

专题 7-1 求数列的通项公式 14 类题型汇总

近 5 年考情 (2020-2024)		
考题统计	考点分析	考点要求
2024 年甲 (理) 第 18 (1), 5 分	高考对数列通项的考查相对稳定, 考查内容、频率、题型、难度均变化不大. 数列通项问题以解答题的形式为主, 偶尔出现在选择填空题当中, 常结合函数、不等式综合考查.	掌握数列通项的几种常见方法.
2023 年甲 (理) 第 17 (1), 5 分		
2023 年 II 卷第 18 (1), 5 分		
2023 年 I 卷第 20 (1), 5 分		
2022 年 I 卷第 17 (1), 5 分		
2022 年甲 (理) 第 17 (1), 5 分		
2021 年乙 (理) 第 19 题, 12 分		
2021 年 I 卷, 第 17 (1), 5 分		

模块一

热点题型解读 (目录)

- 【题型 1】由 a_n 与 S_n 关系求通项 (三类题型)
- 【题型 2】因式分解型 (正项数列)
- 【题型 3】已知等差或等比求通项
- 【题型 4】累加法
- 【题型 5】累乘法
- 【题型 6】前 n 项之积 T_n
- 【题型 7】取倒数
- 【题型 8】构造 1: 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型的递推式
- 【题型 9】构造 2: 形如 $a_{n+1} = pa_n + kn + b$ 型的递推式
- 【题型 10】构造 3: 形如 $a_{n+1} = pa_n + rq^n$ 型的递推式
- 【题型 11】构造 4: 形如 $a_{n+1} = \frac{ma_n + p}{pa_n + q}$ 型的递推式
- 【题型 12】构造 5: 形如 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ 型的递推式
- 【题型 12】奇偶相间讨论型 (奇偶数列)
- 【题型 13】隔项等差

【题型 14】隔项等比（积为等比与和为等比）

模块二

核心题型·举一反三

【题型 1】由 a_n 与 S_n 关系求通项（三类题型）

基础知识

S_n 与 a_n 同时存在		
角度 1: 已知 S_n 与 a_n 的关系; 或 S_n 与 n 的关系	用 $S_n - S_{n-1}$, 得到 a_n	例: 已知 $4S_n = (a_n + 1)^2$, 求 a_n
角度 2: 已知 a_n 与 $S_{n-1}S_n$ 的关系; 或 a_n 与 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ 的关系	$S_n - S_{n-1}$ 替换题中的 a_n	例: 已知 $2a_n = S_n S_{n-1} (n \geq 2)$; 已知 $\sqrt{S_n} = a_{n+1} - \sqrt{S_{n+1}}$
角度 3: 等式中左侧含有: $\sum_{i=1}^n a_i b_i$	作差法 (类似 $S_n - S_{n-1}$)	例子: 已知 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n$ 求 a_n

模板解决步骤

第一步: 写出当 $n \geq 2$ 时, S_{n-1} 的表达式.

第二步: 利用 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 求出 a_n 或将条件转化为 a_n 的递推关系.

第三步: 如果第二步求出 a_n , 那么根据 $a_1 = S_1$ 求出 a_1 , 并代入 $\{a_n\}$ 的通项公式, 注意要进行验证, 若成立, 则合并; 若不成立, 则写成分段的形式. 如果第二步求出 a_n 的递推关系, 那么通过递推公式求 a_n .

忽略对 $n=1$ 的单独讨论是常见的错误

类型一 用 $S_n - S_{n-1}$, 得到 a_n

1. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}$, 前 n 项和 $S_n = n(2n-1)a_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

【答案】 $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

【解析】 由于数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}$, 前 n 项和 $S_n = n(2n-1)a_n$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)(2n-3)a_{n-1}$,

两式相减可得: $a_n = n(2n-1)a_n - (n-1)(2n-3)a_{n-1}$,

所以 $(n-1)(2n-3)a_{n-1} = (2n^2 - n - 1)a_n$,

$$(n-1)(2n-3)a_{n-1} = (n-1)(2n+1)a_n,$$

$$\text{所以 } (2n-3)a_{n-1} = (2n+1)a_n,$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-3}{2n+1},$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{7} \times \cdots \times \frac{2n-5}{2n-1} \times \frac{2n-3}{2n+1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \text{ 符合上式,}$$

$$\text{因此 } a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

2. (2022·全国·甲卷高考真题) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$, 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列

【分析】依题意可得 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$, 根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$, 作差即可得到 $a_n - a_{n-1} = 1$, 从而得证;

【详解】因为 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$, 即 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$ ①,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} + (n-1)^2 = 2(n-1)a_{n-1} + (n-1) \text{ ②,}$$

$$\text{①} - \text{②得, } 2S_n + n^2 - 2S_{n-1} - (n-1)^2 = 2na_n + n - 2(n-1)a_{n-1} - (n-1),$$

$$\text{即 } 2a_n + 2n - 1 = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} + 1,$$

$$\text{即 } 2(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} = 2(n-1), \text{ 所以 } a_n - a_{n-1} = 1, \quad n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*,$$

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

【巩固练习 1】(2023·全国·高考甲卷真题) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_2 = 1, 2S_n = na_n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$$\text{【答案】 } a_n = n - 1$$

【分析】根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 即可求出;

【详解】因为 $2S_n = na_n$,

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } 2a_1 = a_1, \text{ 即 } a_1 = 0;$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } 2(1+a_3) = 3a_3, \text{ 即 } a_3 = 2,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}, \text{ 所以 } 2(S_n - S_{n-1}) = na_n - (n-1)a_{n-1} = 2a_n,$$

$$\text{化简得: } (n-2)a_n = (n-1)a_{n-1}, \text{ 当 } n \geq 3 \text{ 时, } \frac{a_n}{n-1} = \frac{a_{n-1}}{n-2} = \cdots = \frac{a_3}{2} = 1, \text{ 即 } a_n = n-1,$$

当 $n=1, 2$ 时都满足上式, 所以 $a_n = n-1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

【巩固练习 2】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S , 若 $a_1 = 1$, $2S_n = a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式_____

【答案】 $\begin{cases} 1, n=1 \\ 2 \times 3^{n-2}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

【解析】当 $n \geq 2$ 时, $2S_n = a_{n+1} \Rightarrow 2S_{n-1} = a_n$, 作差得 $a_{n+1} = 3a_n$, 即当 $n \geq 2$ 时, $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 而 $a_2 = 2$, 则 $n \geq 2, a_n = 2 \times 3^{n-2}$, 故 $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 2 \times 3^{n-2}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

【巩固练习 3】(2024·全国·甲卷高考真题) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $4S_n = 3a_n + 4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式

【答案】 $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$

【分析】利用退位法可求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【详解】当 $n=1$ 时, $4S_1 = 4a_1 = 3a_1 + 4$, 解得 $a_1 = 4$.

当 $n \geq 2$ 时, $4S_{n-1} = 3a_{n-1} + 4$, 所以 $4S_n - 4S_{n-1} = 4a_n = 3a_n - 3a_{n-1}$ 即 $a_n = -3a_{n-1}$,

而 $a_1 = 4 \neq 0$, 故 $a_n \neq 0$, 故 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -3$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项, -3 为公比的等比数列,

所以 $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$.

类型二 等式中左侧含有: $\sum_{i=1}^n a_i b_i$

3. (2024·江苏·一模) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{2n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 若

$a_5 - 2a_6 = 7$, 则 $a_1 =$ ()

A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【答案】D

【分析】由已知和式求出通项 $\frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 的通项, 从而得出 $\frac{1}{a_5 a_6} = \frac{1}{99}$, 再由已知条件 $a_5 - 2a_6 = 7$, 从而求出 a_5 , 类似的往前推, 求出 a_1 即可.

【详解】 $n=1$ 时, $\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{3}$;

$n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} = \frac{1}{4n^2 - 1}$

$\frac{1}{a_5 a_6} = \frac{1}{99}$, $\therefore a_5 a_6 = 99$, $\therefore a_6 (2a_6 + 7) = 99$,

$\therefore a_6 = \frac{11}{2}, a_5 = 18$,

$$a_4 a_5 = 63, \therefore a_4 = \frac{7}{2}$$

$$\text{Q } a_3 a_4 = 35, \therefore a_3 = 10,$$

$$\text{Q } a_2 a_3 = 15, \therefore a_2 = \frac{3}{2},$$

$$a_1 a_2 = 3, \therefore a_1 = 2.$$

【巩固练习 1】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且有 $2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + \cdots + 2^n a_n = n \cdot 2^n$ 。求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 $a_n = \frac{n+1}{2}$

【详解】(1) 由题 $2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + \cdots + 2^n a_n = n \cdot 2^n$,

当 $n=1$ 时, $2a_1 = 2$, $\therefore a_1 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, 由 $2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + \cdots + 2^n a_n = n \cdot 2^n$,

所以 $2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + \cdots + 2^{n-1} a_{n-1} = (n-1) \cdot 2^{n-1}$, 两式相减,

可得 $2^n a_n = n \cdot 2^n - (n-1)2^{n-1} = (n+1)2^{n-1}$, $\therefore a_n = \frac{n+1}{2}$.

当 $n=1$ 时, $a_n = \frac{1+1}{2} = 1$ 满足, $\therefore a_n = \frac{n+1}{2}$.

【巩固练习 2】在数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = n^2 + n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 $a_n = 2n(n+1)$

【详解】解: 因为 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = n^2 + n$, ①

则当 $n=1$ 时, $\frac{a_1}{2} = 2$, 即 $a_1 = 4$,

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} = n^2 - n$, ②

① - ② 得 $\frac{a_n}{n+1} = 2n$, 所以 $a_n = 2n(n+1)$,

$a_1 = 4$ 也满足 $a_n = 2n(n+1)$, 故对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = 2n(n+1)$.

类型三 消 a_n 求 S_n : 将题意中的 a_n 用 $S_n - S_{n-1}$ 替换

4. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n > 0, a_n^2 + 1 = 2a_n S_n$, 求 a_n

【详解】由题意知, $a_1^2 + 1 = 2a_1 S_1 = 2a_1^2$,

又 $a_1 > 0$ ，得 $a_1 = 1$ 。

当 $n \geq 2$ 时，由 $a_n^2 + 1 = 2a_n S_n$ ，得 $(S_n - S_{n-1})^2 + 1 = 2(S_n - S_{n-1})S_n$ ，得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$ 。

则数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 $S_1^2 = 1$ ，公差为 1 的等差数列。

所以 $S_n^2 = 1 + (n-1) = n$ 。

又 $S_n > 0$ ，则 $S_n = \sqrt{n}$ 。

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ，

又 $a_1 = 1$ 满足上式，

所以 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ 。

【巩固练习 1】在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$ ，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____。

【答案】 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3}, & n \geq 2 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$ 。

【解析】Q 当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，

$$\therefore S_n - S_{n-1} = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} \Rightarrow 2S_n^2 - S_n - 2S_n S_{n-1} + S_{n-1} = 2S_n^2,$$

整理可得： $S_{n-1} - S_n = 2S_n S_{n-1}$ ， $\therefore \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$ ，

$\therefore \left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 为公差为 2 的等差数列， $\therefore \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$ ，

$$\therefore S_n = \frac{1}{2n-1}, \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3}, & n \geq 2 \\ 1, & n = 1 \end{cases}.$$

【巩固练习 2】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_1 = 1, a_{n+1} \geq 1 + a_n$ ，且 $a_{n+1} = 2(\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n})$ ，求通项公式 a_n 。

【答案】 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 8n-8, & n \geq 2 \end{cases}$

【详解】 $a_{n+1} = 2(\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}) = S_{n+1} - S_n = (\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n})(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$

Q $S_1 = a_1 = 1, a_{n+1} - a_n \geq 1$

$$\therefore \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} > 0$$

$$\therefore \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = 2, \text{ 即 } \{\sqrt{S_n}\} \text{ 是以 } 2 \text{ 为公差, } 1 \text{ 为首项的等差数列}$$

$$\therefore \sqrt{S_n} = 2n-1, \text{ 即 } \therefore S_n = (2n-1)^2$$

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n-1)^2 - (2n-3)^2 = 8n-8$

显然, $n=1$ 时, 上式不成立, 所以 $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 8n-8, n \geq 2 \end{cases}$.

【题型 2】因式分解型 (正项数列)

基础知识

对于式子中有提到 $a_n > 0$ 且出现二次式可以考虑利用十字相乘进行因式分解.

5. 已知各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_{n+1} + S_n = \frac{1}{2}a_{n+1}^2, a_1 = 2$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

【解析】(1) $\because S_{n+1} + S_n = \frac{1}{2}a_{n+1}^2, \therefore S_n + S_{n-1} = \frac{1}{2}a_n^2 (n \geq 2),$

两式相减得: $a_{n+1} + a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_n^2) = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n),$

由于 $a_{n+1} + a_n > 0$, 则 $a_{n+1} - a_n = 2 (n \geq 2),$

当 $n=1$ 时, $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a_2^2, a_1 = 2$, 得 $a_2 = 4,$

$a_2 - a_1 = 2$, 则 $a_{n+1} - a_n = 2 (n \in \mathbb{N}^*),$

所以 $\{a_n\}$ 是首项和公差均为 2 的等差数列, 故 $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n.$

【巩固练习 1】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$. 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

【解析】证明: 因为 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$, 即 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} + (n-1)^2 = 2(n-1)a_{n-1} + (n-1)$ ②,

① - ② 得, $2S_n + n^2 - 2S_{n-1} - (n-1)^2 = 2na_n + n - 2(n-1)a_{n-1} - (n-1),$

即 $2a_n + 2n - 1 = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} + 1,$

即 $2(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} = 2(n-1),$

所以 $a_n - a_{n-1} = 1, n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*,$

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

【巩固练习 2】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且满足 $2S_n + a_n = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

【解析】(1) 因为 $2S_n + a_n = 1.$

所以当 $n=1$ 时, $2S_1 + a_1 = 1, 2a_1 + a_1 = 1, \therefore a_1 = \frac{1}{3}$,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_n + a_n = 1, 2S_{n-1} + a_{n-1} = 1$,

两式相减得 $2S_n - 2S_{n-1} + a_n - a_{n-1} = 0, \therefore 3a_n - a_{n-1} = 0, \because a_n \neq 0, \therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $q = \frac{1}{3}$ 的等比数列,

则数列通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

【巩固练习 3】已知数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 其前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = a_n^2 + n$. 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列

【解析】当 $n=1$ 时, $2S_1 = 2a_1 = a_1^2 + 1$, 解得 $a_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + n - 1$, 则 $2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = a_n^2 + n - (a_{n-1}^2 + n - 1)$,

即 $a_n^2 - 2a_n + 1 = a_{n-1}^2$, 即 $(a_n - 1)^2 = a_{n-1}^2$

又数列 $\{a_n\}$ 为递增数列,

所以 $a_n \geq 1$, 故 $a_n - 1 = a_{n-1}$,

即 $a_n - a_{n-1} = 1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列

【题型 3】已知等差或等比求通项

基础知识

当题目中给了数列为等差或等比时, 可以从前几项入手求基本量, 不要再去消 S_n

6. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = a_{n+2} - 6$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 又 $2S_n = a_{n+2} - 6$,

当 $n=1$ 时, $2S_1 = a_3 - 6$, 当 $n=2$ 时, $2S_2 = a_4 - 6$,

两式相减可得, $2a_2 = a_4 - a_3$, 所以 $2 = q^2 - q$,

所以 $q = 2$ 或 $q = -1$ (舍去),

所以 $2S_1 = a_3 - 6 = 4a_1 - 6$, 即 $a_1 = 3$,

所以等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

7. (2023·全国·高考 1 卷真题) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n

分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

【答案】 $a_n = 3n$

【分析】(1) 根据等差数列的通项公式建立方程求解即可;

【详解】(1) $\because 3a_2 = 3a_1 + a_3, \therefore 3d = a_1 + 2d$, 解得 $a_1 = d$,

$$\therefore S_3 = 3a_2 = 3(a_1 + d) = 6d,$$

$$\text{又 } T_3 = b_1 + b_2 + b_3 = \frac{2}{d} + \frac{6}{2d} + \frac{12}{3d} = \frac{9}{d},$$

$$\therefore S_3 + T_3 = 6d + \frac{9}{d} = 21,$$

$$\text{即 } 2d^2 - 7d + 3 = 0, \text{ 解得 } d = 3 \text{ 或 } d = \frac{1}{2} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3n.$$

8. (2023·全国·高考 II 卷真题) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $b_n = \begin{cases} a_n - 6, n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 记 S_n, T_n 分别为数列

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, $S_4 = 32, T_3 = 16$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

【答案】(1) $a_n = 2n + 3$;

【分析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 用 a_1, d 表示 S_n 及 T_n , 即可求解作答.

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 而 $b_n = \begin{cases} a_n - 6, n = 2k - 1 \\ 2a_n, n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{则 } b_1 = a_1 - 6, b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d, b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 2d - 6,$$

$$\text{于是 } \begin{cases} S_4 = 4a_1 + 6d = 32 \\ T_3 = 4a_1 + 4d - 12 = 16 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 5, d = 2, a_n = a_1 + (n-1)d = 2n + 3,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2n + 3$.

【巩固练习 1】设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n , $a_1 = 1$, 满足 $2S_{n+1} = n(a_n + 5) + 2, n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

【答案】 $a_n = 2n - 1$

【详解】依题意有 $2(a_1 + a_2) = a_1 + 5 + 2$,

$$\because a_1 = 1, \therefore a_2 = 3,$$

又 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d ,

$$\therefore d = a_2 - a_1 = 2, \therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

【巩固练习 2】知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n + a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及它的前 n 项和 S_n .

【答案】(1) $a_n = 2^{n-1}$, $S_n = 2^n - 1$

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q , $\because a_n + a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1}$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q = 3 \\ a_2 + a_3 = a_1 q + a_1 q^2 = 6 \end{cases}, \text{解得 } q = 2, a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1}, S_n = \frac{1(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1$$

【巩固练习 3】已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2^n + m (m \in R)$, 求 m 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

【答案】 $m = -1$, $a_n = 2^{n-1}$

【分析】当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2^{n-1} + m$, 两式相减得 $a_n = 2^{n-1} (n \geq 2)$, 由 $a_1 = 2^1 + m = 1$, 可求出 m 的值;

【详解】因为 $S_n = 2^n + m$, 所以 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2^{n-1} + m$, 所以 $a_n = 2^{n-1} (n \geq 2)$.

又由数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以 $a_n = 2^{n-1}$. 又因为 $a_1 = S_1 = 2^1 + m = 2^{1-1} = 1$, 所以 $m = -1$,

综上 $m = -1, a_n = 2^{n-1}$.

【题型 4】累加法

基础知识

形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型的递推数列 (其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数) 可构造:
$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = f(n-1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2) \\ \dots \\ a_2 - a_1 = f(1) \end{cases}$$

将上述 m_2 个式子两边分别相加, 可得: $a_n = f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(2) + f(1) + a_1, (n \geq 2)$

(1) 若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数, 累加后可转化为等差数列求和;

(2) 若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数, 累加后可转化为等比数列求和;

(3) 若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数, 累加后可裂项求和.

9. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln(1 + \frac{1}{n})$, 则 $a_n =$

A. $2 + \ln n$

B. $2 + (n-1)\ln n$

C. $2 + n\ln n$

D. $1 + n + \ln n$

【答案】A

【详解】试题分析: 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} - a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\therefore a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \frac{n}{n-1} + \ln \frac{n-1}{n-2} + \cdots + \ln \frac{2}{1} + 2 \\
&= \ln \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1} \right) + 2 \\
&= \ln n + 2
\end{aligned}$$

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=1$, 且 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, 则 $a_n=$ _____.

【答案】 $\frac{3n-2}{2n-1}$

【解析】 由 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 可得:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} a_2-a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ a_3-a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) \\ \text{L} \\ a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n-a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\text{L}+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right),$$

$$\therefore a_n=1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{3n-2}{2n-1}.$$

11. (2024·全国·模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2=3, 2S_n=n(a_n+2)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

【答案】 (1) $a_n=n+1$;

【分析】 (1) 当 $n=1$ 时, 求得 $a_1=2$, 当 $n \geq 3$ 时, 得到 $2S_{n-1}=(n-1)(a_{n-1}+2)$, 两式相减化简得到

$$\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n-2}=-2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right), \text{ 结合叠加法, 即可求得数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式;}$$

【详解】 (1) 解: 当 $n=1$ 时, $2S_1=2a_1=a_1+2$, 解得 $a_1=2$,

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } 2S_n=n(a_n+2), 2S_{n-1}=(n-1)(a_{n-1}+2),$$

$$\text{两式相减可得, } (n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}=-2,$$

$$\text{则 } \frac{a_n}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n-2}=-2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right), \frac{a_{n-1}}{n-2}-\frac{a_{n-2}}{n-3}=-2\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}\right), \text{L},$$

$$\frac{a_3}{2}-\frac{a_2}{1}=-2\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

叠加可得, $\frac{a_n}{n-1} - \frac{a_2}{1} = \frac{4-2n}{n-1}$, 则 $a_n = n+1$,

而 $n=1, 2$ 时也符合题意,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n+1$.

12. (2024·山东潍坊·一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$, $a_2=1$. 若数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是公比为 2 的等比

数列, 则 $a_{2024} =$ ()

- A. $\frac{2^{2023}+1}{3}$ B. $\frac{2^{2024}+1}{3}$ C. $2^{1012}-1$ D. $2^{1011}-1$

【答案】A

【分析】

利用等比数列求出 $a_n+a_{n+1}=2^{n-1}$, 进而求得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2^{n-2} (n \geq 2)$, 再利用累加法求通项得解.

【详解】依题意, $a_1+a_2=1$, $a_n+a_{n+1}=2^{n-1}$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1}+a_n=2^{n-2}$, 则 $a_{n+1}-a_{n-1}=2^{n-2}$,
所以 $a_{2024}=a_2+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2024}-a_{2022})=1+2+2^3+2^5+\cdots+2^{2021}$
 $=1+\frac{2(1-4^{1011})}{1-4}=\frac{2^{2023}+1}{3}$.

【巩固练习 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+3n-2 (n \geq 2)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

【答案】 $\frac{3n^2-n}{2}$

【解析】因为 $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+3n-2 (n \geq 2)$,

所以 $a_n-a_{n-1}=3n-2 (n \geq 2)$,

即 $a_2-a_1=4$, $a_3-a_2=7$, $a_4-a_3=10$, $\cdots$, $a_{n-1}-a_{n-2}=3n-5$,

所以 $a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_3-a_2+a_2-a_1=(3n-2)+(3n-5)+\cdots+7+4$,

即 $a_n-a_1=\frac{[(3n-2)+4](n-1)}{2}$, 则 $a_n=\frac{3n^2-n}{2} (n \geq 2)$,

当 $n=1$ 时 $a_n=\frac{3n^2-n}{2}$ 也成立, 所以 $a_n=\frac{3n^2-n}{2}$

【巩固练习 2】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n-a_{n+1}=2^n a_n a_{n+1}$, 则 $a_n =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2^n-1}$

【解析】若 $a_{n+1}=0$, 则 $a_n-a_{n+1}=0$, 即 $a_n=a_{n+1}=0$, 这与 $a_1=1$ 矛盾, 所以 $a_{n+1} \neq 0$,

由 $a_n-a_{n+1}=2^n a_n a_{n+1}$ 两边同时除以 $a_n a_{n+1}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2^n$,

则 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2^{n-1}$, $\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}=2^{n-2}$, $\cdots$, $\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=2^2$, $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=2$,

上面的式子相加可得: $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n - 2$

所以 $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$

【巩固练习 3】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 且 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 2^n$, 则 $a_4 =$ _____

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】4

【详解】由 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 2^n$, 且 $a_1 = 2$, 根据累加法可得:

$$\begin{aligned} na_n &= na_n - (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} - (n-2)a_{n-2} + \cdots + 2a_2 - a_1 + a_1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 2 = 2^n, (n \geq 2), \end{aligned}$$

所以 $a_n = \frac{2^n}{n}, (n \geq 2)$, 则 $a_4 = \frac{2^4}{4} = 4$.

【巩固练习 4】在首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 中 $a_{n+1} - a_n = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 则 $a_n =$ _____

【答案】 $3 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$

【解析】因为 $a_{n+1} - a_n = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

所以 $a_2 - a_1 = 1 \times \frac{1}{2}$,

$$a_3 - a_2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$a_4 - a_3 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

L

$$a_n - a_{n-1} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \geq 2),$$

以上各式相加得: $a_n - a_1 = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + \cdots + (n-1) \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) (n \geq 2)$,

$$\text{令 } S = a_n - a_1 = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + \cdots + (n-1) \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) (n \geq 2), \quad ①$$

$$\frac{1}{2}S = 1 \times \frac{1}{2^2} + 2 \times \frac{1}{2^3} + \cdots + (n-1) \times \frac{1}{2^n} (n \geq 2), \quad ②$$

错位相减: ① - ② 有, $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - (n-1) \frac{1}{2^n} (n \geq 2)$,

$$\text{即 } \frac{1}{2}S = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - (n-1) \frac{1}{2^n} (n \geq 2),$$

所以 $S = 2 - \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} (n \geq 2)$,

又因为 $a_1 = 1$, 所以有, 所以 $a_n = S + 1 = 3 - \frac{n+1}{2^{n-1}} (n \geq 2)$,

检验 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 符合上式, 所以 $a_n = 3 - \frac{n+1}{2^{n-1}} (n \in \mathbf{N}^*)$.

【题型 5】累乘法

基础知识

形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n) \right)$ 型的递推数列 (其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数) 可构造:

$$\begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1) \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2) \\ \dots \\ \frac{a_2}{a_1} = f(1) \end{cases}$$

将上述 m_2 个式子两边分别相乘, 可得: $a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot \dots \cdot f(2) f(1) a_1, (n \geq 2)$

有时若不能直接用, 可变形形成这种形式, 然后用这种方法求解.

13. (2024·四川泸州·三模) 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 1$, $na_{n+1} = (n+2)S_n$, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(n+1) \cdot 2^{n-2}$

【解析】 当 $n \geq 2$ 时, $(n-1)a_n = (n+1)S_{n-1}$, 即 $S_n = \frac{n}{n+2}a_{n+1}$, $S_{n-1} = \frac{n-1}{n+1}a_n$,

则 $S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+2}a_{n+1} - \frac{n-1}{n+1}a_n = a_n$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+2)}{n+1}$,

则有 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2(n+1)}{n}$, $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{2n}{n-1}$, $\dots$, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2 \times 3}{2}$,

则 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \dots \times \frac{a_2}{a_1} \times a_1 = (n+1) \cdot 2^{n-2}$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$, 符合上式, 故 $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$.

故答案为: $(n+1) \cdot 2^{n-2}$.

14. 已知 $a_1 = 1$, $a_n = n(a_{n+1} - a_n) (n \in \mathbf{N}_+)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (\quad)$

- A. $2n-1$ B. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ C. n^2 D. n

【答案】 D

【详解】由 $a_n = n(a_{n+1} - a_n)$ ，得 $(n+1)a_n = na_{n+1}$ ，

$$\text{即 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n},$$

$$\text{则 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-1}{n-2}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \frac{n-2}{n-3}, \dots, \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1}, n \geq 2,$$

由累乘法可得 $\frac{a_n}{a_1} = n$ ，所以 $a_n = n, n \geq 2$ ，

又 $a_1 = 1$ ，符合上式，所以 $a_n = n$

15. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_{n-1} (n \geq 2)$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = \frac{1}{n}$

【分析】利用累乘法即可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【详解】因为 $a_1 = 1$ ， $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_{n-1} (n \geq 2)$ ，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$ ，

$$\text{所以 } a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

又因为当 $n=1$ 时， $a_1 = 1$ ，符合上式，所以 $a_n = \frac{1}{n}$.

16. (2022·新高考1卷)为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = 1$ ， $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，求 $\{a_n\}$ 的

通项公式.

【答案】 (1) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

【详解】(1) $\because a_1 = 1$ ， $\therefore S_1 = a_1 = 1$ ， $\therefore \frac{S_1}{a_1} = 1$ ，又 $\because \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，

$$\therefore \frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}, \therefore S_n = \frac{(n+2)a_n}{3},$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = \frac{(n+1)a_{n-1}}{3},$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)a_n}{3} - \frac{(n+1)a_{n-1}}{3},$$

整理得： $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$ ，

$$\text{即 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1},$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \dots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ &= 1 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \dots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

显然对于 $n=1$ 也成立， $\therefore \{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

【巩固练习 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$ 且 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

【答案】 $a_n = n$

【解析】因为 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{3}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$,

累乘可得 $\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-1}$,

即 $\frac{a_n}{a_1} = n$, 所以 $a_n = n (n \geq 2)$,

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也成立,

所以 $a_n = n$.

故答案为: $a_n = n$

【巩固练习 2】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, $3S_n = (n+2)a_n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【详解】因为 $3S_n = (n+2)a_n$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $3S_{n-1} = (n+1)a_{n-1}$,

两式作差可得 $3a_n = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$, 整理得 $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$.

$a_1=1$, 令 $n=2$, 则 $3(a_1+a_2) = 4a_2, \therefore a_2=3$,

所以 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$,

则 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdot \dots \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot 1 = \frac{n(n+1)}{2}$,

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也符合上式, 综上, $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

【巩固练习 3】已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 前 n 项和为 S_n , 且 $nS_{n+1} = (n+2)S_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

【答案】 n

【详解】解: $\because nS_{n+1} = (n+2)S_n, \therefore \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \dots \times \frac{S_2}{S_1} \times S_1$,

$= \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n-1}{n-3} \times \frac{n-2}{n-4} \times \dots \times \frac{6}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{1} \times 1$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

当 $n=1$ 时, $S_1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1 = a_1$ 成立,

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = n$,

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 满足上式,

$$\therefore a_n = n.$$

【巩固练习 4】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = n^2 a_n$, $a_1 = 1$, 则 $S_n =$ _____.

【答案】 $\frac{2n}{n+1}$

【解析】当 $n \geq 2$ 时, $S_n = n^2 a_n$, 则 $S_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1}$, 两式作差得 $S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$, 即 $a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$, 即 $(n+2)a_{n+1} = na_n$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} (n \geq 2)$,

又由 $S_2 = 2^2 a_2$ 且 $a_1 = 1$, 即 $1 + a_2 = 4a_2$, 所以 $a_2 = \frac{1}{3}$, 可得 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$,

则 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{n(n+1)} (n \geq 2)$.

显然 $a_1 = 1$ 时也符合 $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$, 可得 $a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,

所以 $S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$.

故答案为: $\frac{2n}{n+1}$.

【巩固练习 5】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{16}, a_n a_{n+2} = 4a_{n+1}^2$, 则 a_n 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{1}{64}$

【解析】因为 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{16}, a_n a_{n+2} = 4a_{n+1}^2$, 所以 $a_n \neq 0$,

所以 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 4 \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 因此数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{16}$, 公比为 4 的等比数列,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{16} \times 4^{n-1} = 4^{n-3}$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = 4^{n-4} \times 4^{n-5} \times \cdots \times 4^{-2} \times 1 = 4^{\frac{(n-1)(n-6)}{2}}$,

因为 $n=1$ 时, $4^{\frac{(n-1)(n-6)}{2}} = 1 = a_1$, 所以 $a_n = 4^{\frac{(n-1)(n-6)}{2}} = 4^{\frac{1}{2}\left(n - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}}$,

因此当 $n=3$ 或 $n=4$ 时, a_n 取得最小值, 为 $4^{-3} = \frac{1}{64}$.

【题型 6】前 n 项之积 T_n

基础知识

前 n 项积 T_n		
角度 1: 已知 T_n 和 n 的关系	角度 1: 用 $\frac{T_n}{T_{n-1}}$, 得到 a_n	例子: $\{b_n\}$ 的前 n 项之积 $T_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} (n \in \mathbf{N}^*)$.
角度 2: 已知 T_n 和 a_n 的关系	角度 1: 用 $\frac{T_n}{T_{n-1}}$ 替换题目中 a_n	例子: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 且 $\frac{1}{a_n} + \frac{2}{T_n} = 1$.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项积为 T_n , 且 $a_n + T_n = 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{1-a_n}\right\}$ 为等差数列;

【详解】因为 $a_n + T_n = 1$, 所以 $T_n = 1 - a_n \therefore a_1 = \frac{1}{2}$,

所以 $T_{n-1} = 1 - a_{n-1} (n \geq 2)$,

两式相除, 得 $a_n = \frac{1-a_n}{1-a_{n-1}} (n \geq 2)$, 整理为 $a_n = \frac{1}{2-a_{n-1}}$,

再整理得, $\frac{1}{1-a_n} - \frac{1}{1-a_{n-1}} = 1 (n \geq 2)$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{1-a_n}\right\}$ 为以 2 为首项, 公差为 1 的等差数列

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 在数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = a_1 = 1$, $na_n - (n-1)a_{n-1} = 2n-1$,

$b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n+1} = 3^{S_n}$, 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式

【详解】(1) 由已知得, 当 $n \geq 2$ 时

$$\begin{aligned} na_n &= [na_n - (n-1)a_{n-1}] + [(n-1)a_{n-1} - (n-2)a_{n-2}] + \cdots + [2a_2 - a_1] + a_1 \\ &= (2n-1) + (2n-3) + \cdots + 3 + 1 = n^2. \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = n (n \geq 2)$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$, 也满足上式. 所以 $a_n = n (n \geq 1)$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_{n+1} = \frac{b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n+1}}{b_1 b_2 b_3 \cdots b_n} = 3^{S_n - S_{n-1}} = 3^n, \therefore b_n = 3^{n-1} (n \geq 3)$$

当 $n=1$ 时, $b_1 = 1$, 符合上式

当 $n=2$ 时, $b_1 \cdot b_2 = 3^{S_1} = 3$, 所以 $b_2 = 3$, 也符合上式, 综上, $b_n = 3^{n-1} (n \geq 1)$

$$\therefore a_n = n, \quad b_n = 3^{n-1}.$$

2024·深圳中学·二轮一阶测试

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n , 满足 $2a_n + T_n = 1 (n \in \mathbb{N}_+)$.

设 $b_n = 1 + \frac{1}{T_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 b_n ;

【答案】 $b_n = 2^{n+1}$

【分析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n , 满足 $2a_n + T_n = 1 (n \in \mathbb{N}_+)$, $n=1$ 时, $2a_1 + a_1 = 1$, 解得 a_1 .

$n \geq 2$ 时, $\frac{2T_n}{T_{n-1}} + T_n = 1$, 变形为 $\frac{1}{T_n} + 1 = 2(\frac{1}{T_{n-1}} + 1)$, 结合 $b_n = 1 + \frac{1}{T_n}$, 即可得出 b_n .

【详解】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n , 满足 $2a_n + T_n = 1 (n \in \mathbb{N}_+)$,

所以当 $n=1$ 时, $2a_1 + a_1 = 1$, 解得 $a_1 = \frac{1}{3}$.

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{2T_n}{T_{n-1}} + T_n = 1$,

化为 $\frac{1}{T_n} = 2 \times \frac{1}{T_{n-1}} + 1$,

变形为 $\frac{1}{T_n} + 1 = 2(\frac{1}{T_{n-1}} + 1)$,

又 $b_n = 1 + \frac{1}{T_n}$, 所以 $b_n = 2b_{n-1}$, 即 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = 2$ 且 $b_1 = 1 + \frac{1}{a_1} = 4$,

则数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = 4$ 为首项, 2为公比的等比数列

所以 $b_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$.

20. (2022 全国乙卷)记 b_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $a_1 = 3$, $\frac{1}{a_n} + \frac{2}{b_n} = 1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式

由题意可得 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = a_n (n \geq 2)$, 因为 $\frac{1}{a_n} + \frac{2}{b_n} = 1$,

所以 $\frac{b_{n-1}}{b_n} + \frac{2}{b_n} = 1 (n \geq 2)$, 即 $b_{n-1} + 2 = b_n (n \geq 2)$,

所以 $b_n - b_{n-1} = 2 (n \geq 2)$.

又 $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{b_1} = 1$, $a_1 = 3$,

所以 $b_1 = 3$,

故 $\{b_n\}$ 是以3为首项, 2为公差的等差数列, $b_n = 2n + 1$

【巩固练习 1】设 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积. 已知 $\frac{a_{n+1}}{T_{n+1}} - \frac{a_n}{T_n} = 2$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要
下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/086213103000011043>