大招　单中点与双中点模型

模型介绍

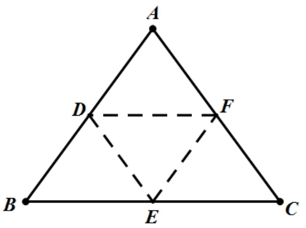
有关中点的知识点归纳：①三角形中线平分三角形面积；②直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

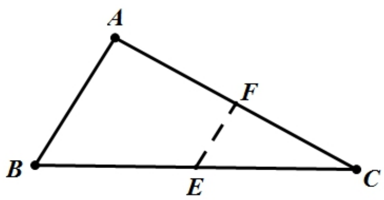
③等腰三角形“三线合一”的性质；④三角形中位线平行且等于第三边的一半.

在题干中，出现一个中点时，我们通常想到中线；两个中点时，想到中位线。

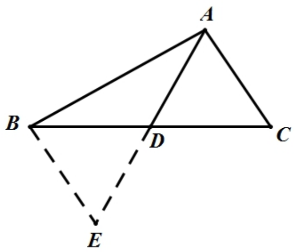
模型一、双中点-中位线模型

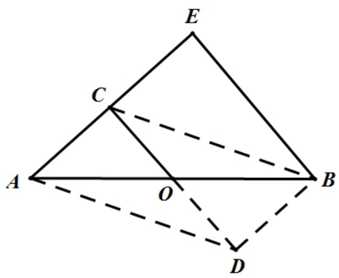
如图，D、E、F 分别为△ABC 三边中点，连接 DE、DF、EF，则 $DF \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}BC$，$DE \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}AC$，$EF \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}AB$.

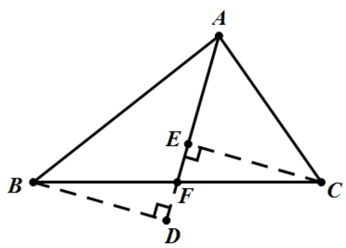




模型二、　单中点-倍长中线模型

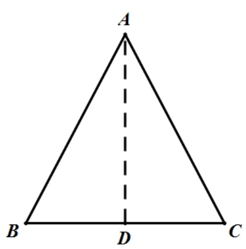






模型二、　单中点-“三线合一”模型

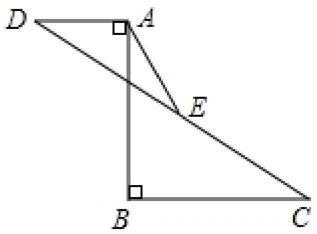
如图，在△ABC 中，AB＝AC，D 为 BC 的中点，连接 AD，则 AD 平分∠BAC，AD 是边 BC 上的高，AD 是 BC 边上的中线（AD 是角平分线、中线、垂线）.



例题精讲

考点一：单中点-倍长中线模型

【例1】. 如图，已知 $AB=12$，$AB\perp BC$ 于 B，$AB\perp AD$ 于 A，$AD=5$，$BC=10$．点 E 是 CD 的中点，则 AE 的长为（　　）



A．6　　B．$\dfrac{13}{2}$　　C．5　　D．$\dfrac{3}{2}\sqrt{41}$

解：延长 AE 交 BC 于 F，如图所示：

∵$AB\perp BC$，$AB\perp AD$，

∴$AD\parallel BC$，

∴$\angle D=\angle C$，

∵点 E 是 CD 的中点，

∴$DE=CE$，

在△ADE 和△FCE 中，

$$\begin{cases}\angle D=\angle C\\ DE=CE\\ \angle AED=\angle FEC\end{cases},$$

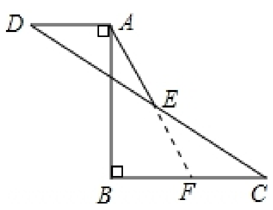
∴△ADE≌△FCE（ASA），

∴$AE=FE$，$AD=CF=5$，

∴$BF=BC-CF=5$，

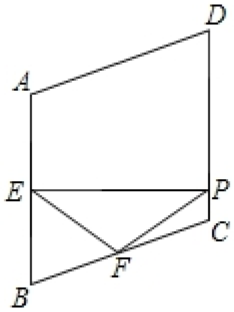
在 Rt△ABF 中，$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

∴$AE=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{13}{2}$．　故选：$B$．



➢**变式训练**

【变式 1-1】. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=110°$，E，F 分别是边 AB 和 BC 的中点，$EP\perp CD$ 于点 P，则 $\angle FPC=$（　　）



A．35°　　　　B．45°　　　　C．50°　　　　D．55°

解：延长 PF 交 AB 的延长线于点 G.

在△BGF 与△CPF 中，

$$\begin{cases}\angle GBF=\angle PCF\\ BF=CF\\ \angle BFG=\angle CFP\end{cases},$$

∴△BGF≌△CPF（ASA），

∴$GF=PF$，

∴F 为 PG 中点.

又∵由题可知，$\angle BEP=90°$，

∴$EF=\frac{1}{2}PG$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半），

∵$PF=\frac{1}{2}PG$（中点定义），

∴$EF=PF$，

∴$\angle FEP=\angle EPF$，

∵$\angle BEP=\angle EPC=90°$，

∴$\angle BEP-\angle FEP=\angle EPC-\angle EPF$，即 $\angle BEF=\angle FPC$，

∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴$AB=BC$，$\angle ABC=180°-\angle A=70°$，

∵E，F 分别为 AB，BC 的中点，

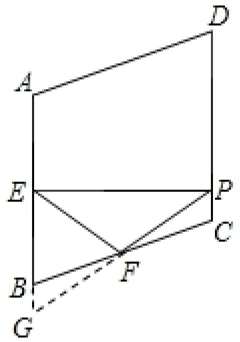
∴$BE=BF$，$\angle BEF=\angle BFE=\frac{1}{2}(180°-70°)=55°$，

易证 $FE=FG$，

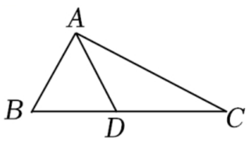
∴∠FGE＝∠FEG＝55°，

∵AG∥CD，

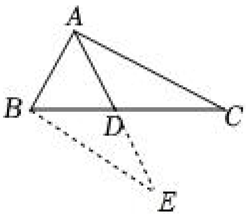
∴∠FPC＝∠EGF＝55°　故选：D.



【变式 1-2】. 如图，在△ABC 中，AB＝12，AC＝20，求 BC 边上中线 AD 的范围为 ＿4＜AD＜16＿.



解：延长 AD 到 E，使得 DE＝AD，连接 BE，如图，



在△ADC 和△EDB 中，

$$\begin{cases}AD=ED\\ \angle ADC=\angle EDB,\\ CD=BD\end{cases}$$

∴△ADC≌△EDB（SAS），

∴BE＝AC＝20.

∵BE－AB＜AE＜AB+BE，

∴20－12＜2AD＜12+20，

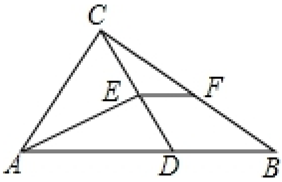
∴4＜AD＜16.

故答案为：4＜AD＜16.

考点二：双中点中位线模型

【例 2】. 如图，在△ABC 中，D 是 AB 上一点，AD＝AC，AE⊥CD，垂足为点 E，F 是 BC 的中点，若 BD

＝16，则 EF 的长为<u>　8　</u>．



解：∵$AD=AC$，$AE\perp CD$，

∴E 为 CD 的中点，

又∵F 是 CB 的中点，

∴EF 为△BCD 的中位线，

∴$EF\parallel BD$，$EF=\frac{1}{2}BD$，

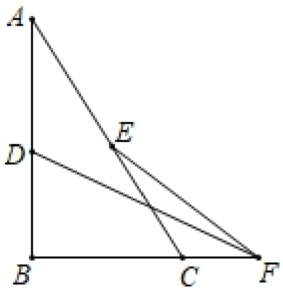
∵$BD=16$，

∴$EF=8$，

故答案为：8．

➢**变式训练**

【变式 2-1】．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=2\sqrt{5}$，$BC=3$，D、E 分别是 AB、AC 的中点，延长 BC 至点 F，使 $CF=\frac{1}{2}BC$，连接 DF、EF，则 EF 的长为<u>　$\sqrt{14}$　</u>．



解：连接 DE，CD，

∵D、E 分别是 AB、AC 的中点，

∴$DE\parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，

∴$DE\parallel CF$，

∵$CF=\frac{1}{2}BC$，

∴$DE=CF$，

∴四边形 $DCFE$ 是平行四边形，

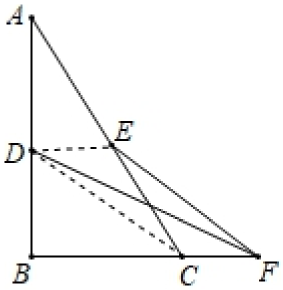
∴$EF=CD$，

∵在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=2\sqrt{5}$，$BC=3$，

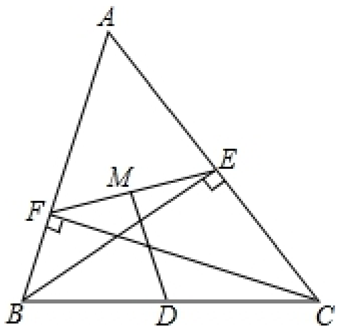
∴$CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+3^2}=\sqrt{14}$，

∴$EF=CD=\sqrt{14}$，

故答案为：$\sqrt{14}$.



【变式 2-2】. 如图，在△ABC 中，BE、CF 分别为边 AC、AB 上的高，D 为 BC 的中点，$DM\perp EF$ 于 M. 求证：$FM=EM$.



证明：连接 DE，DF，

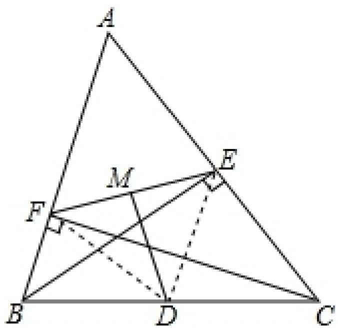
∵BE、CF 分别为边 AC、AB 上的高，D 为 BC 的中点，

∴$DF=\frac{1}{2}BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，

∴$DF=DE$，即△DEF 是等腰三角形.

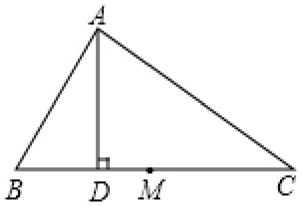
∵$DM\perp EF$，

∴点 M 时 EF 的中点，即 $FM=EM$.

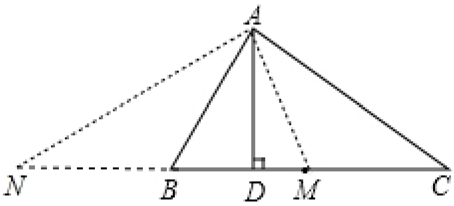


考点三：单中点三线合一模型

【例3】. 如图，在△ABC中，∠B＝2∠C，AD⊥BC，交BC于D，M为BC的中点，AB＝10，求DM的长．



解：



延长CB到N，使BN＝AB＝10，连接AN，AM，

则∠N＝∠NAB，

∵∠ABC＝∠N+∠NAB，∠ABC＝2∠C，

∴∠N＝∠C，

∴AN＝AC，

∵AD⊥CN，

∴DN＝DC，

∴BN+BD＝CD＝DM+CM＝DM+BM＝BD+2DM，

∴BN＝2DM，

∴2DM＝10，

∴DM＝5．

➢变式训练

【变式3-1】. 在△ABC中，AB＝AC＝5，BC＝6，M是BC的中点，MN⊥AC于点N，则MN＝（　　）

A．$\frac{12}{5}$　　B．$\sqrt{61}$　　C．6　　D．11

解：连接AM，

∵AB＝AC，点M为BC中点，

∴AM⊥CM（三线合一），BM＝CM，

∵$AB=AC=5$，$BC=6$，

∴$BM=CM=3$，

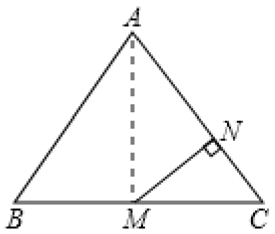
在 Rt△ABM 中，$AB=5$，$BM=3$，

∴根据勾股定理得：$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

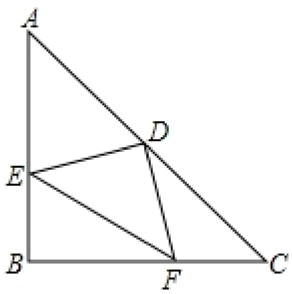
又 $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}MN\cdot AC=\frac{1}{2}AM\cdot MC$，

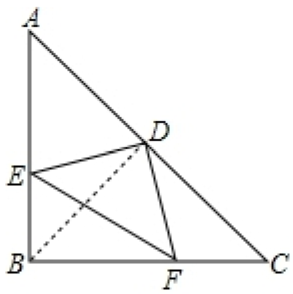
∴$MN=\frac{AM\cdot CM}{AC}=\frac{12}{5}$.

故选：A.



【变式 3-2】. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ABC=90°$，D 为边 AC 的中点，过点 D 作 $DE\perp DF$，交 AB 于点 E，交 BC 于点 F，连接 EF，若 $AE=4$，$FC=3$，求 EF 的长.





解：连接 BD.

∵D 是 AC 中点，

∴$\angle ABD=\angle CBD=45°$，$BD=AD=CD$，$BD\perp AC$

∵$\angle EDB+\angle FDB=90°$，$\angle FDB+\angle CDF=90°$，

∴$\angle EDB=\angle CDF$，

在△BED 和△CFD 中，

∵$\begin{cases}\angle EBD=\angle C\\ BD=CD\\ \angle EDB=\angle CDF\end{cases}$，

∴△BED≌△CFD（ASA），

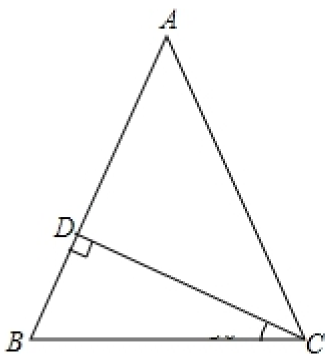
∴$BE=CF$；

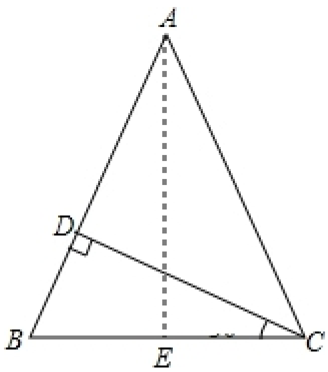
∵$AB=BC$，$BE=CF=3$，

∴$AE=BF=4$，

在 Rt△BEF 中，$EF=\sqrt{BE^2+BF^2}=5$．

【变式 3-3】．已知：如图，△ABC 中，$AB=AC$，$CD\perp AB$ 于点 D．求证：$\angle BAC=2\angle DCB$．





解：过 A 作 $AE\perp BC$ 于 E，

∴$\angle AEB=90^\circ$，

∴$\angle BAE+\angle B=90^\circ$，

∵$CD\perp AB$，

∴$\angle DCB+\angle B=90^\circ$，

∴$\angle DCB=\angle BAE$，

∵$AB=AC$，

∴$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC$，

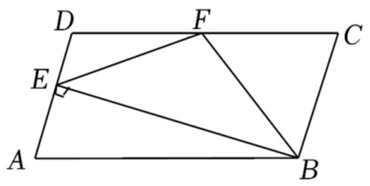
∴$\angle BAC=2\angle DCB$．

课后创新培养

实战演练

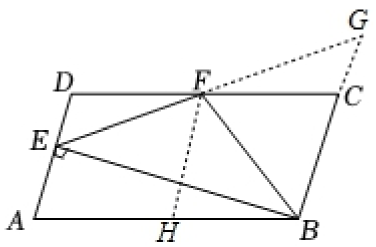
1．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$CD=2AD$，$BE\perp AD$ 于点 E，F 为 DC 中点，连接 EF、BF，下列结论：

①$\angle ABC=2\angle ABF$；②$EF=BF$；③$S_{四边形DEBC}=2S_{\triangle EFB}$；④$\angle CFE=3\angle DEF$，其中正确的有（　　）



A．①②　　　B．②③　　　C．①②③④　　　D．①②④

解：如图，延长 EF 交 BC 的延长线于 G，取 AB 的中点 H，连接 FH.



∵$CD=2AD$，$DF=FC$，

∴$CF=CB$，

∴$\angle CFB=\angle CBF$，

∵$CD\parallel AB$，

∴$\angle CFB=\angle FBH$，

∴$\angle CBF=\angle FBH$，

∴$\angle ABC=2\angle ABF$．故①正确，

∵$DE\parallel CG$，

∴$\angle D=\angle FCG$，

∵$DF=FC$，$\angle DFE=\angle CFG$，

∴$\triangle DFE\cong\triangle CFG$（$ASA$），

∴$FE=FG$，

∵$BE\perp AD$，

∴$\angle AEB=90^\circ$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle AEB=\angle EBG=90^\circ$，

∴$BF=EF=FG$，故②正确，

∵$S_{\triangle DFE}=S_{\triangle CFG}$，

∴$S_{四边形DEBC}=S_{\triangle EBG}=2S_{\triangle BEF}$，故③正确，

∵$AH=HB$，$DF=CF$，$AB=CD$，

∴$CF=BH$，∵$CF\parallel BH$，

∴四边形 $BCFH$ 是平行四边形，

∵$CF=BC$，

∴四边形 $BCFH$ 是菱形，

∴$\angle BFC=\angle BFH$，

∵$FE=FB$，$FH\parallel AD$，$BE\perp AD$，

∴$FH\perp BE$，

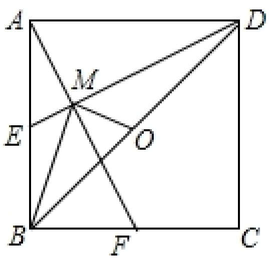
∴$\angle BFH=\angle EFH=\angle DEF$，

∴$\angle EFC=3\angle DEF$，故④正确，

故选：C．

2．如图，已知 E，F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 AB，BC 的中点，AF 与 DE 交于点 M，O 为 BD 的中点，则下列结论：

①$\angle AME=90^\circ$；②$\angle BAF=\angle EDB$；③$\angle BMO=90^\circ$；④$MD=2AM=4EM$；⑤$AM=\frac{2}{3}MF$．其中正确结论的是（　　）



A．①③④　　B．②④⑤　　C．①③④⑤　　D．①③⑤

解：在正方形 $ABCD$ 中，$AB=BC=AD$，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，

∵E、F 分别为边 AB，BC 的中点，

∴$AE=BF=\frac{1}{2}BC$，

在△ABF 和△DAE 中，

$$\begin{cases} AE=BF \\ \angle ABC=\angle BAD, \\ AB=AD \end{cases}$$

∴△ABF≌△DAE（SAS），

∴$\angle BAF=\angle ADE$，

$\because \angle BAF+\angle DAF=\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore \angle ADE+\angle DAF=\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore \angle AMD=180^\circ-(\angle ADE+\angle DAF)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，

$\therefore \angle AME=180^\circ-\angle AMD=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，故①正确；

$\because DE$ 是$\triangle ABD$ 的中线，

$\therefore \angle ADE\neq\angle EDB$，

$\therefore \angle BAF\neq\angle EDB$，故②错误；

$\because \angle BAD=90^\circ$，$AM\perp DE$，

$\therefore \triangle AED\backsim\triangle MAD\backsim\triangle MEA$，

$\therefore \dfrac{AM}{EM}=\dfrac{MD}{AM}=\dfrac{AD}{AE}=2$，

$\therefore AM=2EM$，$MD=2AM$，

$\therefore MD=2AM=4EM$，故④正确；

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，则 $BF=a$，

在 $Rt\triangle ABF$ 中，$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}a$，

$\because \angle BAF=\angle MAE$，$\angle ABC=\angle AME=90^\circ$，

$\therefore \triangle AME\backsim\triangle ABF$，

$\therefore \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AE}{AF}$，

即$\dfrac{AM}{2a}=\dfrac{a}{\sqrt{5}a}$，

解得 $AM=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore MF=AF-AM=\sqrt{5}a-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore AM=\dfrac{2}{3}MF$，故⑤正确；

如图，过点 M 作 $MN\perp AB$ 于 N，

则$\frac{MN}{BF}=\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AF}$，

即$\frac{MN}{a}=\frac{AN}{2a}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{5}a}$，

解得 $MN=\frac{2}{5}a$，$AN=\frac{4}{5}a$，

∴$NB=AB-AN=2a-\frac{4}{5}a=\frac{6}{5}a$，

根据勾股定理，$BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}a$，

过点 M 作 $GH\parallel AB$，过点 O 作 $OK\perp GH$ 于 K，

则 $OK=a-\frac{2}{5}a=\frac{3}{5}a$，$MK=\frac{6}{5}a-a=\frac{1}{5}a$，

在 Rt△MKO 中，$MO=\sqrt{MK^2+OK^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}a$，

根据正方形的性质，$BO=2a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}a$，

∵$BM^2+MO^2=(\frac{2\sqrt{10}}{5}a)^2+(\frac{\sqrt{10}}{5}a)^2=2a^2$，

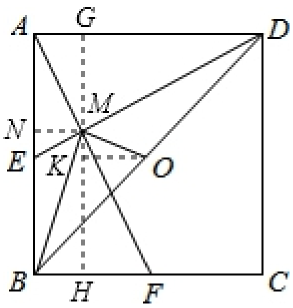
$BO^2=(\sqrt{2}a)^2=2a^2$，

∴$BM^2+MO^2=BO^2$，

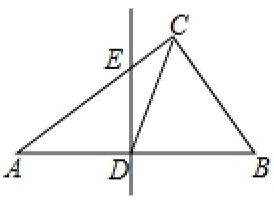
∴△BMO 是直角三角形，$\angle BMO=90°$，故③正确；

综上所述，正确的结论有①③④⑤共 4 个.

故选：C.



3．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$BC=6$，AB 的垂直平分线交 AB 于 D，交 AC 于 E，若 $CD=5$，则 $AE=$__$\frac{25}{4}$__.



解：如图，连接 BE，

∵AB 的垂直平分线交 AB 于 D，交 AC 于 E，

∴$AE=BE$，

∵Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，D 是 AB 的中点，

∴$AB=2CD=10$，

又∵$BC=6$，

∴$AC=8$，

设 $AE=BE=x$，则 $CE=8-x$，

∵$\angle BCE=90°$，

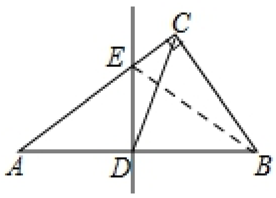
∴Rt△BCE 中，$CE^2+BC^2=BE^2$，

即（$8-x$）$^2+6^2=x^2$，

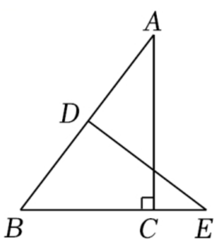
解得 $x=\frac{25}{4}$，

∴$AE=\frac{25}{4}$，

故答案为：$\frac{25}{4}$.



4．如图在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$BC=3$，$AC=4$，点 D 是 AB 的中点，过点 D 作 DE 垂直 AB 交 BC 的延长线于点 E，则 CE 的长是 ＿$\frac{7}{6}$＿.



解：在 Rt△ABC 中，由勾股定理得，$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∵点 D 是 AB 的中点，

∴$BD=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$，

∵$DE\perp AB$，

∴$\angle BDE=\angle ACB=90°$，

∵$\angle B=\angle B$，

∴$\triangle BDE\backsim\triangle BCA$，

∴$\frac{BE}{BA}=\frac{BD}{BC}$，

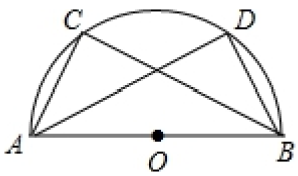
∴$\frac{BE}{5}=\frac{\frac{5}{2}}{3}$，

∴$BE=\frac{25}{6}$，

∴$CE=BE-BC=\frac{25}{6}-3=\frac{7}{6}$，

故答案为：$\frac{7}{6}$．

5．如图．AB 是半圆 O 的直径．点 C、D 在$\overset{\frown}{AB}$上．且 AD 平分$\angle CAB$．已知 $AB=10$，$AC=6$，则 $AD=$__$4\sqrt{5}$__．



解：如图，连接 OD 交 BC 于 E 点，

∵AB 为直径，

∴$AC\perp BC$，

又∵$AB=10$，$AC=6$，

∴$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$，

∵AD 平分$\angle CAB$，

∴$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$，

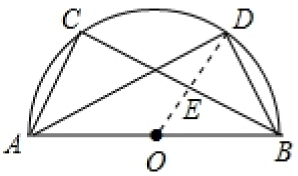
∴OD 垂直平分 BC，由此可得：$OE=\frac{1}{2}AC=3$，$DE=OD-OE=5-3=2$，

又∵$BE=\frac{1}{2}BC=4$，

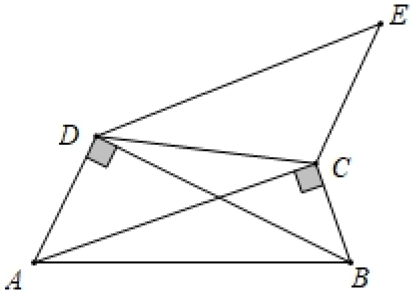
在 Rt$\triangle BDE$ 中，由勾股定理，得 $BD^2=BE^2+DE^2=20$，

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{100-20}=4\sqrt{5}$．

故答案为：$4\sqrt{5}$．



6．如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$CD=6$，$\angle ADB=\angle BCA=90^\circ$，以 AD，AC 为边作平行四边形 $DACE$，连接 BE，则 BE 的长为__$2\sqrt{7}$__．



解：连接 AE 交 CD 于 O，连接 DM、CM，取 AB 的中点 M，连接 OM，如图所示：

∵$AB=8$，$\angle ADB=\angle BCA=90^\circ$，

∴$DM=CM=\dfrac{1}{2}AB=4$，

∵四边形 $DACE$ 是平行四边形，

∴$OA=OE$，$OC=OD=\dfrac{1}{2}CD=3$，

∴OM 是△ABE 的中位线，

∴$BE=2OM$，

∵$DM=CM$，$OC=OD$，

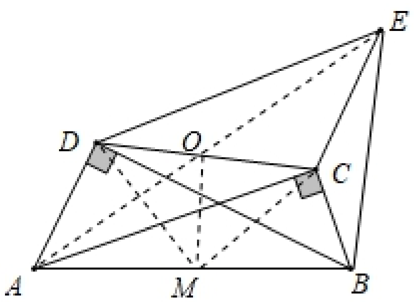
∴$OM\perp CD$，

∴$\angle MOC=90^\circ$，

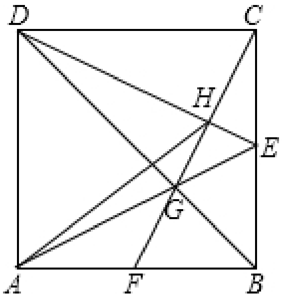
由勾股定理得：$OM=\sqrt{OM^2+OC^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，

∴$BE=2OM=2\sqrt{7}$；

故答案为：$2\sqrt{7}$．



7．如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 E 是 BC 的中点，连接 AE 与对角线 BD 交于点 G，连接 CG 并延长，交 AB 于点 F，连接 DE 交 CF 于点 H，连接 AH．以下结论：①$CF\perp DE$；②$GH=\frac{4}{5}$；③$AD=AH$；④$\frac{CH}{HF}=\frac{2}{3}$，其中正确结论的序号是 ①③④ ．



解：∵四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，点 E 是 BC 的中点，

∴$AB=AD=BC=CD=6$，$BE=CE=3$，

$\angle DCE=\angle ABE=90°$，$\angle ABD=\angle CBD=45°$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle DCE$（$SAS$），

∴$\angle CDE=\angle BAE$，$DE=AE$，

∵$AB=BC$，$\angle ABG=\angle CBG$，$BG=BG$，

∴$\triangle ABG\cong\triangle CBG$（$SAS$），

∴$\angle BAE=\angle BCF$，

∴$\angle BCF=\angle CDE$，

又∵$\angle CDE+\angle CED=90°$，

∴$\angle BCF+\angle CED=90°$，

∴$\angle CHE=90°$，

∴$CF\perp DE$，故①正确；

∵$CD=6$，$CE=3$，

∴$DE=\sqrt{CD^2+CE^2}=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$，

∵$S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\times CD\cdot CE=\frac{1}{2}\times DE\cdot CH$，

∴$CH=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，

∵$\angle CHE=\angle CBF$，$\angle BCF=\angle ECH$，

∴$\triangle ECH\backsim\triangle FCB$，