, \text{ 解得 } \frac{1}{3} < x < 1. \text{ 故选: B}$$

**【典例 2】** (23-24 高三上·河北·月考) 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域均为  $(0, +\infty)$ , 且  $xf'(x) > (x-1)f(x)$  恒成立,  $f(3) = e$ , 则不等式  $(x+4)f(x+4) < 3e^{x+2}$  的解集为 ( )

- A.  $(-4, -1)$       B.  $(-1, 1)$       C.  $(-1, 2)$       D.  $(-1, +\infty)$

**【答案】** A

**【解析】** 由  $xf'(x) > (x-1)f(x)$ , 有  $xf'(x) + f(x) - xf(x) > 0$ ,

$$\text{令 } g(x) = \frac{xf(x)}{e^x}, x > 0, \text{ 则 } g'(x) = \frac{xf'(x) + f(x) - xf(x)}{e^x} > 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在区间 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

$$\text{又 } (x+4)f(x+4) < 3e^{x+2}, \text{ 得 } \frac{(x+4)f(x+4)}{e^{x+4}} < \frac{3f(3)}{e^3}, \text{ 所以 } g(x+4) < g(3),$$

$$\text{所以 } 0 < x+4 < 3, \text{ 解得 } -4 < x < -1. \text{ 故选: A}$$

**【典例 3】** (23-24 高三上·山东菏泽·月考) 若定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f'(x) + 2f(x) > 0$ , 且  $f(0) = 1$ , 则不等式  $f(x) > \frac{1}{e^{2x}}$  的解集为 \_\_\_\_\_

**【答案】**  $(0, +\infty)$

**【解析】** 构造  $F(x) = f(x) \cdot e^{2x}$ ,

所以  $F'(x) = f'(x) \cdot e^{2x} + f(x) \cdot 2e^{2x} = e^{2x} [f'(x) + 2f(x) > 0] > 0$ ,

所以  $F(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 且  $F(0) = f(0) \cdot e^0 = 1$ ,

不等式  $f(x) > \frac{1}{e^{2x}}$  可化为  $f(x)e^{2x} > 1$ , 即  $F(x) > F(0)$ , 所以  $x > 0$ ,

所以原不等式的解集为  $(0, +\infty)$ .

#### 重难点 04 单变量不等式恒成立问题

一般利用参变分离法求解函数不等式恒(能)成立, 可根据以下原则进行求解:

1、 $\forall x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x)_{\min}$

2、 $\forall x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq f(x)_{\max}$

3、 $\exists x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x)_{\max}$

4、 $\exists x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq f(x)_{\min}$

**【典例 1】**(2024·河南·三模) 若关于  $x$  的不等式  $e^x + x + 2\ln \frac{1}{x} \geq mx^2 + \ln m$  恒成立, 则实数  $m$  的最大值为 ( )

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{e^2}{4}$

C. 1

D.  $e^2$

**【答案】** B

**【解析】** 显然首先  $m > 0, x > 0$ ,

$$e^x + x + 2\ln \frac{1}{x} \geq mx^2 + \ln m \Leftrightarrow e^x + x \geq mx^2 + \ln m - 2\ln \frac{1}{x} = e^{\ln(mx^2)} + \ln(mx^2),$$

令  $f(x) = e^x + x, (x > 0)$ , 则  $f'(x) = e^x + 1 > 0, (x > 0)$ , 所以  $f(x)$  在定义域内严格单调递增,

所以若有  $f(x) \geq f(\ln(mx^2))$  成立, 则必有  $x \geq \ln(mx^2) = \ln m + 2\ln x$ ,

即  $\ln m \leq x - 2\ln x$  对于任意的  $x > 0$  恒成立,

$$\text{令 } g(x) = x - 2\ln x, (x > 0), \text{ 则 } g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x},$$

当  $0 < x < 2$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减,

当  $x > 2$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增,

$$\text{所以当 } x = 2 \text{ 时, } g(x) \text{ 取得最小值 } g(2) = 2 - 2\ln 2 = \ln \frac{e^2}{4},$$

从而  $\ln m \leq \ln \frac{e^2}{4}$ , 所以  $m$  的取值范围是  $m \leq \frac{e^2}{4}$ , 即实数  $m$  的最大值为  $\frac{e^2}{4}$ . 故选: B.

**【典例 2】** (2024·陕西·二模)  $\forall x \in [1, 2]$ , 有  $\ln x + \frac{a}{x^2} - 1 \geq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $[e, +\infty)$       B.  $[1, +\infty)$       C.  $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$       D.  $[2e, +\infty)$

**【答案】** C

**【解析】** 因为  $\forall x \in [1, 2]$ , 有  $\ln x + \frac{a}{x^2} - 1 \geq 0$  恒成立,

所以  $a \geq -x^2 \ln x + x^2$  在  $x \in [1, 2]$  上恒成立,

令  $\mu(x) = -x^2 \ln x + x^2$ ,  $x \in [1, 2]$ ,

则  $\mu'(x) = -2x \ln x - x + 2x = -2x \ln x + x = x(-2 \ln x + 1)$ ,

令  $\mu'(x) = 0$ , 得  $x = \sqrt{e}$ , 当  $x \in (1, \sqrt{e})$  时,  $\mu'(x) > 0$ , 故  $\mu(x)$  在  $(1, \sqrt{e})$  上单调递增,

当  $x \in (\sqrt{e}, 2)$  时,  $\mu'(x) < 0$ , 故  $\mu(x)$  在  $(\sqrt{e}, 2)$  上单调递减,

则  $\mu(x) \leq \mu(\sqrt{e}) = \frac{e}{2}$ ,

所以  $a \geq \frac{e}{2}$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$ . 故选: C.

### 重难点 05 双变量不等式与等式

一般地, 已知函数  $y = f(x), x \in [a, b]$ ,  $y = g(x), x \in [c, d]$

- (1) 若  $\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d]$ , 总有  $f(x_1) < g(x_2)$  成立, 故  $f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$ ;
- (2) 若  $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$ , 有  $f(x_1) < g(x_2)$  成立, 故  $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$ ;
- (3) 若  $\exists x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d]$ , 有  $f(x_1) < g(x_2)$  成立, 故  $f(x)_{\min} < g(x)_{\min}$ ;
- (4) 若  $\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$ , 有  $f(x_1) < g(x_2)$  成立, 故  $f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$ .

**【典例 1】** (23-24 高三上·江苏常州·期中) 已知函数  $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + (2a-1)x - 2 \ln x, a \in \mathbb{R}$ .

- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
- (2) 对于  $\forall x \in [1, e], \exists b \in [2, +\infty)$ , 使得  $f(x) \geq b$ , 求实数  $a$  的取值范围.

**【答案】** (1) 答案见解析; (2)  $a \geq \frac{6}{5}$ .

**【解析】** (1) 由题设  $f'(x) = ax + 2a - 1 - \frac{2}{x} = \frac{ax^2 + (2a-1)x - 2}{x} = \frac{(ax-1)(x+2)}{x}$  且  $x \in (0, +\infty)$ ,

当  $a \leq 0$  时  $f'(x) < 0, f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上递减;

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$ ,

当  $0 < x < \frac{1}{a}$  时  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{1}{a})$  上递减;

当  $x > \frac{1}{a}$  时  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上递增.

所以当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  的减区间为  $(0, +\infty)$ , 无增区间;

当  $a > 0$  时,  $f(x)$  的增区间为  $(\frac{1}{a}, +\infty)$ , 减区间为  $(0, \frac{1}{a})$ .

(2) 由题设知  $f(x) \geq b_{\min} = 2$  对  $\forall x \in [1, e]$  恒成立.

当  $a < 1$  时, 此时  $f(1) = \frac{5a}{2} - 1 < 2$ , 不合题设, 舍去.

当  $a \geq 1$  时,  $f'(x) \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $[1, e]$  上递增, 只需  $f(1) = \frac{5a}{2} - 1 \geq 2 \Rightarrow a \geq \frac{6}{5}$  符合.

综上:  $a \geq \frac{6}{5}$ .

**【典例 2】** (2023 高三·全国·专题练习) 设函数  $f(x) = \frac{e(x^2 - ax + a)}{e^x}$ , ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 若曲线  $y = f(x)$  在  $x=1$  处的切线过点  $M(2, 3)$ , 求  $a$  的值;

(2) 设  $g(x) = x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}$  若对  $\forall n \in [0, 2]$ ,  $\exists m \in [0, 2]$ , 使得  $f(m) \geq g(n)$  成立, 求  $a$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $-1$ ; (2)  $(-\infty, 4 - 2e] \cup [\frac{2}{e}, +\infty)$

**【解析】** (1)  $\because f(x) = \frac{e(x^2 - ax + a)}{e^x}$ ,

$$\therefore f'(x) = \frac{e(x^2 - ax + a)}{e^x} = e \cdot \frac{(2x - a)e^x - (x^2 - ax + a)e^x}{e^{2x}} = -\frac{(x-2)(x-a)}{e^{x-1}}.$$

又  $f(1) = 1$ , 即切点为  $(1, 1)$ ,

$$\therefore k = f'(1) = 1 - a = \frac{3-1}{2-1}, \text{ 解得 } a = -1.$$

(2) “对  $\forall n \in [0, 2]$ ,  $\exists m \in [0, 2]$ , 使得  $f(m) \geq g(n)$  成立”, 即“在  $[0, 2]$  上,  $f_{\max}(x) \geq g_{\max}(x)$ ”.

$$\because g(x) = x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}, \quad g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \geq 0,$$

$\therefore g(x)$  在  $[0, 2]$  上单调递增,  $\therefore g_{\max}(x) = g(2) = 2$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/086122101220010215>